

数理最適化手法による商業均衡分布の導出

COMMERCIAL EQUILIBRIUM DISTRIBUTION BY MATHEMATICAL OPTIMIZATION METHOD

杉山主水*, 本間裕大**, 宗政由桐***

Mondo SUGIYAMA, Yudai HONMA and Yuki MUNEMASA

In this paper, we propose the model for arrangement of commercial equilibrium distribution based on economic principle with locational cost and facility capacity. We specifically extended the concept of equilibrium in balancing-mechanism and we consider trade-off relationship between purchase revenue and locational cost. To achieve these purposes, we propose the mathematical programming problem that simultaneously satisfies equilibrium conditions. As a result, we are able to derive the generalized of distribution of commercial equilibrium arrangement.

Keywords: *Commercial Activity, Market Equilibrium, Huff-Model, Facility Capacity, Location Cost, Balancing-Mechanism*

商業活動, 市場均衡, ハフ・モデル, 施設容量, 立地コスト, バランス・メカニズム

1 はじめに

本研究は、顧客の店舗選択行動が商業分布へ与える影響を考慮した上で、経済原理に基づく商業分布の均衡配置を導出することを目的とする。立地コスト（≒賃料）と施設容量を明示的に考慮することによって、購買による収益と、立地による負担のトレードオフ関係が組み込まれた、数理計画問題を提案することができる。これは、より市場均衡を適切に表現した数理モデルによる、バランス・メカニズムの均衡概念の本質的拡張と言える。

資本主義において商業は重要な経済活動であり、都市形態に大きく影響を与えることは言うまでもない。このとき必須の概念として市場均衡が挙げられよう。そのような観点に基づいた先行研究として Harris らによるバランス・メカニズム¹⁾があげられる。バランス・メカニズムは、店舗の魅力度が売り上げを決め、その売り上げがまた店舗の魅力度を決定するという相互連関のループを追求するモデルとなっている。パラメータの設定によって商業分布が影響を受け、場合によっては集積拠点が離散的に出現するという結果が得られている。さらに本間ら²⁾は、バランス・メカニズムを拡張し、領域形状や道路パターンが商業分布に与える影響について考察している。しかしこれらの手法は、相互連関ループを愚直に繰り返して計算することによって解を導出していることに注意しなければならない。

また交通均衡の概念に関しては、新古典派経済学の分野で研究がなされており、Wardrop³⁾が利用者均衡配分とシステム均衡配

分という2つの配分原則を提唱している。利用者均衡は『均衡状態においては、もはやどの利用者も経路を変更することによって自己の旅をそれ以上短縮することができない』と表現され、Nash 均衡^{4, 5)}と等価であることが示されている。しかし、均衡を考える際には通常、条件分岐が伴うため、繰り返して計算ではなく数理最適化手法で解くことが主流である。事実、Beckman⁶⁾や Jorgensen⁷⁾が利用者均衡配分は数理計画問題と等価になることを明らかにしている。また Norbelt⁸⁾はバランス・メカニズムを満たす数理計画問題を解き、商業分布の導出を試みている。しかしこの論文では立地コストや施設の容量などは考慮されていない。立地コストや施設の容量という概念を導入した均衡分布の数理計画問題は宗政ら⁹⁾によっても提案されているが、バランス・メカニズムで極めて重要となる確率的配分は導入されていない。加えて、市場均衡の特徴である複数プレイヤーの概念も登場しない。

本研究では、上述の既存研究を踏まえ、バランス・メカニズムを直接的に求解する数理モデルを基に、立地コストと施設容量を明示的に導入する。結果として、バランス・メカニズムの均衡概念が本格的に拡張されることになり、さらには商業の収益と立地コストのトレードオフの関係も組み込まれることになる。現実を考慮すると、建物の容量は有限であり、また商業集積地においては賃料が高くなることは明白であるため、このようなモデルを考えることは非常に重要であることと考えられる。より現実的な想定で、人と商業という複数のプレイヤーの行動原理を考慮した商業分布が直接的

* 東京大学大学院工学系研究科建築学専攻
修士課程 学士 (工学)

** 東京大学生産技術研究所 准教授・博士 (工学)

*** 東京電機大学理工学部建築・都市環境学系 助教・博士 (工学)

Graduate Student, Dept. of Architecture, Graduate School of Engineering,
The University of Tokyo, B.E.

Assoc. Prof., Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, Ph.D.

Assist. Prof., School of Science and Engineering, Tokyo Denki University, Ph.D.

に求められる点に新味がある。

本論文の構成は以下の通りである。まず第2章では、本研究で使用する都市モデルについて定義し、バランス・メカニズムの定式化を述べる。さらにバランス・メカニズムを満たす数理計画問題を示し、解の一意性についての検討を行う。続く第3章では、立地コストと施設容量という、バランス・メカニズムでは考慮されていなかった概念を導入した均衡式を定式化し、その均衡条件を満たす数理計画問題も提案する。加えて、解が一意に定まる条件についても検討する。第4章では、第2章で述べたバランス・メカニズムを繰り返し計算と数理最適化手法でそれぞれ求めた計算例を示す。第3章の計算例も同時に示し、その相違について比較・考察する。最後に本研究で得られた知見と今後の展開について述べる(第5章)。

