

最適化読本

数値計画法って何なのさ？



(株)NTTデータ数値システム
Numerical Optimizer グループ

目次

<u>この読本について</u>	<u>1</u>
<u>1 大学駅伝エントリー最適化(?)問題</u>	<u>2</u>
1.1 監督の考えたこと	2
1.2 絵で整理(モデル化してみよう)	3
1.3 モデルの検証(制約条件の導入)	4
1.4 最も良い組み合わせを探す(全探索アルゴリズム)	4
1.5 「順当」な結果を出す方法(グリーディーアルゴリズム)	5
1.6 数理計画法(最適化)とは	6
1.7 コンピュータを使う	7
1.8 広がる応用	9
1.9 まだまだ続きます	10
<u>2 最適化で何をする?</u>	<u>11</u>
2.1 マッチングを最適化しよう	11

この読本について

この小冊子は数理計画法（最適化）という技術の概要と、その使いどころについて解説したものです。

1章には導入として物語風に数理計画法の適用の手順を示しています。2章ではビジネスにおける具体例、3章は数理計画法を実務で使おうとする場合の苦労話をまとめました。4章ではちょっと視点を変えてどういうニーズならば数理計画法に結び付けることができるのか、お客様のことを思い浮かべながら述べてみました。末尾にはこの分野に良く出てくる用語の解説を付録として付けました（こちらは Web で公開している用語集から抜粋したものです <http://www.msi.co.jp/nuopt/glossary/index.html>）。

本文中でも述べていることですが、数理計画法（最適化）はとにかく世の中に「役立つ」ことを旨として生まれた技法で、数学やコンピュータの理屈はそのための手段として用いているにすぎません。そんなわけでこの本の説明には（数字は出てきますが）いわゆる「数式」は一切使わない、という約束の下で話を進めています。

どこからでも良いので気軽に目を通していただければと思います。数理計画法（最適化）とそれを用いたソリューションに対して何かしらのイメージを掴んでいただければ、そしてこの技法をもっと世の中に広めたいと日夜努力している我々のことに少しでも興味を持っていただければ幸いです。



1 大学駅伝エントリー最適化(?)問題



ここに正月恒例の箱根駅伝を目指してトレーニングに励むA君がいます。A君はM大駅伝部の「山の神」。「山の上り」の5区を最も得意としており、なんと新人の頃から本番に出場、3年だった前回大会では区間賞に迫る記録を残しています。さて、A君にとって大学生活最後のこの正月、秋の記録会で5区トップだったA君に全幅の信頼を置くはずの監督は、なんと4区への出走を命じました。一体どうしたわけでしょうか。

1.1 監督の考えたこと



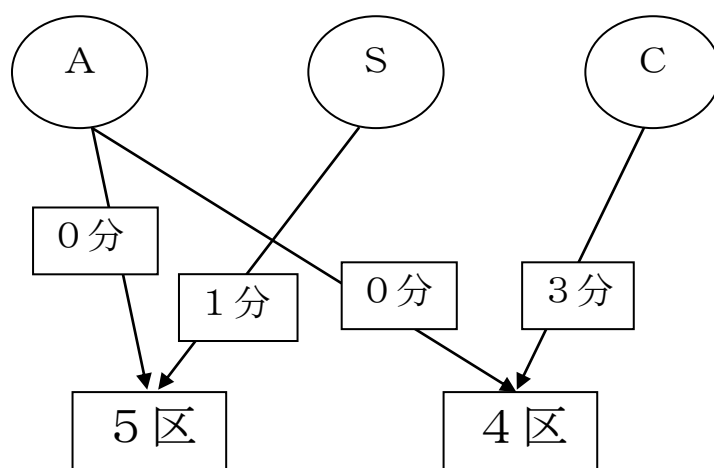
A君が怪我?いいえ違います。怪我をしたのは、4区を走るはずだった彼の同期、B君。ここからA君の運命は狂いはじめます。A君は秋の記録会で腕試しにと4区も走っていて、トップだったB君に次ぐ好成績でした。そして4区における「ナンバーツー」のC君は思いのほか調子が悪くて、2位の「専門外」A君になんと3分も離されてしまいました。さらにはA君の後輩にはポスト「山の神」と呼ばれる大型新人S君がいたことが運命を決したのです。なんと新人のS君、記録会4区は途中棄権でしたが、5区では不動のトップのA君に1分にまで迫る好成績を残し、ポスト「山の神」としての頭角を現したのです。

