タンクモデルの制御とシミュレーション

新潟国際情報大学

情報文化学部　情報システム学科

田中　理貴

タンクモデルとは

- 河川の流出量の予測などに使われる雨量と水位、流出量の関係を表すモデルである。
- 気象庁が土砂災害警戒情報や洪水警報などの判断基準として使っている。
- 通常の液体の貯蔵槽の解析や液面制御系の解析なども表現できる。

研究概要

- タンクモデルの理解を深めるため、液面制御系を使ってタンクのフィードバック制御シミュレーションを行う。液面をある設定値に一定に保つような制御を行う。

- 雨量から河川の流量を求めるため、モデルを作成し実際に過去の水害のデータを用いて、シミュレーションを行う。

タンクモデル流出流量

水のような物体がタンクに入れられていた場合、底のバルブから出る流れの流速はトリチェリの定理から、次式となる。

$$v=\sqrt{2gh}$$

(液面の高さの差をh、重力の加速度をgとする)

流出に摩擦がある場合は平方根を無視することができる。
よって、流速はタンクの水位に比例する。

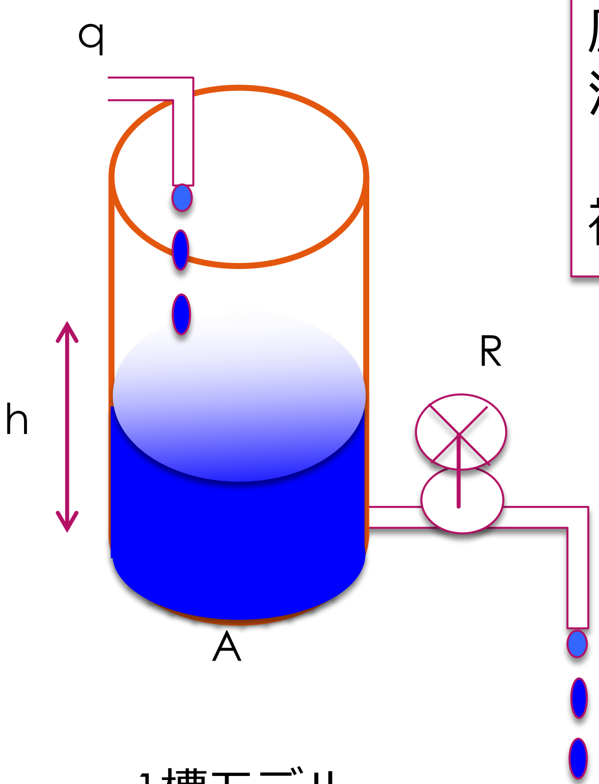
また、流出流量はバルブの抵抗（R）と流速（ｖ）に比例するので、

$$\text{流出流量} = \frac{1}{R}v \text{となる}$$

流速はｈに比例するので、

$$\text{流出流量は}\frac{1}{R}h\text{で表される。}$$

タンクの液面制御系(1次遅れ系)



1槽モデル

底面積：A（㎠）/液面レベル：h（cm）/バルブの抵抗:R
流出流量：h/R（㎤/s）/流入流量：q（㎤/s）

被制御変数：h(t) / 操作変数:q(t)

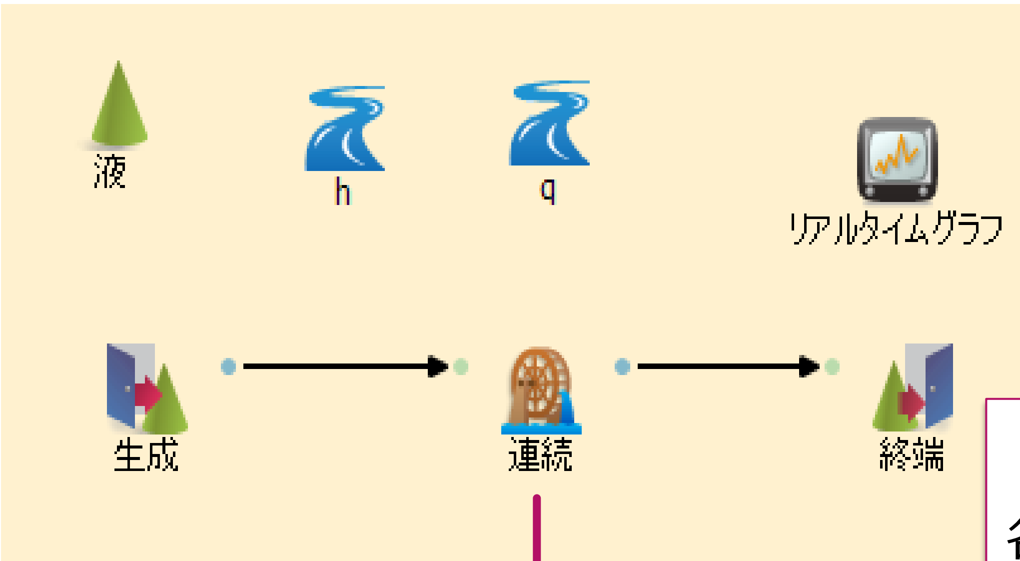
- 物質収支 (タンク内液量変化) = (流入流量)-(流出流量) より１槽モデルにおける***h*** と***q*** の関係式

$$\frac{dh}{dt}=(\frac{1}{A})q-(\frac{1}{AR})h$$

この形式のモデルを１次遅れ系という

シミュレーションの設定

タンクの1槽モデルをシミュレーションソフトで設定する



ここに式を入力する

各パラメータ

底面積:A=50（㎠）　/バルブの抵抗:R=1

比例ゲイン:K=2　　　/設定値:s=30(cm)

積分時間: Ti=50 / 微分時間:Td=15

流入流量: q =Ke+ q s=2*(30-20)+20

=40（㎤/s）

(qs,h(0))=(20,20)

P制御(比例制御)

新たな液面の設定値（目標値）をsとする

被制御変数hと設定値sとの差をeとする

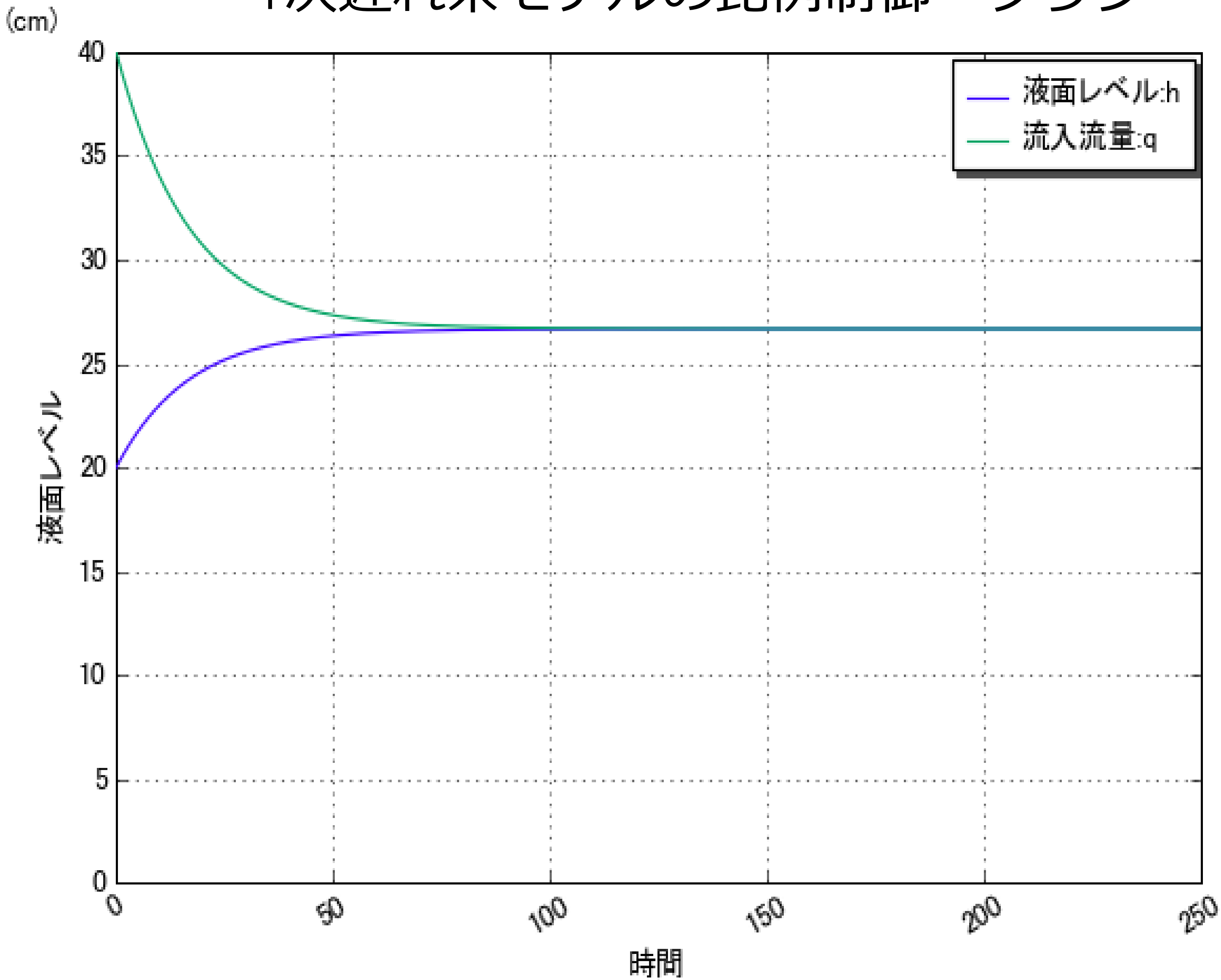
比例制御では操作変数qを偏差eに比例させて操作する

$q = Ke + q_s \xrightarrow[\text{微分}]{} \dfrac{dq}{dt} = -K\dfrac{dh}{dt}$ 偏差:e=s-h （K：比例ゲイン）

$$(1)\ \frac{dh}{dt} = \left(\frac{1}{A}\right)q - \left(\frac{1}{AR}\right)h \quad (\text{液面レベル}h\text{の変化量})$$

$$(2)\ \frac{dq}{dt} = -K\frac{dh}{dt} = -K\left(\left(\frac{1}{A}\right)q - \left(\frac{1}{AR}\right)h\right) \quad (\text{流入量の変化量})$$