2 バランス・メカニズムに基づく商業分布

本章では、バランス・メカニズムの定式化と、それを満たす数理計画問題を示し、解の一意性について考察する。

2.1 都市モデル

本研究の都市モデルは、居住地(H)と商業地(C)からのみ構成される都市とし、 H は I 個、 C は J 個の建物ノードからなると仮定する。また提案する都市モデルは独立で、居住者の購買行動や商業の移転はこの都市内で行われ、他の都市との流入は無いものとする。また、ノード i の居住者の人数は、 O_i で一定とする。いま、商業数はノードごとに s_j として、総商業数は一定であるとして、

$$\sum_{j=1}^J s_j = N \quad (1)$$

を導入する。居住者はランダム効用最大化の概念に基づき商業地を選択して購買行動をするものとし、一方、商業は自己の利益を最大化するように立地を変更するものとする。このとき、立地の変更にかかるコストは考慮しないものとする。なお、この都市モデルは以下に登場する全てのモデルに共通するものである。

2.2 バランス・メカニズムの概要

Harrisら¹⁾の研究では、人々の購買行動をランダム効用理論に基づいてモデル化し、店舗の売り上げから次期の店舗規模が決まり、店舗規模が来客数を決め、来客数が次期の店舗の売り上げを決めるという相互関連のループを追及するものとなっている。

まず初めに、バランス・メカニズムの定式化を概説する。いま購買地の選択行動が $i-j$ 間の距離 D_{ij} による負の効用と、商業の集積による正の効用から決まると想定し、 t_{ij} を $i-j$ 間を移動する購買者人数を、ランダム効用理論に基づき

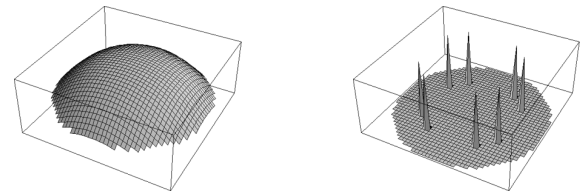
$$t_{ij} = O_i \cdot \frac{\exp[-\gamma D_{ij}] \cdot s_j^\alpha}{\sum_{j=1}^J \exp[-\gamma D_{ij}] \cdot s_j^\alpha} \quad (2)$$

で与える。これは本質的にハフ・モデルの定式化と同義である。なお、 α 、 γ は正の定数とする。ある商業ノードの総売り上げ Q_j はそのノードの来客数に応じて決まるとすると、

$$Q_j = \epsilon \sum_{i=1}^I t_{ij}. \quad (3)$$

さらに商業ノードの売り上げがノードにおける新たな商業数を決定するものとし、

$$s_j = \zeta Q_j \quad (4)$$



Case of $\alpha \leq 1$

Case of $\alpha > 1$

Fig.1 Shape of Balancing-Mechanism

と仮定する。ここで、式(3)を式(4)に代入をすると、

$$s_j = \beta \sum_{i=1}^I t_{ij} \quad (5)$$

となる。ただし、 ϵ 、 ζ 、 β は正の定数で、 $\epsilon \times \zeta = \beta$ とする。すなわち、ノード j の商業数はノード j への来客人数に比例して決まるという構造になっている。

バランス・メカニズムでは式(2)と式(5)の相互関連構造を追求することによって、商業分布と顧客の選択行動の均衡状態が導き出される。その際、式(2)における α の値が重要となる。具体的にはFig.1に示すように、 $\alpha \leq 1$ では安定な分布が一意に定まる一方、 $\alpha > 1$ の場合には、導出される商業分布が離散的に出現し、その均衡解も一意に定まらないことが知られている¹⁰⁾。

2.3 バランス・メカニズムにおける均衡状態

バランス・メカニズムは式(2)と式(5)の連立方程式を解くという構造になっている。この時、個々の商業の収益は Q_j を s_j で割った、

$$\frac{Q_j}{s_j} = \frac{Q_j}{\zeta Q_j} = \frac{1}{\zeta} \quad (6)$$

となり、これは定数となっていることから、個々の商業の収益が均衡していることが分かる。しかし、これは式(4)の仮定でのみ成立するものであり、式(4)を一般化してしまうと必ずしも均衡状態になるとは限らない。より一般的な定式化で市場均衡を満たす商業分布を導出するためには、第1章で述べたように数理最適化手法が有効であると考えられる。そのためには、バランス・メカニズム自体が数理計画問題としても記述される必要があろう。

2.4 バランス・メカニズムを満たす数理計画問題

Norbelt⁸⁾による定式化を踏まえた上で、バランス・メカニズムを満たす数理計画問題の導出と、その数学的特性について議論を行う。式(2)と式(5)の相互関連を満たす数理計画問題(P1)は以下で与えられる：

$$\begin{aligned} \min. \quad F_1(s_j, t_{ij}) = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J D_{ij} t_{ij} \\ & - \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} \ln s_j) \\ & + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln \frac{t_{ij}}{O_i} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{s.t.} \quad O_i = \sum_{j=1}^J t_{ij} \quad (8)$$

$$N = \sum_{j=1}^J s_j. \quad (9)$$

いま、制約式 (8), (9) に関する Lagrange 乗数を η_i, μ とし、数理計画問題 (P1) に対する Lagrange 関数を、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(s_j, t_{ij}, \eta_i, \mu) = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J D_{ij} t_{ij} - \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (t_{ij} \ln s_j) \\ & + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln \frac{t_{ij}}{O_i} \\ & + \sum_{i=1}^I \eta_i \left(O_i - \sum_{j=1}^J t_{ij} \right) \\ & + \mu \left(\sum_{j=1}^J s_j - N \right) \end{aligned} \quad (10)$$