その結果を見てよくよく考えた監督は「山の神」A君⇒5区、C君⇒4区、という一見「順当」な割り当てよりも、思い切ってC君を外し、S君⇒5区、A君⇒4区とする方が、B君の抜けた穴を埋め、全体としては有利な策であることに気付いたのでした。

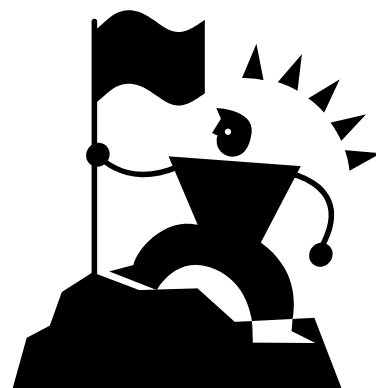


1.2 絵で整理（モデル化してみよう）

本当でしょうか。気の毒ですが怪我で出場できないB君は除いて、上記の話の登場人物たちの記録と出走区間を次のような絵（二部グラフと呼びます）で整理してみましょう。



人と区間の対応を矢印で示しています。各区間にのびる矢印には記録会でのトップからの遅れが書かれたラベルが付けられています。A君は5区トップですから、A君から5区を結ぶ矢印のラベルは「0分」、同じく5区で2位のS君から5区を結ぶ矢印のラベルは「1分」です。B君はこの絵の中にいませんので、この絵の範囲ではA君は4区1位ということになりA君から4区の矢印も「0分」、C君はA君から3分離されたのでC君から4区の矢印には「3分」のラベルが付いています。



5区の区間賞だけを狙うのならばまた話は違ってきますが、秋の記録会の結果を参考に、合計タイムを最短にする理想の割り当てとは何でしょうか。それは5区と4区に差し込む矢印をそれぞれ一つずつ選ぶ方法のうち、矢印に記されている時間（遅れ）の合計を最も小さくするようなものだと言いきらわすことができます。文章でだらだら書かれるよりも、エッセンスを抽出して絵にしてしまう方がよほど直観的で話は早いですね。

このように、直面している問題のエッセンスになる部分を抜き出して表現

することを「モデル化」と呼び、実は数理計画法のもっとも重要なプロセスなのです。

1.3 モデルの検証（制約条件の導入）



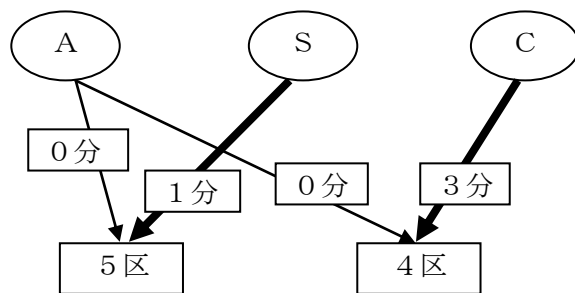
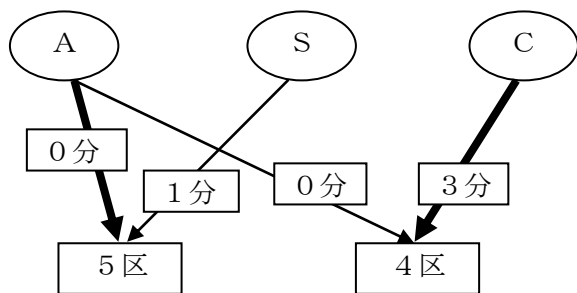
矢印にある時間（遅れ）の合計をもっとも小さくしろと言われれば4区と5区にそれぞれ差し込む「0分」の矢印を選ぶのが正解？いえちょっと待ってください。この矢印は両方ともA君から出ています。もとの意味に戻って考えてみるとこれは無理。A君は同じ日に4区と5区両方を走ることはできません。ここからモデルに解を選択する条件（制約条件と呼ばれます）が抜けていることがわかります。「選ぶ矢印は同じ人から出てはならない」のでした。このようにモデルの不備（多くは制約の抜け）によって実際には使えない解が出てきてしまうことはよくありますが、こうしたフィードバックは数理計画法の重要なステップの一つ。この繰り返しによってモデルが洗練されてゆくのですから、検証によってモデルが修正されることを怖がってはいけません。

