国際分散投資における下方リスク尺度を用いた最適ポートフォリオの研究

東京理科大学　工学部
末安俊也

発表構成

- 研究背景
- 研究目的
- モデルの定式化
- データ概要
- 分析
- 今後の課題

Appendix

為替相場リスクの影響

- 直近10年間で外貨建て資産は6兆円から30兆円に増えているが...
(Appendix-1)

表1 3通貨の年次収益率について為替リスクの影響の例

	アメリカ(ドル)		イギリス(ポンド)		スイス(フラン)	
	S&P500	円換算	FTSE100	円換算	Swiss Market	円換算
2000	4.48%	0.68%	1.07%	4.89%	-8.78%	-8.26%
2001	11.98%	7.63%	12.00%	8.88%	14.35%	10.22%
2002	16.83%	22.34%	17.94%	16.80%	19.79%	15.75%
2003	-14.28%	-8.78%	-12.38%	-11.08%	-11.18%	-10.31%
2004	-3.71%	-2.36%	-5.12%	-6.83%	0.75%	-2.30%
2005	-3.78%	-11.32%	-7.19%	-10.88%	-14.36%	-16.41%
平均	1.92%	1.37%	1.05%	0.30%	0.10%	-1.88%

注 Yahoo! Financeに基づく

- 表1で,3つの通貨について円換算を行うと,いずれの通貨についても,平均年次収益率が悪くなってしまっている.

日本の投資家にとって
為替リスクをヘッジする必要性があると考えられる.

一般的な為替リスクヘッジ手法

- 通貨先渡し
  - 将来の特定された時点において特定の価格で特定量の通貨を購入もしくは売却する義務契約.[7]
  - Ex1)満期日に指定した交換レートで外国通貨を売却し,円を得ることでリスクヘッジを行う.
  - Ex2)満期日に指定した交換レートで外国通貨を購入し,市場で外貨を売却して円を得ることでリスクヘッジを行う.

先行研究[1]

- 平均・分散モデルを用いた国際分散投資に関する研究である.
  - 平均・分散モデルに「通貨先渡し」を組み込んだ為替リスクヘッジモデルを作成・評価している.
  - 平均・分散モデル：2パラメータアプローチの１つで,リターン尺度に期待収益率,リスク尺度に分散をとったモデル

投資家にとってプラスの方向のバラつきもリスクとしている → 下方リスク尺度の導入

(Appendix-2)

研究目的

- 「通貨先渡し」を組み込んだ為替リスクヘッジモデルのパフォーマンスとリスクを検討する.
  - 平均・下方リスクモデルを用いてポートフォリオを構築する.
  - 分散モデルと比較して下方リスクモデルを用いる利点
    - 投資家にとって,リスクの概念がわかりやすい
    - 分散モデルが収益率の正規性を仮定するのに対し,下方リスクモデルは正規性の仮定を必要としない.(⇒オプションを組み込むなどモデルの利用の幅が利く)

下方リスクの定義と主な種類

- 下方リスク尺度 ダウンサイドリスク尺度
  ある値を下回る大きさや確率をリスクとする尺度[5]

- 主な下方リスク尺度
  - 下方半分散
  - 下方絶対偏差
  - 不達成確率
  - Value at Risk (VaR)
    - Conditional (条件付) Value at Risk (CVaR)
      Appendix-3
  - 企業独自の尺度 etc

記号の説明

- モデルで利用する主な記号.

x_j :リスク資産jへの投資比率(決定変数)

T : 事象の数

R : ポートフォリオの収益率

r_t : Rをコンパクト分解表現したもの

$\overline{\mathrm{r}}_p$:ポートフォリオの期待収益率

α : $Value \quad at \quad Risk$(決定変数)

$\beta = 0.99$

$|a|_- = \max(-a,0) \quad ex)|-5|_- = 5 \quad , \quad |5|_- = 0$

CVaRを用いた定式化

$$\begin{cases} Min \quad \alpha + \dfrac{1}{(1-\beta)T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \left| r_t + \alpha \right|_{-} & \text{リスク尺度の最小化} \\ s.t \quad \overline{r_p} \geq r_E & r_E : \text{要求される期待収益率} \\ \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 & \text{予算制約} \\ \quad x_j \geq 0 & \text{空売りの禁止} \end{cases}$$

[解く際には目的関数を簡素化する.(Appendix-4)]

r_t に為替リスクヘッジモデルの収益率式を代入して計算	→	最適解 x_j^* を得る
インプット		アウトプット

r_t の導出①

- 第j国資産の国内での収益率をG_j とする.
  - 投資比率を x_jとすれば,

$$R = \sum_{j=1}^{n} G_j x_j \cdots (1)$$ である.