とすると、数理計画問題 (P1) の最適解は以下の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす：

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial t_{ij}^*} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial s_j^*} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \eta_i} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mu} = 0. \quad (14)$$

ここで、式 (11) から、

$$0 = \frac{1}{\gamma} (\ln t_{ij}^* + 1 - \ln O_i) + D_{ij} - \frac{\alpha}{\gamma} \ln s_j^* - \eta_i \quad (15)$$

であり、 η_i は (8) を満たすように調整されるため、

$$t_{ij}^* = O_i \cdot \frac{\exp[-\gamma D_{ij}] \cdot s_j^{*\alpha}}{\sum_{j=1}^J \exp[-\gamma D_{ij}] \cdot s_j^{*\alpha}} \quad (16)$$

が導かれる。また、式 (12) から、

$$0 = -\frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\sum_{i=1}^I t_{ij}^*}{s_j^*} + \mu \quad (17)$$

であり、これは、

$$s_j^* = \frac{\alpha}{\gamma \mu} \sum_{i=1}^I t_{ij}^* \quad (18)$$

と変形できる。すると式 (15) は式 (2) と一致することが確認でき、式 (18) は $\alpha/(\gamma\mu) = \beta$ とすると、式 (5) と一致することが確認できる。式 (13), (14) から、制約式 (8), (9) が満たされることは明らかであるので、数理計画問題 (P1) の最適解はバランス・メカニズムの条件と一致することが判明した。

2.5 凸関数であるための条件

前節の数理計画問題の最適解がバランス・メカニズムを満たすことが判明した。本節では、目的関数 $F(t_{ij}, s_j)$ が凸関数となる条件、すなわち最適解が一意に決定する条件を整理することによって、均衡解の数理的性質を考察する。

目的関数の変数は $(s_1, s_2, \dots, s_J, t_{11}, t_{12}, \dots, t_{IJ})$ の $J+I \times J$ 個である。いま、Hessian 行列 $\nabla^2 F(s_j, t_{ij})$ を考えると、これは

$(J+I \times J) \times (J+I \times J)$ の行列となり、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_k^2} = \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{ij}}{\gamma s_k^2}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_k \partial s_l} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_k \partial t_{mn}} = \frac{-\alpha}{\gamma s_k}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_{kl} \partial t_{mn}} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_{kl}^2} = \frac{1}{\gamma t_{kl}} \quad (23)$$

であるから、 $J \times J$ 行列 \mathbf{V}_1 、 $J \times (I \times J)$ 行列 \mathbf{W}_1 、 $(I \times J) \times J$ 行列 \mathbf{X}_1 、 $(I \times J) \times (I \times J)$ 行列 \mathbf{Y}_1 を、

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{i1}}{\gamma s_1^2} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{iJ}}{\gamma s_J^2} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha s_1}{\gamma} & \mathbf{0} & \frac{-\alpha s_1}{\gamma} & \dots \\ & \ddots & & \ddots & \dots \\ \mathbf{0} & & \frac{-\alpha s_J}{\gamma} & \mathbf{0} & \dots \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{W}_1^\top \quad (26)$$

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma t_{11}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{\gamma t_{IJ}} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

とすると、

$$\nabla^2 F(s_j, t_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{X}_1 & \mathbf{Y}_1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

と表すことができる。ここで、Gershgorin の定理¹¹⁾ より、 n 次行列 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ において、各 $1, 2, \dots, n$ に対して、対角要素 a_{ii} を中心とし、その行の非対角要素の絶対値の和 $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ を半径とする円盤 U_i ：

$$U_i = \{ \pi \in \mathbb{U} \mid |\pi| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \} \quad (29)$$

を考えると、 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ のすべての固有値は式 (29) で定義される n 個の円盤の和集合に含まれることが分かっている。これを Hessian 行列 (28) に適用すると、固有値が非負であるための十分条件は、全ての円盤 U_i が非負の領域に存在することである。すなわち、

$$\begin{cases} \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{ij}}{\gamma s_j^2} \geq I \frac{\alpha}{\gamma s_j} \\ \frac{1}{\gamma t_{11}} \geq \frac{\alpha}{\gamma s_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\gamma t_{IJ}} \geq \frac{\alpha}{\gamma s_J} \end{cases} \quad (30)$$

が成り立つ必要がある。 $\alpha > 0, \gamma > 0$ に注意して式変形すると、

$$(1 - \alpha) \sum_{i=1}^I t_{ij} \geq 0 \quad (31)$$

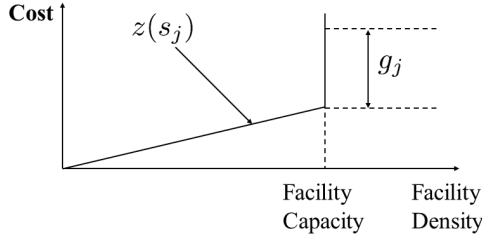


Fig.2 General form of location function

が、Hessian 行列 (28) の固有値が非負であるための十分条件である。これは $\alpha \leq 1$ であれば成り立っていることは自明である。逆に $\alpha > 1$ のときは固有値が非負であるとは限らない。一方、目的関数の Hessian 行列 $\nabla^2 F(s_j, t_{ij})$ が半正定値ならば目的関数 $F(t_{ij}, s_j)$ は凸関数である。行列が半正定値であることを、全ての固有値が非負であることは同値である¹²⁾ ため、 $\alpha \leq 1$ のときは目的関数が凸関数であることが判明した。これは $\alpha \leq 1$ でバランス・メカニズムが一意的な安定した分布となる性質とも一致する。