1.4 最も良い組み合わせを探す（全探索アルゴリズム）

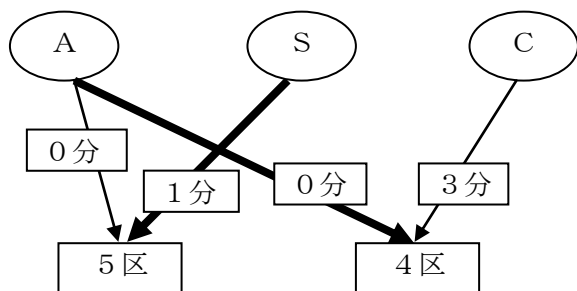
さて、制約条件を頭に入れつつ絵の上で考えてみましょう。あり得る答は次の3通りであることがわかります。遅れの合計を比べてみると、なるほど監督が選んだ「解3」が「最適解」であることがわかります。

解1（遅れ合計：3分）

解2（遅れ合計：4分）



解3 (遅れ合計: 1分)



ここでは制約を満たす、あり得る解（実行可能解と呼びます）をすべて列挙して、それぞれが持つ遅れの合計値（目的関数値）の最小のものを採用することによって最適解を探しています。手堅いですね。こうすれば絶対に最適解を見逃すことはありません。こういう解法のことを厳密解法と呼び、解が見つかると同時にそれ以上良い解はあり得ないことも同時にわかってしまうという性質があります。



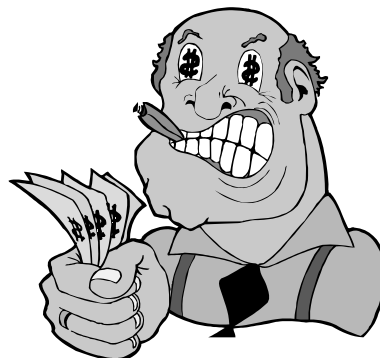
この手堅い方法には「全探索アルゴリズム」という名前が付いています。



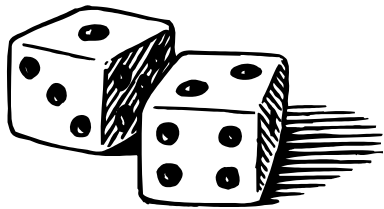
効率はお世辞にも良いとは言えないながら、この方法をなんとか改良しようという方向性が「分枝限定法」と呼ばれる洗練された手法を生み出すこととなりました。分枝限定法は今や世界中のソフトウェアに組み込まれているスタンダード。侮ってはなりません。

1.5 「順当」な結果を出す方法（グリーディーアルゴリズム）

さて監督が苦心の末にひねりだした出走予定はマスコミに発表され、元旦のスポーツ新聞には『M大「山の神」A君、5区から外れる！！』といった見出しが躍ることになりました。こんなにニュースになるのは、世間が一見「順当」な割り当てを期待しているためですね。