- 次に為替レートによる収益率 Q_j は次式で表される.

$$Q_j = \frac{E_j - e_j}{e_j} \cdots (2) \quad \begin{bmatrix} e_j : \text{期首為替レート} \\ E_j : \text{期末為替レート} \end{bmatrix}$$

- 以上より為替レートを考慮した収益率Rは

$$R = \sum_{j=1}^{n} \{(1 + G_j)(1 + Q_j) - 1\} x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \{G_j + Q_j + G_j Q_j\} x_j \cdots (3)$$

r_t の導出②

- Rをコンパクト分解を施す.
  - コンパクト分解: モデルを高速にとくための手法
- 実際には,収益率ベクトルに対して,

$$
\begin{cases}
(G_1,\cdots,G_n) & \Rightarrow \quad (g_{1t},\cdots,g_{nt}) \\
(Q_1,\cdots,Q_n) & \Rightarrow \quad (q_{1t},\cdots,q_{nt})
\end{cases}
$$

とする.ここで t =1,・・,Tはシナリオを表す.

- 以上より,収益率Rは次式のように表せれる.

$$R = \sum_{j=1}^{n} (G_j + Q_j + G_j Q_j) x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \boxed{(g_{jt} + q_{jt} + g_{jt} q_{jt})} x_j \equiv \sum_{j=1}^{n} \boxed{r_{jt}} x_j \cdots (4)$$

先渡し契約による収益率

- 1期間先の先渡レートe'_jは金利の平価式

$$e'_j = e_j \frac{1 + r_d}{1 + r_f} \cdots (5)$$

- より,現物レート e_j,自国通貨の金利r_d ,外国通貨の金利r_fから求めることができる.
- 第j国通貨に対して行うヘッジ比率 h_j (ただし$0 \le h_j \le 1$)とし,期末に$h_j x_j / e_j$単位の第j国通貨を e'_j 円で売却すると

$$\frac{h_j x_j}{e_j}(e'_j - E_j) \cdots (6)$$

- の収益率を得ることができる.(6)式を(4)式に加えることで,先渡し契約における収益率r_t^F が算出される.

データの概要

- データ期間:2001/10月から2006/9月までの60ヶ月
- データ元:Yahoo!Finance World Indecies
- 使用国家:7カ国
  - アメリカ,イギリス,カナダ,オーストラリア,フランス,ドイツ,日本
- 為替レートは日本円に対する交換レート
- イギリス銀行協会の発表するLIBORを金利として用いる.

シミュレーションの手順(事前評価)

- 2001/10月から2006/9月までの60ヶ月を用いて,モデルごとの効率的フロンティアを描く

⇩

- 各々のフロンティアを比較する.
  - このとき,より左側に位置する方が有利になる

出力結果(事前評価)

分析

- 株式会社数理システム社S+NUOPTを用いて求解を行い,同時に効率的フロンティアを得る.
  - 効率的フロンティア:実現可能集合のうちの最小リスク点を結んだもの[7]