3 立地コストと施設容量を導入した商業均衡分布

本章では、前章の議論に立地コストと施設容量の概念を加えることによって、商業均衡分布に関するモデルの本質的拡張を試みる。

3.1 立地コストと施設容量の定義

バランス・メカニズムにおいては導出される商業分布がパラメータの設定によっては離散的な出現となってしまうことが分かっている。しかしながら、実際の都市においては地価や敷地の制約によって無限に集積することは不可能であるため、このようなことは発生しない。したがって、バランス・メカニズムに立地コストと施設容量の概念を付け加えることは本質的な拡張と言える。

まず準備として、立地コストと施設容量、そして付随して発生するペナルティコストの定義をする。立地コストは、ノードごとにそのノードの商業数だけに依存して決まる s_j の関数として、 $z(s_j)$ とする。一般に $z(s_j)$ は s_j の単調増加関数と考えられる。また施設容量とは、それ以上商業がそのノードに立地することができない容量の上限と定義する。このとき、その施設容量を S_j とすると、

$$0 \leq s_j \leq S_j \quad (32)$$

が成り立っている。施設容量は、敷地やその建築物の容量制約と捉えることができる。最後にペナルティコスト g_j について説明する。ある区域がその利便性ゆえに栄えたとしても、そこに参入できる商業数には限界がある。そのようなとき、参入希望者は追加のコストを支払わずであり、またそのコストは参入希望者数によって内生的に決定されるはずである。本論文では、そのようなコストをペナルティコストと定義し、施設容量制約と連動させる。Fig.2 に立地コストと施設容量、ペナルティコストの概形を示す。

3.2 利益均衡式の導入

いま、個々の商業における利益 R_j というものを考える。利益とは、収益から様々なコストを引いたものとして、ノード j 全体の収益はノード j への来客数に依存して決まるとすると、個々の商業の利益は、ノード j の収益を s_j で除したのから立地コスト $z(s_j)$ 、施設容量を超えた場合のペナルティコスト g_j を引いた、

$$R_j = \frac{\kappa \sum_{i=1}^I t_{ij}}{s_j} - \delta z(s_j) - g_j \quad (33)$$

と表すことができる。ただし、 κ, δ は正の定数である。このとき、商業の利益について均衡条件を満たすには、

$$R - R_j \geq 0, \quad (34)$$

$$s_j(R - R_j) = 0, \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^J s_j = N, \quad (36)$$

$$0 \leq s_j \leq S_j, \quad (37)$$

$$\begin{cases} g_j = 0 & (s_j < S_j) \\ g_j \geq 0 & (s_j = S_j) \end{cases} \quad (38)$$

が成り立っている必要がある。 R は都市モデルにおける商業の最大利益であり、式 (35) は $s_j > 0$ であれば、商業が得る利益の均衡状態が保証され、 $R_j = R$ であることを示している。逆に $R_j < R$ の場合は $s_j = 0$ でなければならない。また、式 (38) はペナルティコストに関する条件式であり、容量制約に達した場合のみペナルティコストが正值をとることを意味している。

3.3 利益均衡を導入した数理計画問題

本研究では、バランス・メカニズムにおける式 (5) に代わり、上述の均衡概念を導入する。一方、購買人数はバランス・メカニズムと同様に式 (2) によって求められると仮定する。このとき、式 (5) と式 (34)–(38) を同時に満たす商業均衡分布を導出したい。前章と同様、数理最適化手法で求めるために、以下の数理計画問題 (P2) を提案する：

$$\begin{aligned} \min. \quad F_2(t_{ij}, s_j) = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J D_{ij} t_{ij} \\ & + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln \frac{t_{ij}}{O_i} \\ & + \theta \sum_{j=1}^J \int_0^{s_j} z(x) dx \\ & - \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln s_j \end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{s.t.} \quad O_i = \sum_{j=1}^J t_{ij} \quad (40)$$

$$N = \sum_{j=1}^J s_j \quad (41)$$

$$0 \leq s_j \leq S_j \quad (42)$$

$$0 \leq t_{ij}. \quad (43)$$

いま、Lagrange 乗数 η_i, μ, λ_j を導入し、数理計画問題 (P2) に対する Lagrange 関数を

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2(t_{ij}, s_j, \eta_i, \mu, \lambda_j) = & \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J D_{ij} t_{ij} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J t_{ij} \ln \frac{t_{ij}}{O_i} \\ & + \theta \sum_{j=1}^J \int_0^{s_j} z(x) dx - \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{\alpha}{\gamma} t_{ij} \ln s_j \\ & + \sum_{i=1}^I \eta_i (O_i - \sum_{j=1}^J t_{ij}) + \mu (\sum_{j=1}^J s_j - N) \\ & + \sum_{j=1}^J \lambda_j (s_j - S_j) \end{aligned} \quad (44)$$