1次遅れ系モデルの比例制御　グラフ



オフセットが発生した

オフセットをなくす必要がある

設定値である30(cm)に近づいているが、オフセットが発生した。
（定常状態に達したときに、偏差が0にならないで一定の値に落ち着いてしまう現象）

PI制御(比例・積分制御)

- 偏差e の積分値を計算し、これが0になるまで制御変数を変える

$$q = K(s-h) + \boxed{\frac{K}{T_I}\int_o^t (s-h)dt} + qs$$

積分制御

TI:積分時間

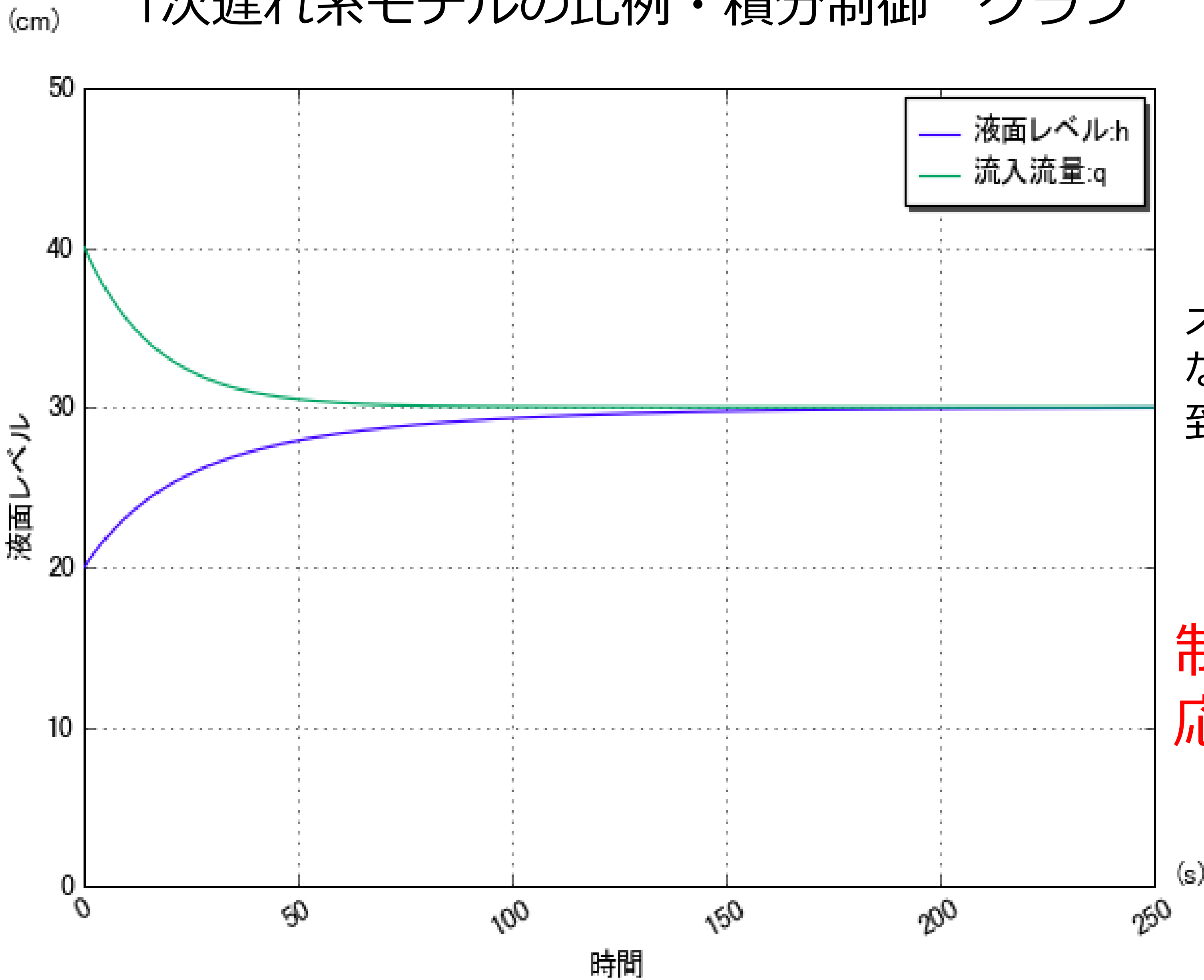
微分

$$\frac{dq}{dt} = -K\frac{dh}{dt} + \frac{K}{T_I}(s-h)dt$$

$$(1)\ \frac{dh}{dt} = \left(\frac{1}{A}\right)q - \left(\frac{1}{AR}\right)h$$

$$(2)\ \frac{dq}{dt} = -\mathrm{K}\left\{\left(\frac{1}{A}\right)q - \left(\frac{1}{AR}\right)h\right\} + \frac{K}{T_I}(s-h)$$

1次遅れ系モデルの比例・積分制御　グラフ

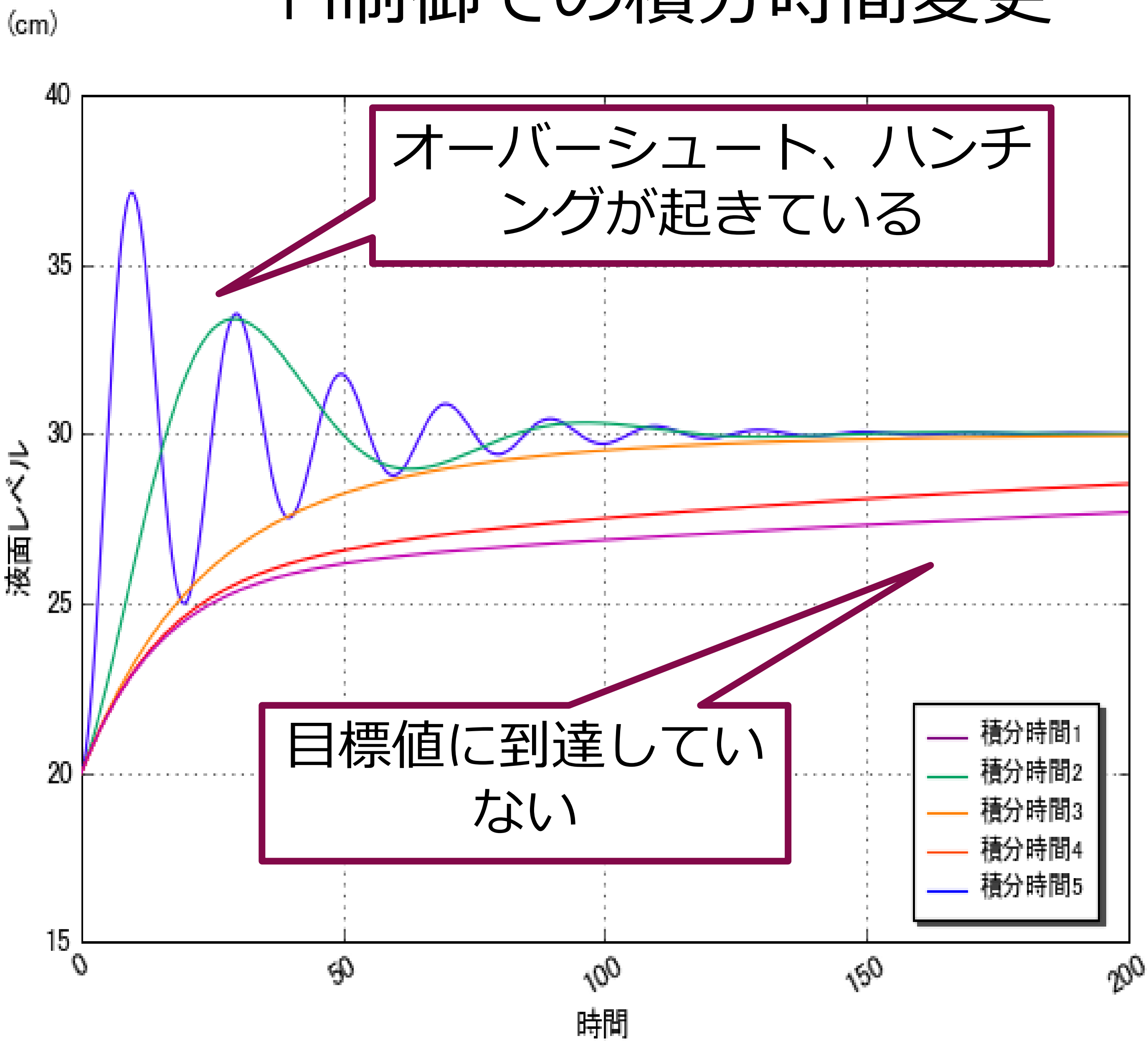


オフセットが
なくなり、目標値へ
到達した。

制御では
応答速度も大事

次は、制御の応答速度をもっと早くしたい

PI制御での積分時間変更



積分時間を以下のように変更してシミュレーションを行った。

積分時間1:　0.5
積分時間2:　5
積分時間3:　50
積分時間4:　150
積分時間5:　250

積分動作は大きすぎも、小さすぎも適していない。

PID制御(比例・積分・微分制御)