同一人物が複数の区間で1位だったらどうしようとか面倒なことは考えずにとにかく「順当」な割り当てを指向するアルゴリズムというのもあって、「グリーディー（欲張り）アルゴリズム」という名前が付いています。



この場合に当てはめると「各区間1位の人を、とにかく割り当ててゆく」というのがそれに相当します。このアルゴリズムは目先のことしか考えません。だから「欲張り」（このネーミングにはインソップ童話のセンスを感じます）。A君のように複数の区間で一位という人が出てきてしまったらサイコロでも振ってどちらを走らせるかを適当に決めてしまったりします。この方法ではサイコロの出具合によっては真の最適解である解3を捨て、解1を選んでしまう可能性がありますから、厳密解法ではありません。だからといってぜんぜん使えないかというところでもない。何の取り柄もない解2を掴まないという点、そしてややこしいことを考えずとも、簡単に実現できるという点。そして何より結果に難癖をつけられたとき、それなりに納得性がある（「だってほら、A君はなんといっても山の神だから5区に決まりだよね」という点は考えようによっては長所と言えます。我々は昼飯をどこにしようとか、そこで何を食べようとか日常的に幾つかの選択肢から何かを選び取って暮らしていますが、そのたびに絵なんか描いて解を探索していたら昼休みが終わってしまいます。場当たりの的なのがむしろ普通。そんな我々にはこの「グリーディー（欲張り）アルゴリズム」はじつにじっくりとくる方法とも言えるのです。

1.6 数理計画法（最適化）とは

数理計画法とは、やりたいことが明確で、少々手間をかけても徹底的に良い解を探したいという状況において、ここまで述べたような「モデル化」を行って、モデル上で解を導く方法論です。駅伝のケースでは解きたい問題の内容を一旦「絵」の形にモデル化して、絵（モデル）の上で全列挙アルゴリズムを使って最適解を見つけ出しました。「数理計画法」は「最適化」とも言われますがこれはモデル上で「最適な解を探す」という側面に即し

た呼び名です。



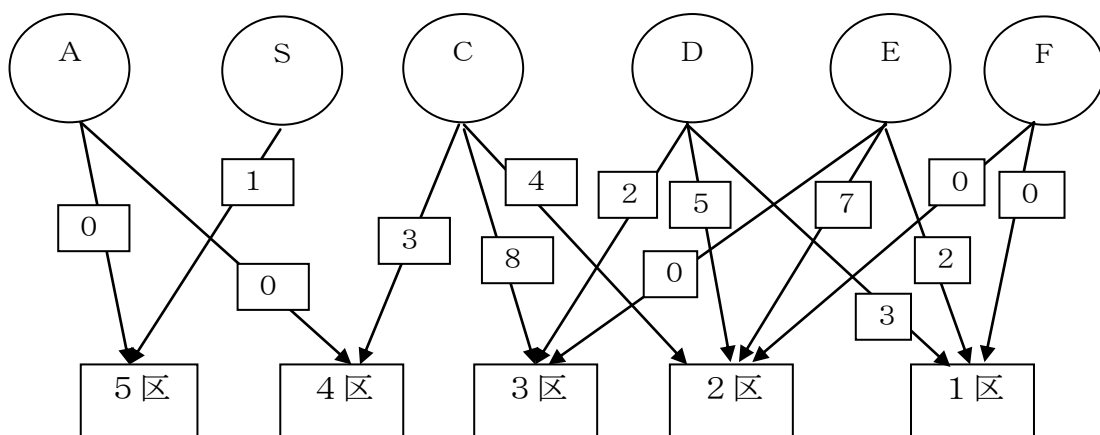
通常、モデル化には表現の効率と柔軟性のために数式が使われることが多く、加えて解を特定したり、解の存在範囲を絞ったりするために数学の理論が積極的に活用されます。そんなわけでかなりとっつきにくい印象を持たれるかもしれませんが、数理計画法は現実世界のニーズに根を張っている「実学」である