とすると数理計画問題 (P2) が最適解は以下の Karush-Kuhn-Tucker 条件を満たす：

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \lambda_j} \leq 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \lambda_j} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \eta_i} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \mu} = 0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial s_j^*} \geq 0, \quad s_j^* \geq 0, \quad s_j^* \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial s_j^*} = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial t_{ij}^*} = 0. \quad (49)$$

なお、式 (45), (48) は不等式制約を含んでいるためこのような形になっていることに注意されたい。前章と類似の議論により、これらの式から、

$$0 \leq s_j^* \leq S_j, \quad (50)$$

$$O_i - \sum_{j=1}^J t_{ij}^* = 0, \quad (51)$$

$$\sum_{j=1}^J s_j^* - N = 0, \quad (52)$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\sum_{i=1}^I t_{ij}^*}{s_j^*} - \theta z(s_j^*) - \lambda_j - \mu = 0 & (s_j^* > 0) \\ \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\sum_{i=1}^I t_{ij}^*}{s_j^*} - \theta z(s_j^*) - \lambda_j - \mu > 0 & (s_j^* = 0), \end{cases} \quad (53)$$

$$\frac{1}{\gamma} (\ln t_{ij} + 1 - \ln O_i) + D_{ij} - \frac{\alpha}{\gamma} \ln s_j^* - \eta_i = 0 \quad (54)$$

を導き出すことができる。式 (50)–(54) において、 $\mu=R$, $\lambda_j=g_j$ とすると、式 (2), (33) は均衡条件 (34)–(38) に一致することが分かる。ただし、(53) においては $\kappa : \delta = \alpha/\gamma : \theta$ である。すなわち、 $\theta = (\delta\alpha)(\gamma\kappa)$ とすればよい。また、式 (54) については、第 2 章と同様に計算することで、式 (2) と一致することを確認できる。

3.4 凸関数であるための条件

目的関数 $F(t_{ij}, s_j)$ が凸関数である時は、解の一意性が保証される。本節では、この条件を整理する。

目的関数の変数は $(s_1, s_2, \dots, s_J, t_{11}, t_{12}, \dots, t_{IJ})$ の $J+I \times J$ 個である。いま、Hessian 行列 $\nabla^2 F(s_j, t_{ij})$ を考えると、これは $(J+I \times J) \times (J+I \times J)$ の行列となり、

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_k \partial s_l} = 0, \quad (55)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_k^2} = \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{ij}}{\gamma s_k^2} + \theta z'(s_k), \quad (56)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s_k \partial t_{mn}} = \frac{-\alpha}{\gamma s_k}, \quad (57)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_{kl} \partial t_{mn}} = 0, \quad (58)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_{kl}^2} = \frac{1}{\gamma t_{kl}} \quad (59)$$

であるから、

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{i1}}{\gamma s_1^2} + \theta z'(s_1) & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{iJ}}{\gamma s_J^2} + z'(s_J) & \end{pmatrix}, \quad (60)$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha s_1}{\gamma} & & \mathbf{0} & \frac{-\alpha s_1}{\gamma} & \dots \\ & \ddots & & & \dots \\ \mathbf{0} & & \frac{-\alpha s_J}{\gamma} & \mathbf{0} & \dots \end{pmatrix}, \quad (61)$$

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{W}_2^\top \quad (62)$$

$$\mathbf{Y}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma t_{11}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{\gamma t_{IJ}} \end{pmatrix} \quad (63)$$

を用いて、

$$\nabla^2 F(s_j, t_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 & \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \quad (64)$$

と表すことができる。ここで、Gershgorin の定理から全ての固有値が非負であるための十分条件は、

$$\begin{cases} \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{ij}}{\gamma s_j^2} + \theta z'(s_j) \geq \frac{I}{\gamma s_j} \\ \frac{1}{\gamma t_{11}} \geq \frac{\alpha}{\gamma s_1} \\ \vdots \\ \frac{1}{\gamma t_{IJ}} \geq \frac{\alpha}{\gamma s_J} \end{cases} \quad (65)$$

であり、これらから $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\theta > 0$ に注意して式変形すると、

$$(\alpha - 1) \frac{\alpha \sum_{i=1}^I t_{ij}}{\theta \gamma s_j^2} \leq z'(s_j) \quad (66)$$

が、Hessian 行列 (64) の固有値が非負であるための十分条件である。 $\alpha \leq 1$ かつ $z'(s_j) \geq 0$ すなわち $z(s_j)$ が増加関数のとき明らかに固有値がすべて非負であり、目的関数が凸関数となることが判明する。また、一般的には $z'(s_j) > 0$ であるため、 $\alpha > 1$ の場合でも、バランス・メカニズムとは異なり、安定した一意な分布が得られる立地コスト関数の存在が示唆される。

4 数値解析例

本章では、第 2 章で記述したバランス・メカニズムの繰り返し計算による均衡分布と、第 2, 3 章で述べた数理計画問題の解として与えられる均衡分布を、様々なパラメータ値の例の下で導出、比較して本モデルの妥当性を検証する。数理計画問題の求解に当たっての計算機環境は、CPU: Intel(R) Core Xeon(R) E5-2680 v4(2.40GHz)、実装メモリ 64.0GB であり、Numerical Optimizer V19¹³⁾ を用い、アルゴリズムは信頼領域内点法で求解した。