- 偏差の変化率に比例した制御を行う

微分制御

$$q = K(s - h) + \frac{K}{T_I}\int_o^t (s - h)dt + \boxed{KT_D\frac{d(s - h)}{dt}} + qs$$

TD:微分時間

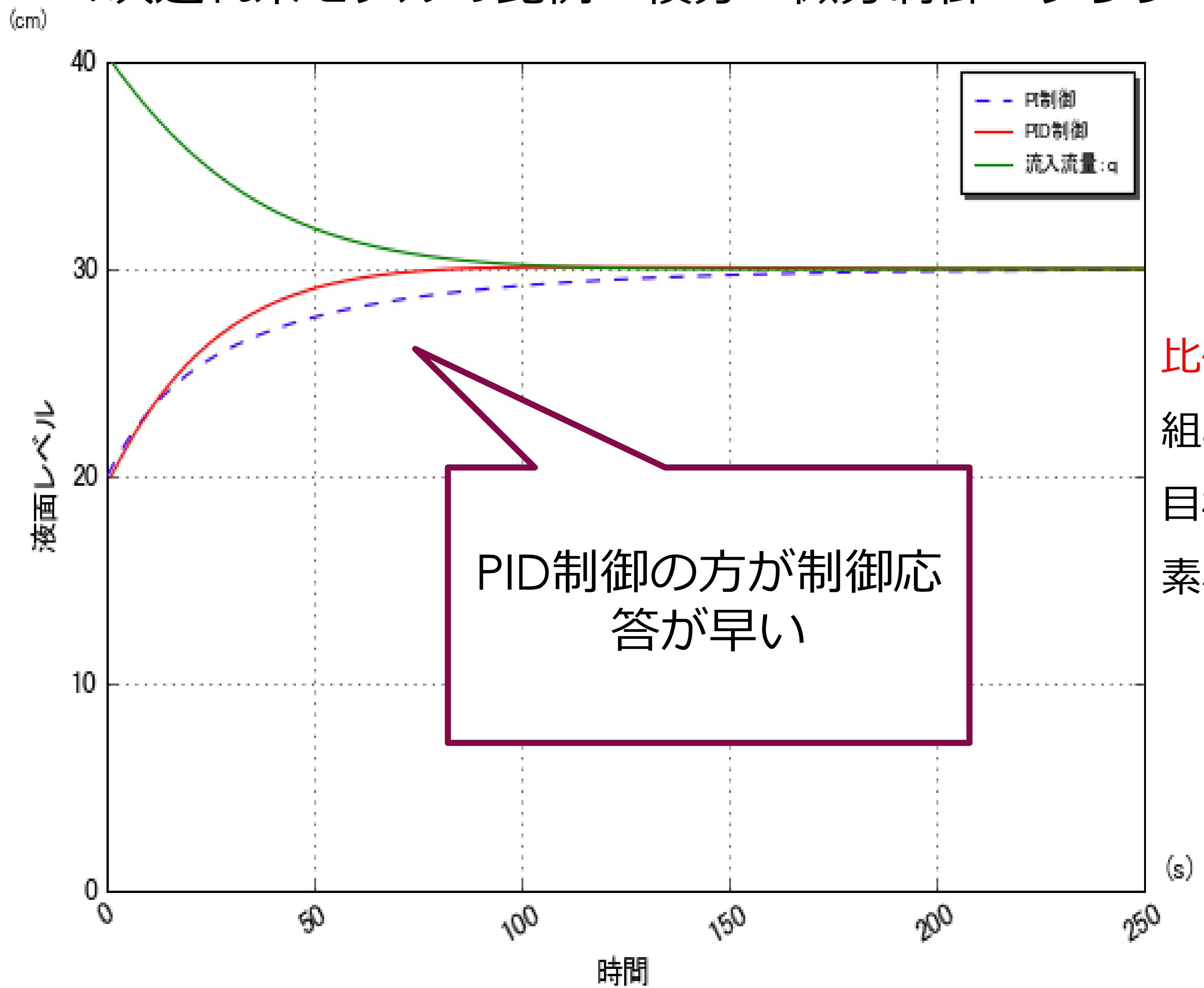
微分

$$\frac{dq}{dt} = -K\frac{dh}{dt} + \frac{K}{T_I}(s - h) - KT_D\frac{d^2h}{dt^2}$$

$$(1)\frac{dh}{dt} = (\frac{1}{A})q - (\frac{1}{AR})h$$

$$(2)\frac{dq}{dt} = -K\left\{(\frac{1}{A})q - (\frac{1}{AR}h)\right\} + \frac{K}{T_i}(s-h) - KT_d(-\frac{1}{AR})\left\{(\frac{1}{A})q - (\frac{1}{AR})h\right\}$$