こと、数式は便宜のために使っているだけで、「絵」の代わりにしているだけであることをどうか心に留めておいてください。数式は数理計画法を表現するツール) なのですが、数理計画法は必ずしも数式ではない（だとは限らない) のです。

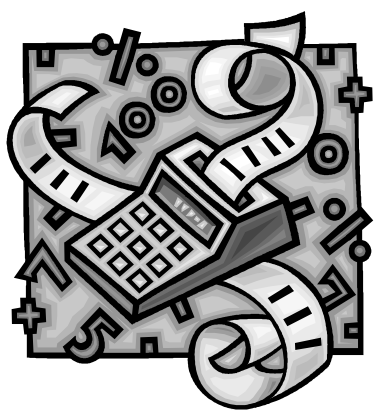
1.7 コンピュータを使う

4区と5区のように似たような特徴(どちらも上り坂)の区と、経験豊富で器用な選手がA君だけではないことに気付いた監督は、まだまだ思いもよらない起用があり得るのでは?と往路5区間全体の出走選手決定に数理計画法を適用してみることにしました。次が秋の記録会の上位の選手の記録を元に1, 2, 3区もあわせて表現したモデルです(矢印の上の数字の「分」は冗長なので省略してあります)。





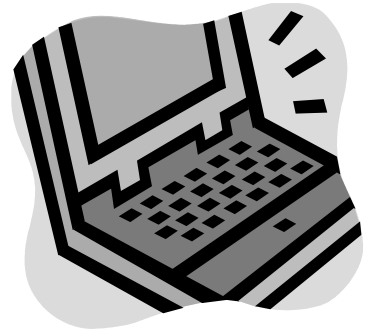
さて、最適解は何でしょう。Numerical Optimizer が求めた回答¹は欄外にありますのでこの手のパズルの好きな方、ぜひご自分で解いてみてください。数理計画法アルゴリズムとパズルの相性は意外と良く、「数独」ならどんな難問であろうと確実に一瞬で解いてしまいます。ただ、これは人間の楽しみを奪っている感もあるのであまり良い使い方とは言えないかもしれません...



さて、このくらいの問題に自信を持って答を出すには、よほど勘の良い方でも1分はかかるはずです。30秒？すごいですね。では区間が往路・復路全体（すなわち10区）、選手の数が増えればどうでしょう？さすがにちょっといやになってきますね。この手の問題は組み合わせ最適化問題と言って、全探索アルゴリズムでやると難しさが指数関数的（倍々ゲーム的）に増大していずれ到底手に負えない規模に爆発することが知られています。人間様が苦勞してモデル化した問題です。アルゴリズムの適用なんぞという単純作業はぜひ忠実なる僕であるところのコンピュータにやらせましょう。こういうときのために Numerical Optimizer をはじめとする数理計画法（最適化）ソルバ

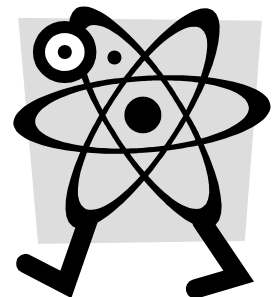
¹ 1区から順番に D,F,E,A,S 君が担当する（矢印のラベル合計は4分）というのが最適解です。2区、3区は順当。D君は3位だった1区を担当することになって少々不満そう。ただ、2区2位でも本番に出場できないC君のことを考えるとそうも言っははられません。