今回の数値解析では、 H において $I=49$, C において $J=49$ で、かつ H と C は重なっている、 7×7 の 49 のノードからなる平面都市モデル^{注 1)} を用いた。また居住者分布と施設容量は一樣とし、 $H_i = 1.00$, $S_j = 1.00$ とした。立地コストについては、 $z(s_j) = s_j/S_j$ とした。 s_j , t_{ij} の初期値としては、それぞれ一樣に N/J , N/J^2 を与えた。

バランス・メカニズムはパラメータ α , γ 値を変化させた場合の商業分布、バランス・メカニズムを満たす数理計画問題については、パラメータ α , γ 値と総商業数 N 値を変化させた場合の商業分布、立地コストと施設容量を考慮した数理計画問題はパラメータ α , γ , θ 値と総商業数 N 値を変化させた場合の商業分布を見る。なお、バランス・メカニズムにおける β 値は $\beta \times \sum_{i=1}^I H_i = N$ に対応していることに注意し、適切に β 値を与える。さらに、立地コストと施設容量を考慮した数理計画問題の θ 値については、 δ/κ が本質であることを考慮して決定した。したがって、Fig.5 の表記は θ ではなく、 δ/κ で表記していることに注意されたい。

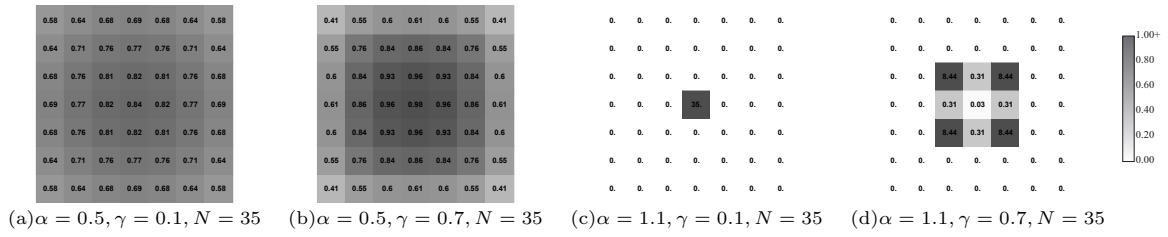


Fig.3 Repeating calculation of Balancing-Mechanism

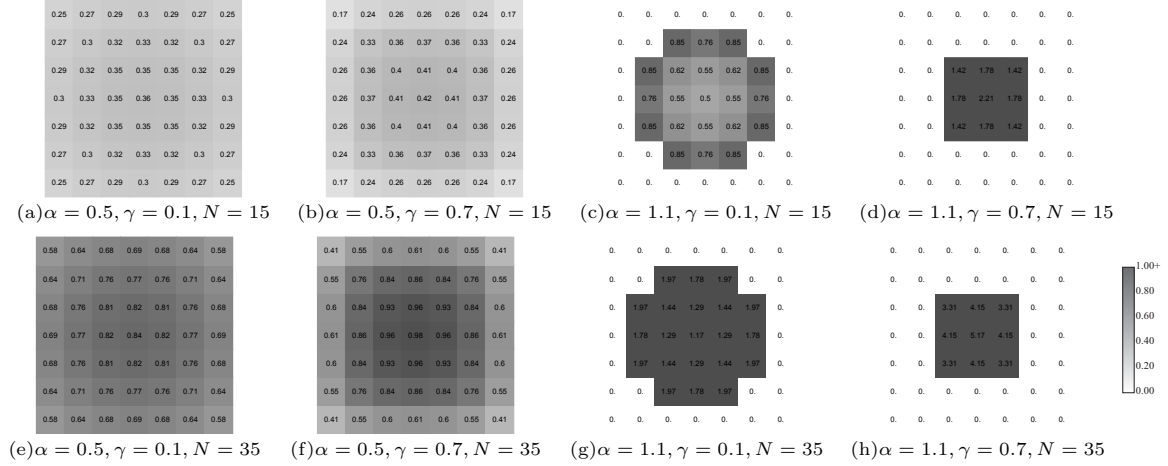


Fig.4 Programming problem which satisfies Balancing-Mechanism

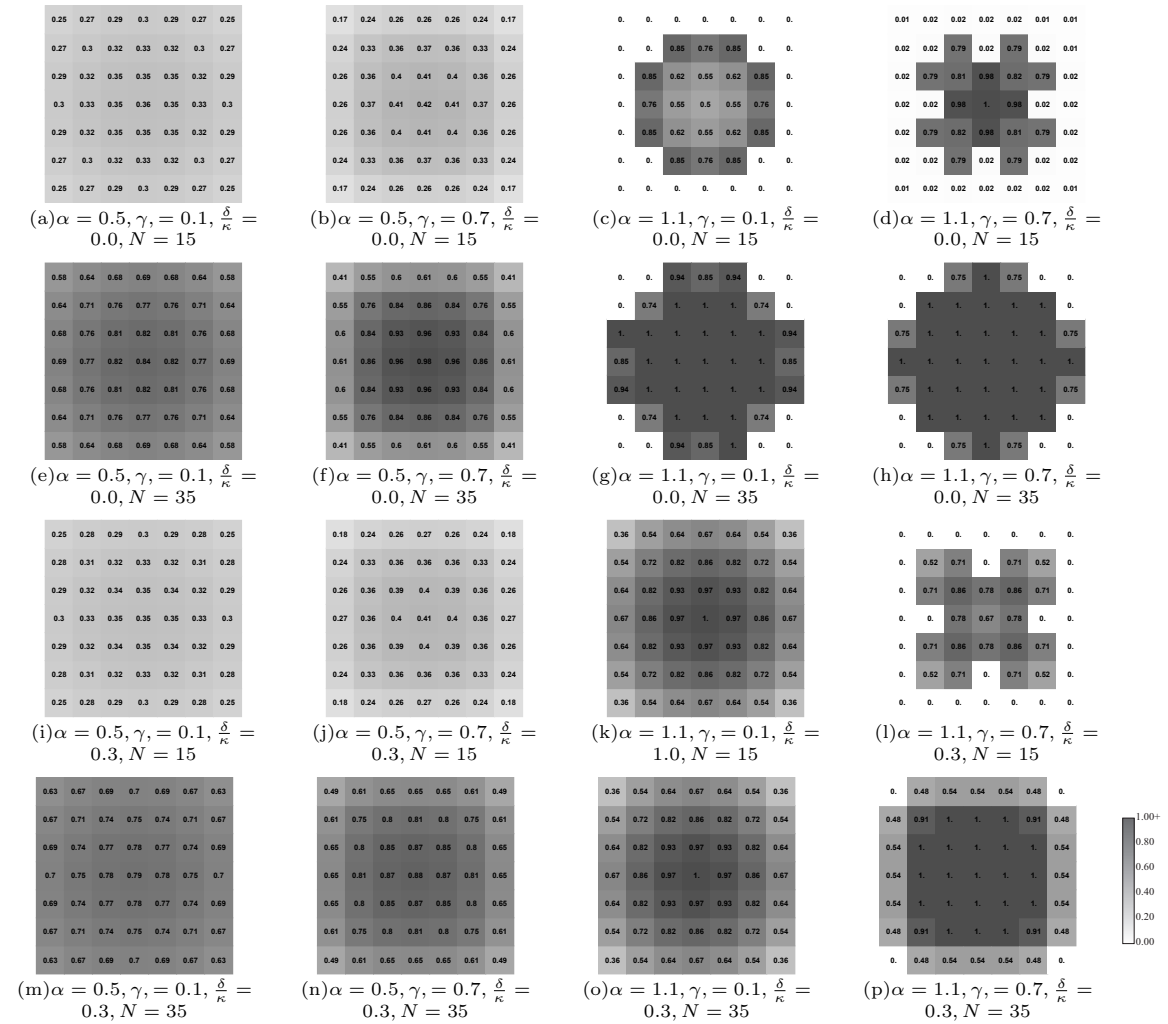


Fig.5 Programming problem considering location cost and facility capacity