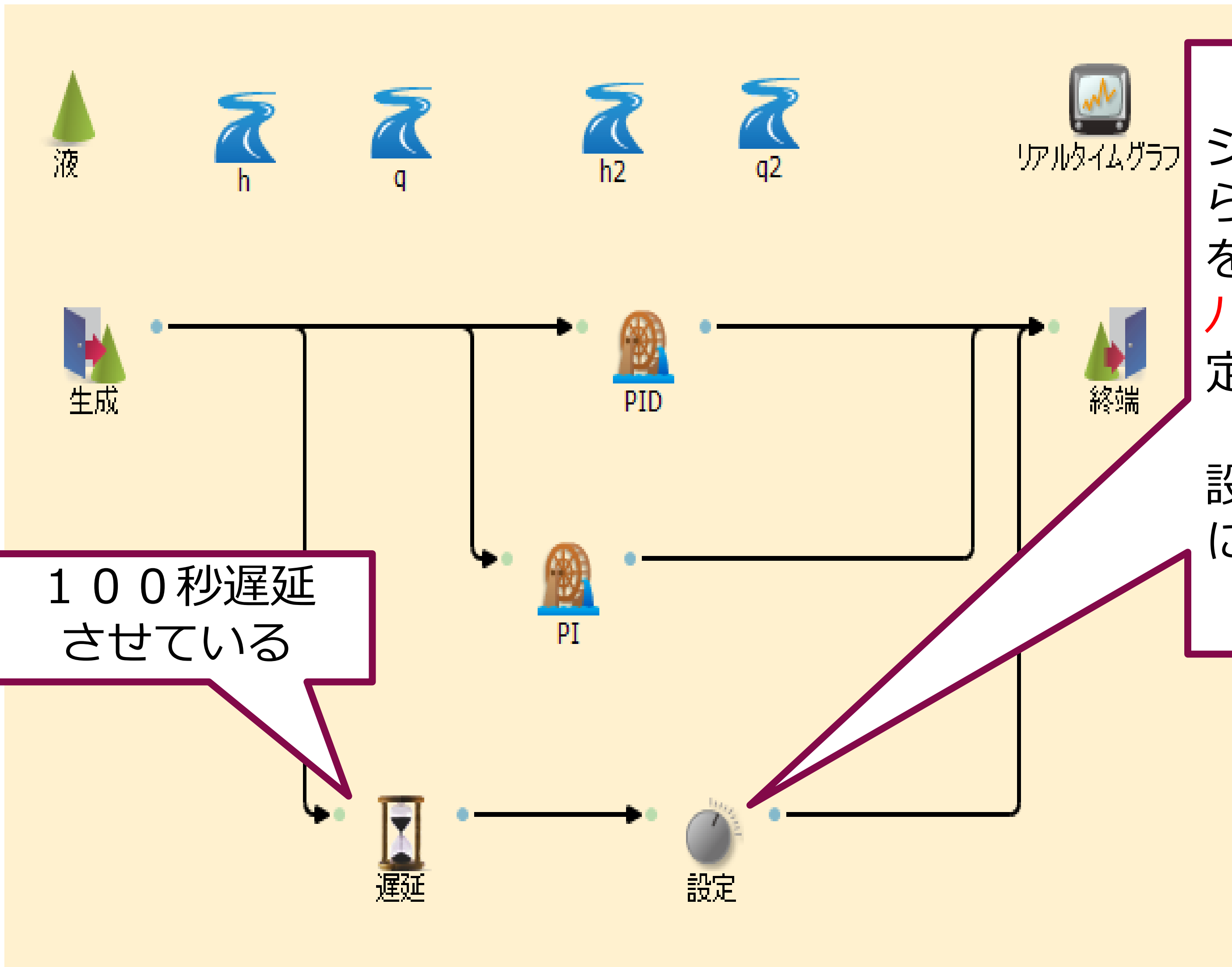
1次遅れ系モデルの比例・積分・微分制御　グラフ



比例・積分・微分を組み合わせると、目標値への追従を素早く行える。

外乱抑制

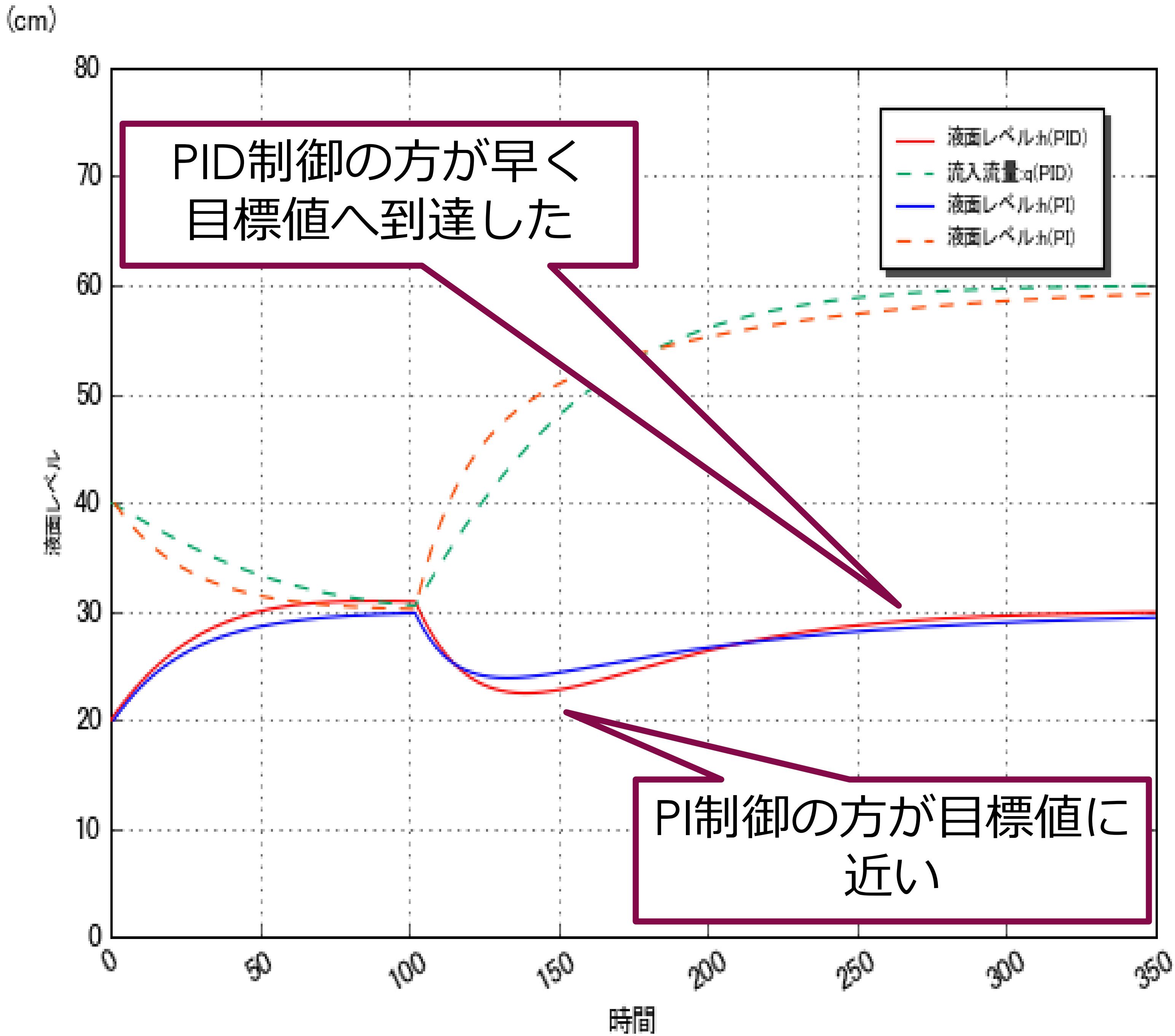
フィードバック制御の特徴には、目標値への追従の他に外乱の抑制がある。



１００秒遅延させている

シミュレーション実行から１００秒後に、流出量を増やすために外部からバルブを緩めた場合を想定した。

設定で抵抗:Rを１から0.5に変更した。

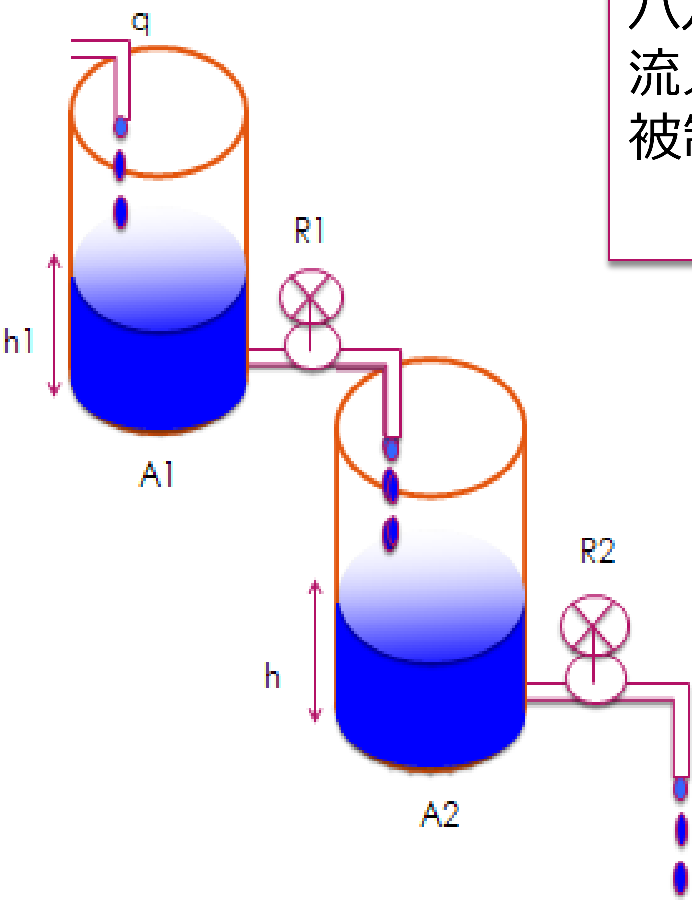


変化後は、PI制御の方が目標値に近かったが、

最終的にPID制御が早く目標値へ近づいた。

タンクの液面制御系(2次遅れ系)

底面積：A1,A2（㎠）/ 液面レベル：h1,h（㎝）
バルブの抵抗:R1,R2 / 流出流量：h/R（㎤/s）
流入流量：q（㎤/s）
被制御変数：h(t) / 操作変数:q(t)



2槽モデル

- (タンク内液量変化) = (流入流量)-(流出流量)

$$\frac{dh_1}{dt} = \left(\frac{1}{A_1}\right)q - \left(\frac{1}{A_1R_1}\right)h_1$$

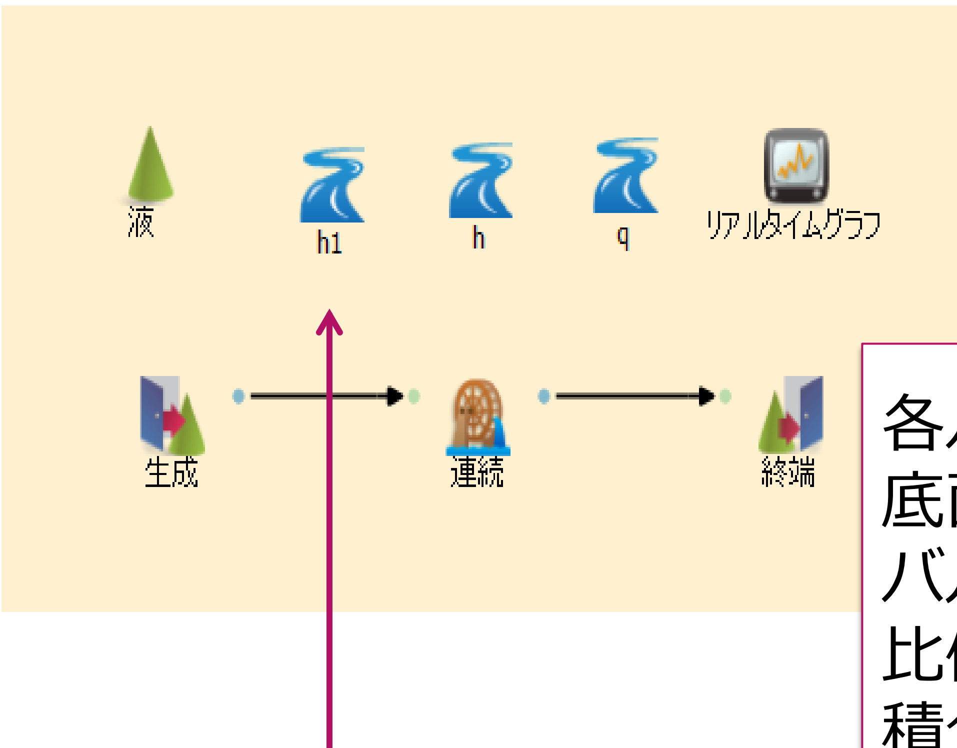
$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{1}{A_2R_1}\right)h_1 - \left(\frac{1}{A_2R_2}\right)h$$

h_1を消去するとhに関する2階の微分方程式になる。

この形式のモデルを2次遅れ系という

シミュレーションの設定

タンクの1槽モデルをシミュレーションソフトで設定する



2次遅れ系では連続変数が1つ増える

各パラメータ

底面積:A1,A2=50(㎠) /

バルブの抵抗:R1,R2=1/

比例ゲイン:K=2 /設定値:s=30(cm)