一というソフトウェアがあり、「全探索アルゴリズム」の改良型、分枝限定法が付いているのでかなり賢いです。普段はさくさく動かなくてイライラさせられているようなパソコンでも、上の絵程度のものならば、人数が倍の12人になっても、データを与えてから待ち時間なしで答を返してきます。それもそのはずで、例えば総勢百人の駅伝部全体で箱根駅伝10区について、秋の記録会20位までの成績を見て走者を決定する、という箱根駅伝完全モデル（絵に書くとするとノード一矢印が出入りしている○とか□のことです一とノードを結ぶ矢印の数は200本になります）でも100分の1秒以下。人数が千人で、百区の問題（矢印の数2千本）で10分の1秒くらい、1万人で1千区（矢印の数2万本、もう何が何だか...）でやっと何かしら計算している様子が見えませんがそれでも計算時間はたったの3秒。使ったのはごく普通に普及しているノートパソコンです。数理計画法アルゴリズムとソフトウェア（ここではNumerical Optimizerを使いました）の進歩ももちろんありますが、計算機械としてのコンピュータの面目躍如といったところでしょうか。



1.8 広がる応用

ここで駅伝から少々離れて、モデルの絵をもういちど眺めてみてください。「選手」と「区間」はいろいろなものに見立てることができます。例えば人と部署（人員配置）、営業マンと担当地域（テリトリ割り当て）、救急車と地域（緊急車両配備）、小学校と学区（学校配置）、CMとCM枠（スポット広告最適化）などなど、我々の身のまわりにはこの構造を持つ問題がじつに多く、数理計画法が実際に適用されているのです。発展として、「区間」の部分を時間割やスケジュール表の升目に見立てれば時間割作成やスケジューリングの問題にもなります。じつは数理計画法の応用において重要なのは数学そのものよりも、この



「見立て」によるモデル化のセンスであることは声を大にして申し上げておきたいと思います。もちろんアルゴリズムの動作原理であるところの数学に詳しいに越したことはないのですが、今時、ごりごり計算するのはコンピュータの仕事です。人間はせっかくですからモデルの作成と洗練に注力しましょう。最近モデリング言語とって、数式の入力や解釈、解の検証（モデルの検証）を容易化するツールも充実しています。コンピュータを味方につければ、人間なら到底歯が立たない様々な現実の問題に最適解を求めることができる！大いなる可能性を感じた研究者がこの分野に集結してはや50年以上、様々な実績が積み上げられてきました。現実問題のモデル化を発見し、アルゴリズムの開発・改良を行い、その一連の処理を実現するソフトウェアを開発した偉大な先人たちの成果を、巨大なコンピュータパワーを持つ我々は今まさに居ながらにして享受できる時代なのです！

1.9 まだまだ続きます

なんだか妙に力んでしまいましたが、ここまでお付き合いいただきありがとうございます。

さて、なんとなく使えそうだけど、本当に実務の分野に供するかを判断するのはもっと情報を集めてからにしよう、と慎重になるのは当然ですね。次の2章は、ビジネスにおける実例について知りたい、という方に向けて、3章は本当にそんなに簡単に行くのかなあ、という方に向け、実はそれほど簡単には行かない部分もありますよ、といった側面をお伝えします。4章ではどんなときに数理計画法（最適化）を使うべきか、というちょっと違った視点からまとめてみました。

この先もどうかお気軽におつきあいくださいませ。



2 最適化で何をする？



では、数理計画法で何ができるのでしょうか。ここでは、もっと具体的なビジネスでの活用方法について見てゆきます。

2.1 マッチングを最適化しよう



ビジネスの現場では、マッチング、すなわち誰かに何かを割り当てたり、紹介したりといったニーズがじつによく現れます。このタイプの話はどれも前章の駅伝の話で選手と区間をマッチングさせるのと本質的に変わりませんので、モデルはいずれも「1. 2 絵で整理（モデル化してみよう）」で描いたのと同様の「絵」で表現されるのです。

続きは小冊子をお読みください。

nuopt-info@msi.co.jp まで下記を明記の上、メールの件名「最適化読本希望」とご連絡下さい。

- ご所属企業名・大学名
- 部署名
- お名前
- 電話番号
- 郵送先住所

メール連絡頂いた方へは小冊子を郵送致します。

ご連絡をお待ちしております。