4.1 バランス・メカニズムにおける繰り返し計算と数理最適化手法の比較

バランス・メカニズムについて繰り返し計算と数理最適化手法では、 α が 1 よりも小さい場合においては、同じ結果を見せていることが分かる (Fig.3(a)(b)), (Fig.4(e)(f)). これにより、本研究で用いたバランス・メカニズムを満たす数理計画問題の妥当性が示されたと言える。しかし、 α が 1 よりも大きくなると同じ結果にはなっていない (Fig.3(c)(d)), (Fig.4(g)(h)). これは、第 2 章で示した通り、 α が 1 よりも大きくなると、数理計画問題 (P1) の目的関数が非凸関数である可能性があり、その場合は局所均衡解が解として出てきているためと考えられる。事実、目的関数の値については、Fig.3(c) については-1786.35, Fig.4(g) は-1619.89, Fig.3(d) は-136.439, Fig.4(h) は-130.919 となっている。すなわち、一様な初期値において信頼領域内点法で出した解は最適解ではない。ただし、その解は均衡を満たしているため、繰り返し計算の結果以外にも均衡となる解の存在が示された。

4.2 立地コストと施設容量を考慮した数理計画問題の数値解析

立地コストと施設容量を考慮した数理計画問題では、立地コストがなく、施設容量も効いていない場合においては、バランス・メカニズムと同じ結果を示していることが分かる (Fig.4(a)(b)(e)(f)), (Fig.5(a)(b)(e)(f)). また、 α が 1 より大きく、 N 値が大きい場合においては、施設容量が効いて商業分布が広がっていることが分かる (Fig.5(g)(p)). そして立地コストが効いている場合にも商業分布が広がっているのが見て取れる (Fig.5(i)-(p)). これらにより、より実空間に近いモデルが提案できたと言える。ただし、前節と同じ様に、 α が 1 より大きい場合においては、数理計画問題 (P2) の目的関数が凸であることが保証されておらず、局所均衡解が出現していることに注意されたい。