積分時間: Ti=100 / 微分時間:Td=20

流入流量: q =Ke+ q s=2*(30-20)+20

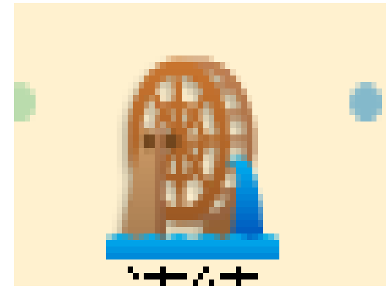
=40（㎤/s）

(qs,h(0))=(20,20)

PID制御(比例・積分・微分制御)

- 1次遅れ系モデルでのPID制御より

$$\frac{dq}{dt} = -\mathrm{K}\frac{dh}{dt} + \frac{K}{T_I}(s-h) - \mathrm{K}T_D\frac{d^2h}{dt^2}$$



hを代入して

$$(1)\frac{dq}{dt} = -\mathrm{K}\frac{dh}{dt} + \frac{K}{T_I}(s-h)$$

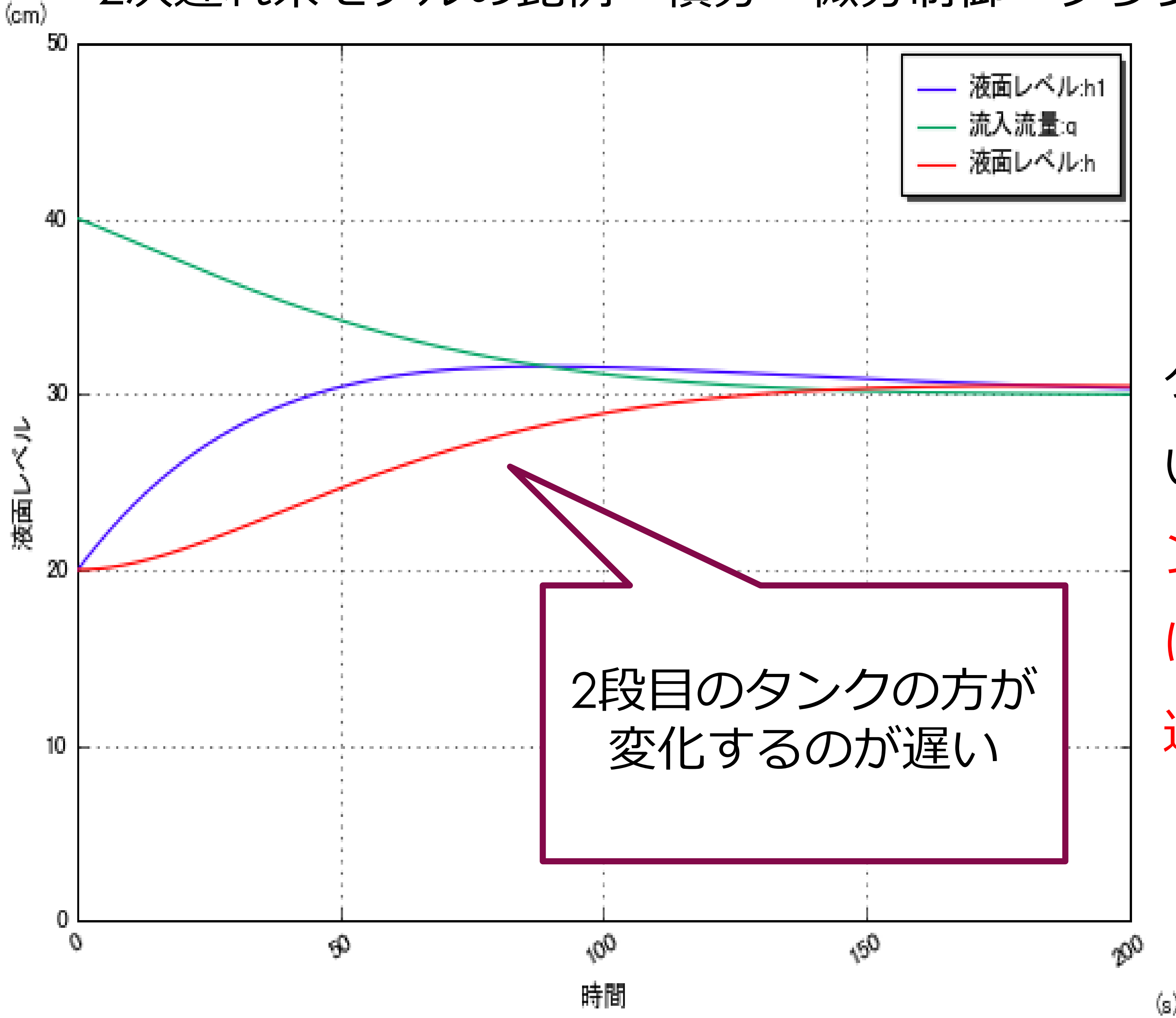
$$-\mathrm{K}T_D\left[\left(\frac{1}{A_2R_1}\right)\left\{\left(\frac{1}{A_1}\right)\mathrm{q} - \left(\frac{1}{A_1R_1}\right)h_1\right\} - \left(\frac{1}{A_2R_2}\right)\left\{\left(\frac{1}{A_2R_1}\right)h_1 - \left(\frac{1}{A_2R_2}\right)h\right\}\right]$$

$$(2)\frac{dh_1}{dt} = \left(\frac{1}{A_1}\right)q - \left(\frac{1}{A_1R_1}\right)h_1$$

$$(3)\frac{dh}{dt} = \left(\frac{1}{A_2R_1}\right)h_1 - \left(\frac{1}{A_2R_2}\right)h$$

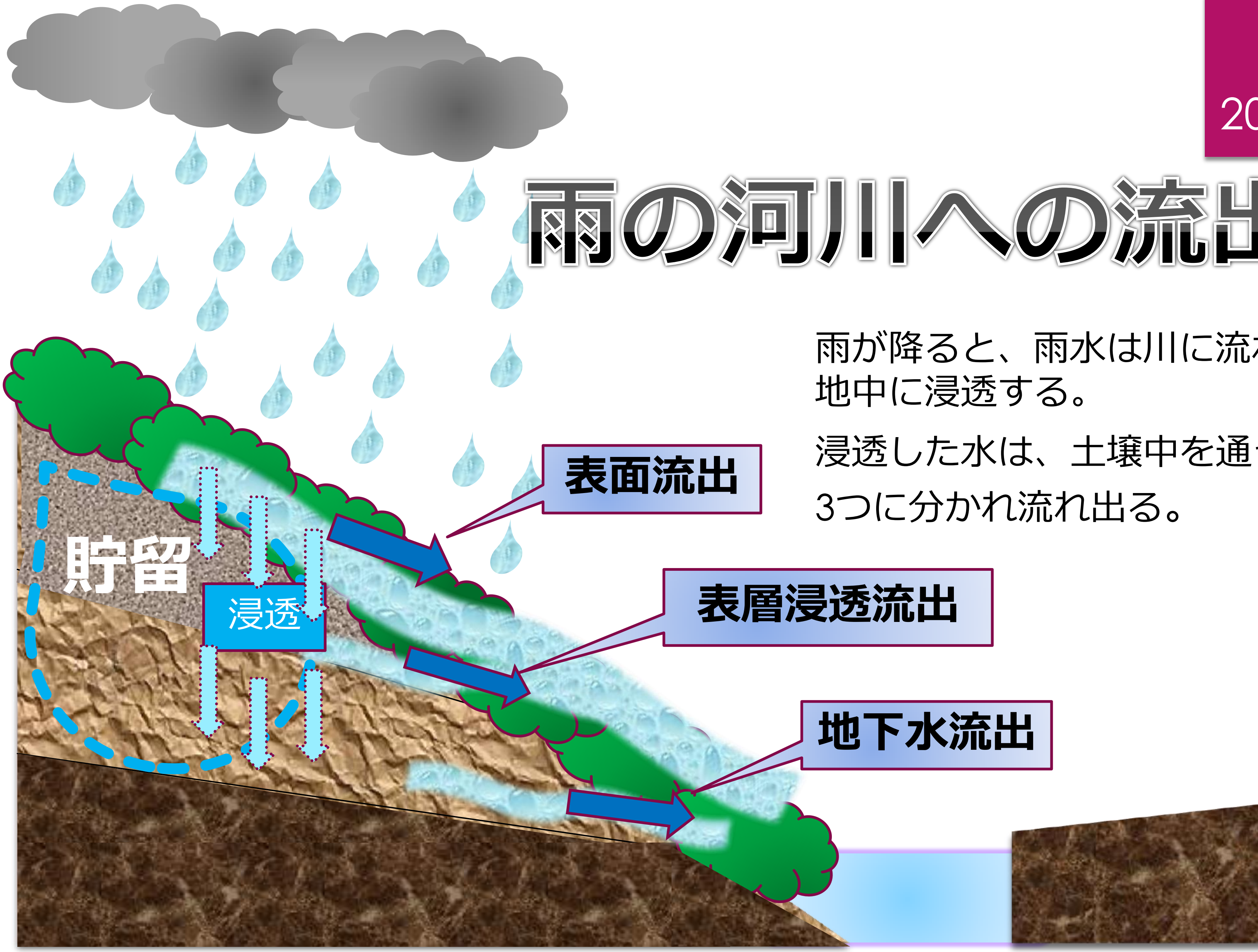
この３つの式をシミュレーションに入力する！

2次遅れ系モデルの比例・積分・微分制御　グラフ



タンクを増やしていくと、下層のタンクになればなるほど変化するのが遅くなる。

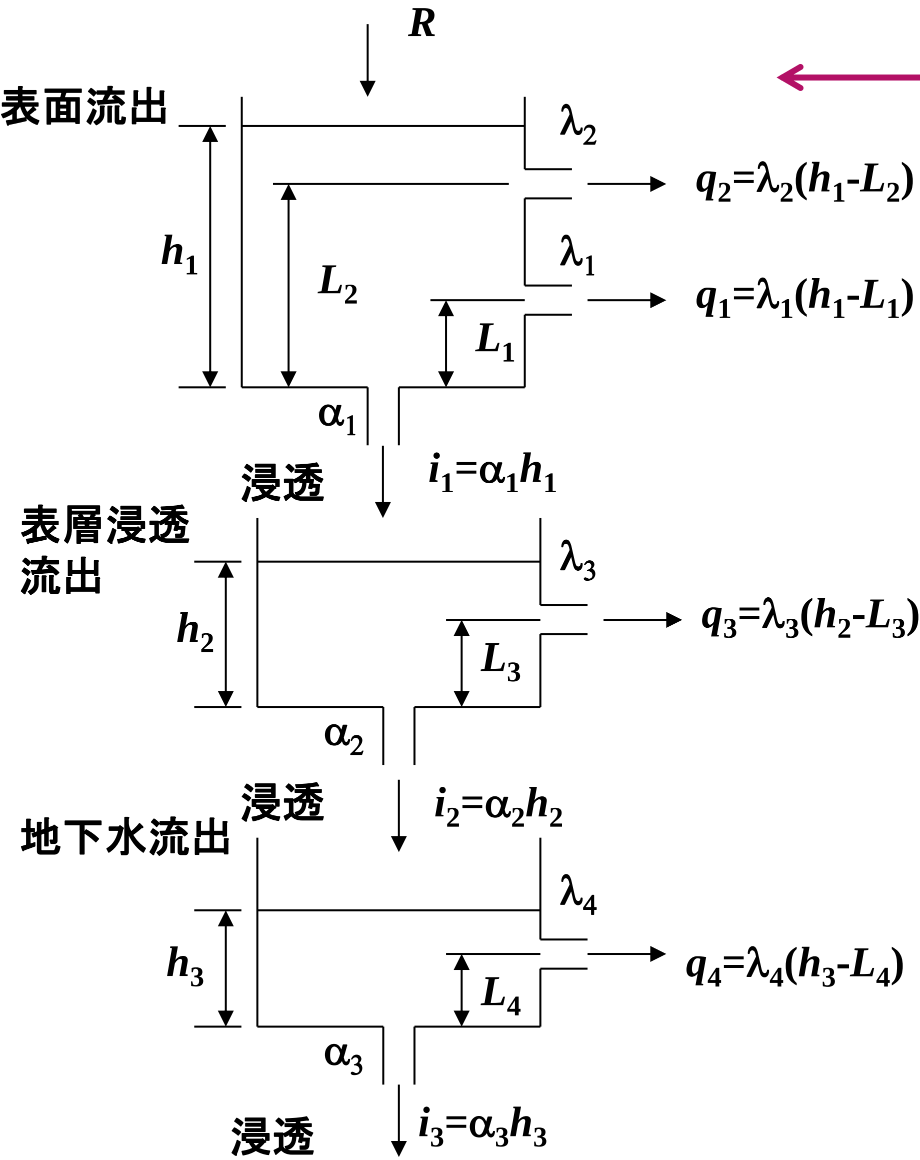
雨の河川への流出



雨が降ると、雨水は川に流れたり、地中に浸透する。

浸透した水は、土壌中を通って3つに分かれ流れ出る。

3段タンクモデルの例



先ほどのイメージ図をモデル化する

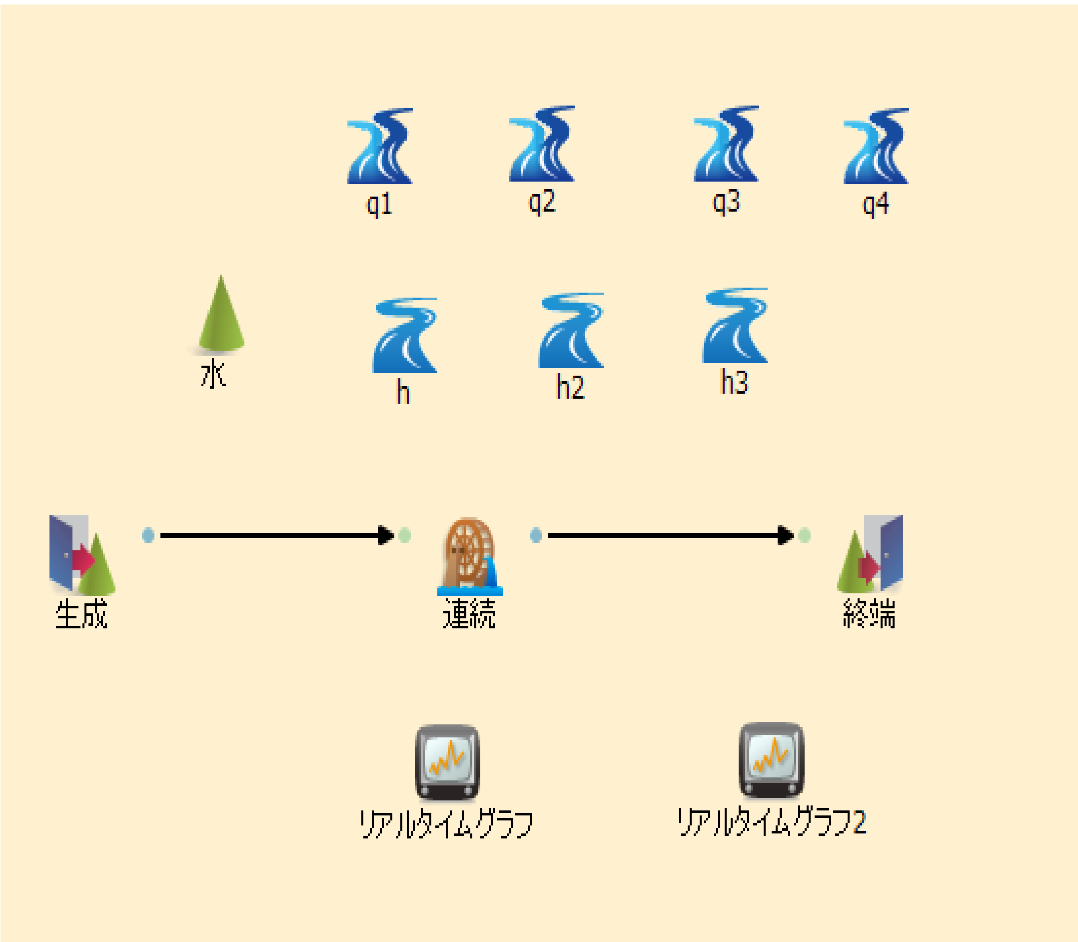
各パラメータ
流入流量(雨量):R
各タンクの貯留高:h1,h2,h3
各タンクの浸透流出孔の浸透係数:a1,a2,a3
各タンクの側面孔からの流出係数:λ1, λ2, λ3
各タンクの浸透流出孔の流出量:i1,i2,i3
各タンクの側面孔からの流出量:q1,q2,q3,q4
各流出孔の高さ:L1,L2,L3

流出量の和が河川への流量になる

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$$

シミュレーションの設定

3段タンクモデルをシミュレーションソフトで設定する



各パラメータ

	1段目	2段目	3段目
流出孔の高さ(mm)	L1=15 L2=60	L3=15	L4=15
流出係数(1/hr)	λ1=0.1 λ2=0.15	λ3＝0.05	λ4＝0.01
浸透係数(1/hr)	a1=0.12	a2=0.05	a3=0.01