5 まとめ

本研究では、市場均衡を考慮した商業分布に関する数学的議論を展開した。まず、バランス・メカニズムを満たす数理計画問題を示し、従来から知られていた α の値による解の性質について、数理計画問題の凸性という観点からの説明原理を加えた。さらに立地コストと施設容量という、商業集積を考慮する際には必須の概念を導入し、より商業分布の市場均衡に関する包括的なモデルを提案した。当該モデルも均衡条件を満たす数理計画問題によって表すことができることを示した上で、 α の値やその他のパラメータ、立地コストの関数の形によって解の一意性に関する議論を展開できることを示した。提案モデルは、パラメータの設定次第でバランス・メカニズムを包含するモデルとなっており、立地コストや施設容量を考慮した実空間への展開が期待できる。

本研究では、居住分布を変化させずに商業の分布を導出している。これは、居住地の選択が商業地の立地だけに左右されるとは考えにくく、むしろ就業地の立地なども大きく効いてくると考えられるためである。就業地などを含むモデルへと拡張させる際には、居住地の変動も考慮に入れる必要があると考えられ、実空間に適応するにあたって職・住・商を含んだ相互作用を持つモデルなど、本研究の都市モデルをより拡張することも魅力的な今後の課題である。

本研究では、都市モデルにおける総人口数や総商業数といった他

の都市間との流出入、さらに時間変化による商業分布の変化など、都市のシステムダイナミクスを考慮していない。本研究は、市場均衡における都市の最終状態が導出可能な点に意義があるが、均衡状態に至るまでのスパンや、変化の進捗具合などそのダイナミクス論への拡張なども今後の課題であると考えられる。

最後に、均衡解を導出するにあたり、 α の値や、立地コストの関数の形によっては、解の一意性が保証されないため、仮に複数の均衡点が存在した場合、実空間ではどちらの均衡状態に至るのかという点に関しては、本研究のモデルでは検討できていない。都市が動的に変化するものであると考えると、均衡状態がある閾値を越えると別の均衡状態に変化する可能性もあり、複数の均衡点を把握すること、またその閾値について考察することも興味深い課題である。

注

注 1) 計算機環境により、ノードの数を増やすと指数関数的に計算時間がかかってしまうこと、また、本稿ではモデルの完成度の高さを目指しており、少ないノード数でも考察には十分足るものであると考えたため、ノード数は 49 とした。

参考文献

- 1) Harris, B. and Wilson, A.G.: Equilibrium Values and Dynamics of Attractiveness Terms in Production-Constrained Spatial-Interaction Models, *Environment and Planning A*, Vol.10(4), pp 271-388, 1978
- 2) Honma, Y., Kurita, O.: The Dynamics of Urban Commercial Developments with Respect to Customer's Spatial Choice behavior - Effects of City Shapes and Road Network Patterns on the Balancing-Mechanism, *Journal of the City Planning Institute of Japan* Vol.39, No.3, pp.769-774, 2004 (in Japanese)
本間裕大, 栗田治: 顧客の店舗選択行動を考慮した商業発展のダイナミクス-都市の形状と交通軸パターンがバランス・メカニズムに与える影響-, 日本都市計画学会 都市計画論文集 Vol.40, No.3, 2005
- 3) Wardrop, J.G.: Some Theoretical Aspect of Road Traffic Research, *Proceedings of the Institute of Civil Engineering Part II*, pp.325-378, 1952
- 4) Nash, F.J.: Equilibrium Points in n-Person Games, *Proceedings of the national Academy of Sciences*, 36(1), pp.48-49
- 5) Nash, F.J.: Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, 54, pp.286-295, 1951
- 6) Beckmann, M., McGuire, C.B., Winsten, C.B.: *Studies in the Economics of Transportation*, Yale University Press, 1956
- 7) Jorgensen, N. o.: Some aspects of urban traffic assignment problem, master's thesis Institute of Transportation and Traffic Engineering, University of California, Berkeley, CA, 1963
- 8) Norbelt, O.: Equilibrium Commercial Activity and Travel Distributions: Incorporating Endogenous Prices and Travel Costs into the Harris-Wilson Framework, with Some Numerical Experiments, *Transportation Research Part B: Methodological* Vol.23(3), pp.225-242, 1989
- 9) Munemasa, Y., Honma, Y., Imai, K.: Equilibrium Arrangement of Housing and Jobs with Constrained Capacity Considering Location and Travel Costs, *Journal of Architecture and Planning, Architectural Institute of Japan*, Vol.81, No.720, pp.377-385, 2016 (in Japanese)
宗政由桐, 本間裕大, 今井公太郎: 移動・立地コストを考慮した容量制約付き職住分布の均衡配置, 日本建築学会計画系論文集 Vol.81, No.720, pp.377-385, 2016.2
- 10) Rijk, F.A.A., Vorst, A.C.F.: Equilibrium points in an urban retail model and their connection with dynamical Systems, *Regional Science and Urban Economics*, 13, pp.383-399, (1983)
- 11) Murota, K., Sugihara, M.: *Basic Mathematics Linear Algebra I Maruzen*, 2015 (in Japanese)
室田一雄, 杉原正顕: 基礎系 数学 線形代数 I, 丸善出版, 2015
- 12) Konno, H., Yamashita, H.: *Nonlinear Programming*, Japanese Union of Scientists and Engineers, 1978 (in Japanese)
今野浩, 山下浩: 非線形計画法, 日科技連, 1978
- 13) NTT DATA Mathematical Systems Inc., *Numerical Optimizer V19*, (<https://www.msi.co.jp/nuopt/products/index.html>), 2017/7/7