シミュレーションの設定

各タンクの貯留高の変化量の式は流入流量と流出流量の関係から以下になる

第1タンク $\frac{dh_1}{dt} = \mathrm{R} - i_1 - q_1 - q_2$

第2タンク $\frac{dh_2}{dt} = i_1 - i_2 - q_3$

第3タンク $\frac{dh_3}{dt} = i_2 - i_3 - q_4$

流入流量(雨量):R

各タンクの
浸透流出孔の流出量:i1,i2,i3

各タンクの
側面孔からの流出量:q1,q2,q3,q4

シミュレーションの設定

- 1時間ごとの雨量でシミュレーションを行う。
（雨量・流量は気象庁のサイトから調べる）
- シミュレーション時間を1時間とする。
- 次の時間の各タンクの貯留高はシミュレーションの結果を用いて、設定する。（初期値は仮の値にする）
- 補助変数を用いることにより、各タンクの貯留高から流出孔を引き、各タンクの流出係数を掛けることで、各流出孔からの流出量が分かる。

流出流量：$q_i = \lambda_i (h_i - L_i)$

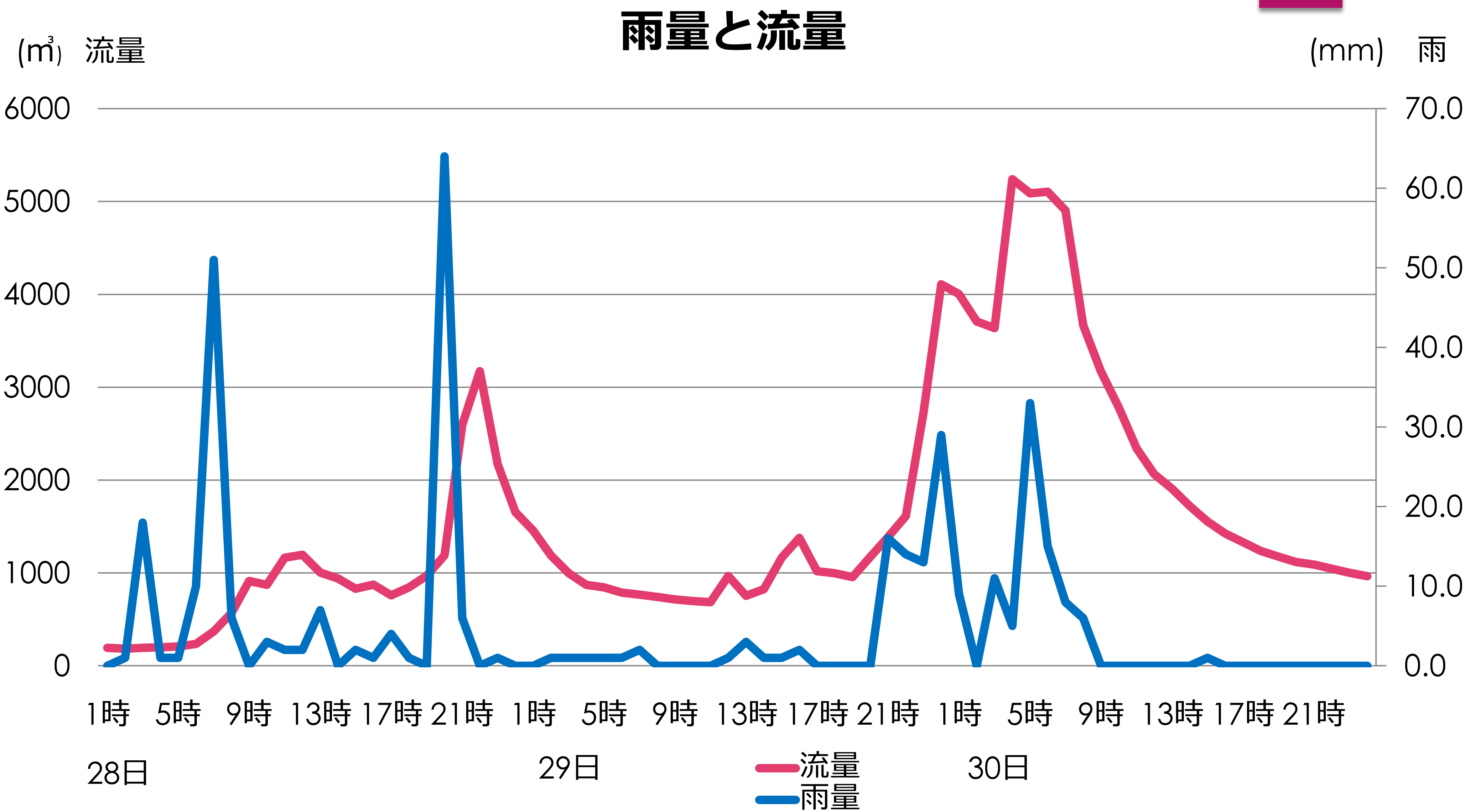
モデル
平成23年7月新潟・福島豪雨

- 2011年7月26日～30日にかけて、新潟県中越地方、下越地方、福島県会津地方の3地域で発生した集中豪雨
- 新潟県では河川の提防が決壊するなど大きな洪水被害をもたらした
- 新潟県魚沼市堀之内観測所で観測されたデータを使う
- データは信濃川水系の魚野川を用いる

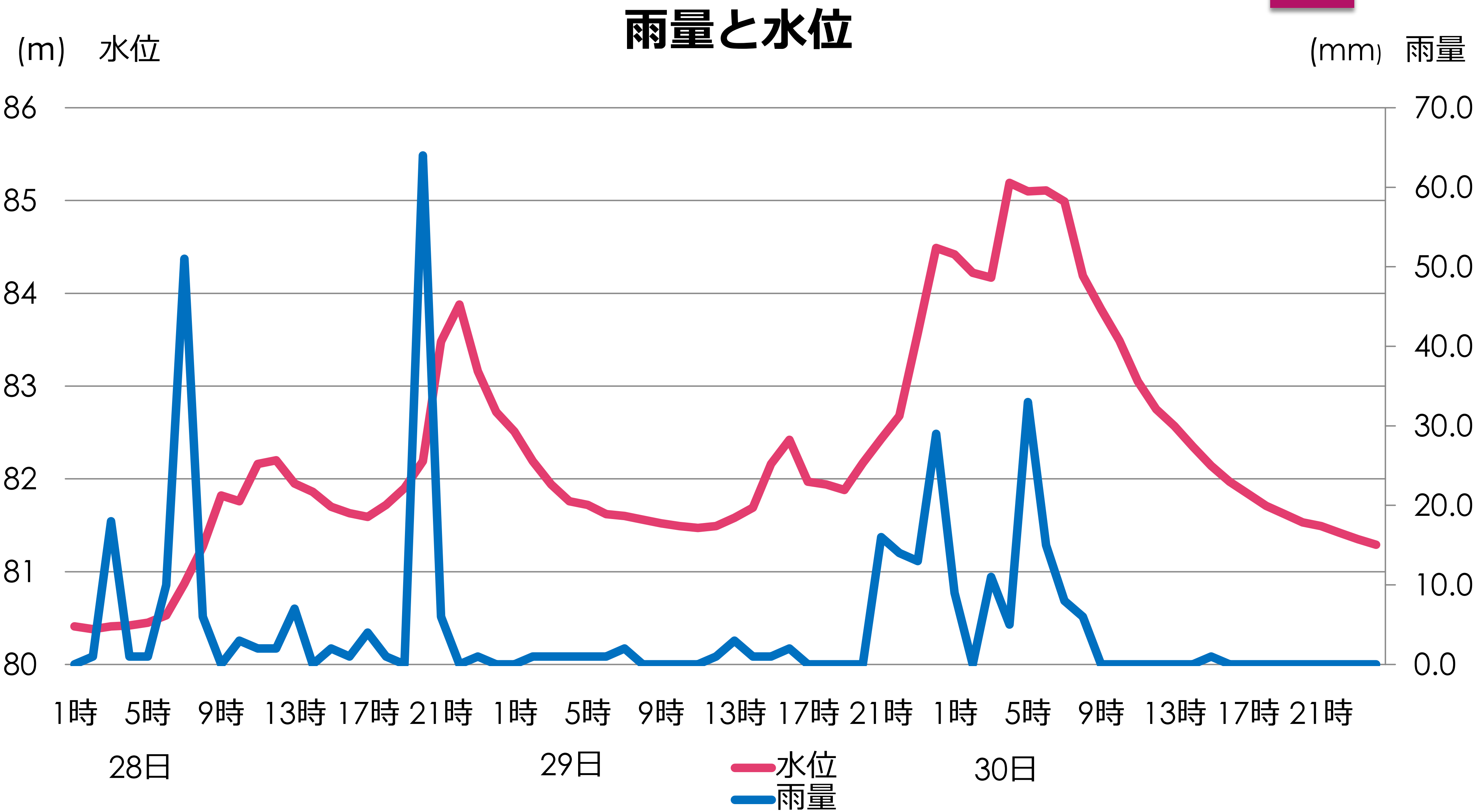
魚野川
流域面積：1503.6（㎢）
流路延長68.4（㎞）

信濃川中部における最大の支川

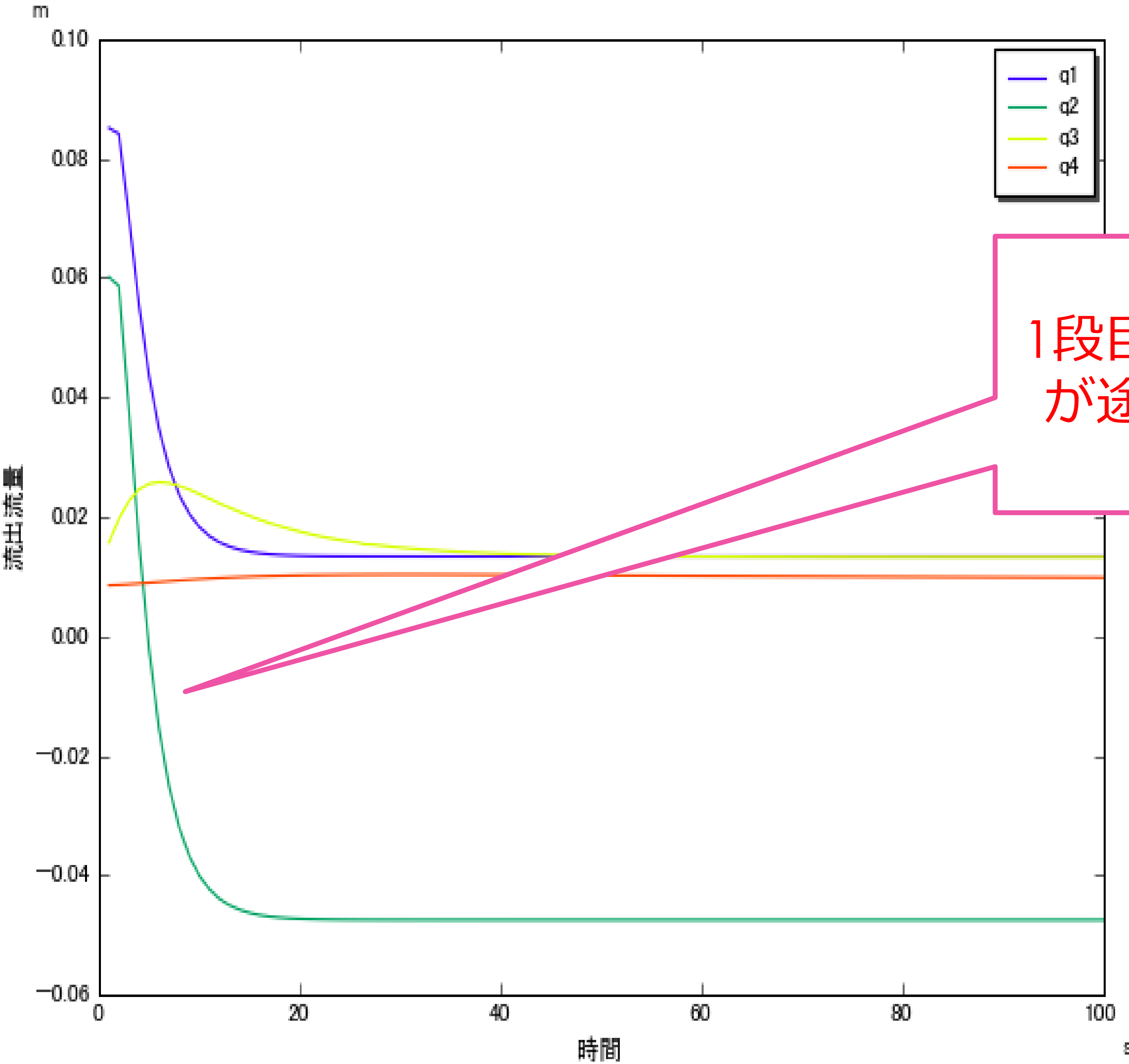
平成23年7月新潟・福島豪雨　データ（雨量と流量）



平成23年7月新潟・福島豪雨　データ（雨量と水位）



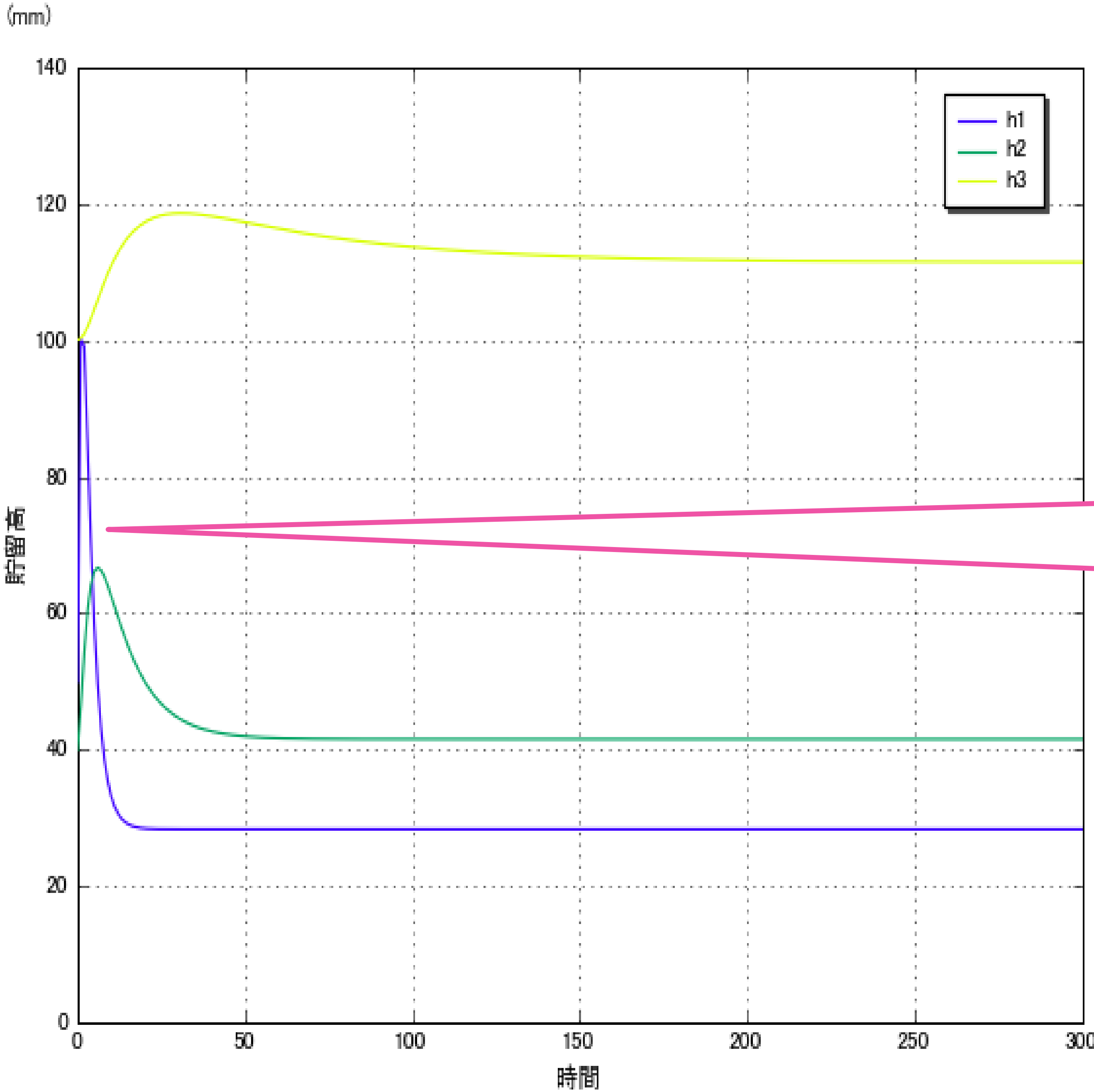
平成23年7月新潟・福島豪雨　流出量　シミュレーション



1段目のタンクの流出：q2
が途中で逆流をしている

実際はあり得ないこと
なのでモデルを設定し
直す必要がある。

平成23年7月新潟・福島豪雨　貯留高　シミュレーション



貯留高がL2を下回ると、
流出：q2が逆流し始めている。

本来は緩やかに減衰する貯留高の減りが急である。

指数関数減衰がうまくいってない。

今後の課題

- 各タンクの貯留高の初期値が正確にはわからない。

また、気象庁が発表している雨量は小数点以下切り捨てのため、
正確な値ではないので、正確なパラメータを決めるのが難しい

- 1段目のタンクの流出孔ｑ２から逆流している。

q2>0以上の設定にする必要がある

- 指数関数減衰がうまくいってない

本来は第1層では２,３日、第2層では数日から1週間、第3層では数か月から１年かかるが、シミュレーションでは、すぐに減衰している。

参考文献

- 微分方程式によるプロセスの動特性と制御

http://chemeng.in.coocan.jp/cemath/cemath14.html

- 菅原正巳 (1985)「タンク・モデル　河川の流量 を雨量から算出する一つのモデルについて」
- 制御システム

https://www.sist.ac.jp/~suganuma/kougi/other_lecture/SE/control/control.htm

- PID制御 mathworks

https://jp.mathworks.com/discovery/pid-control.html

- ラプラス変換と制御

http://chemeng.in.coocan.jp/cemath/cemath12.html

- 中野道雄　美多勉(2013)「制御基礎理論」
- 気象庁・土壌雨量指数
  http://www.jma.go.jp/jma/kishou/know/bosai/dojoshisu.html