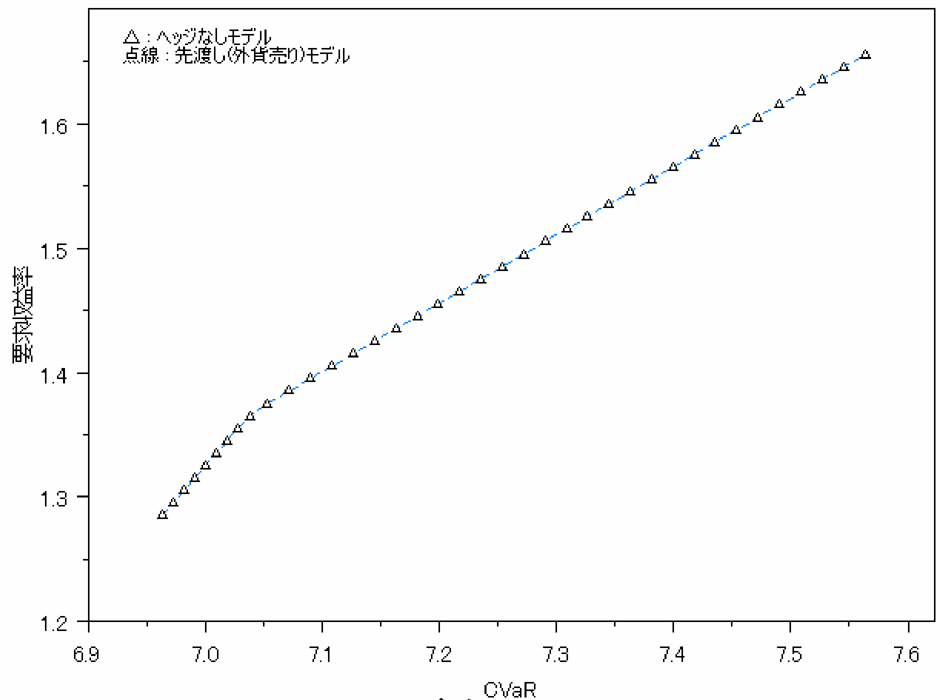


図1　ヘッジなしフロンティアと

先渡し(外貨売り)フロンティア

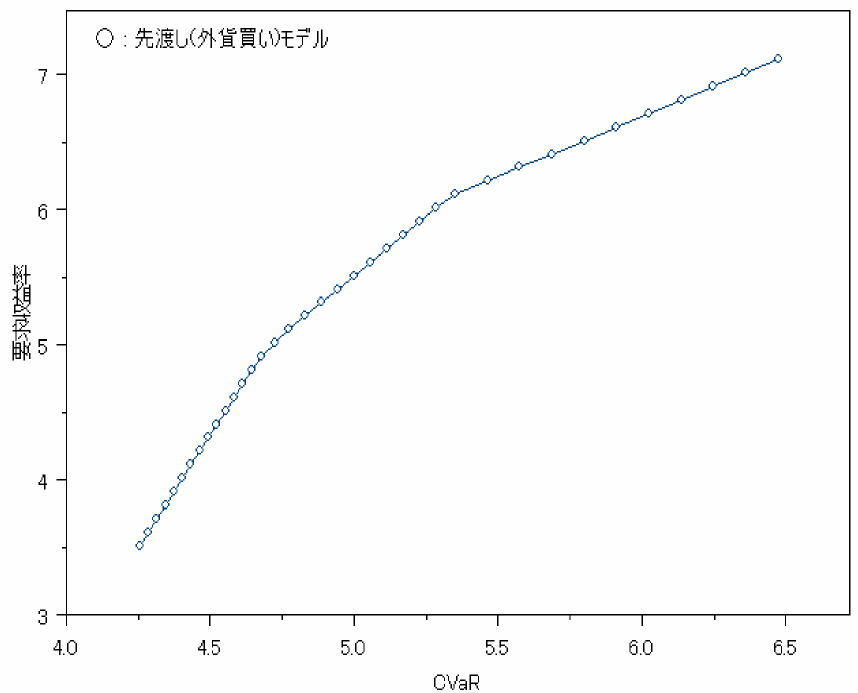


図2　先渡し(外貨売り)フロンティア

考察(事前評価)

- 外国通貨を買う為替先渡契約によるリスクヘッジモデルが有効であることがわかる.
- 外国通貨を売る為替先渡ヘッジモデルではリスク低減効果が見られなかった.
  - 日本国内の金利が諸外国の金利より常に小さい値であったため,プレミアムが常に負であった.

シミュレーションの手順(事後評価)

1. 2001年10月から2005年12月までの51ヶ月のデータについてモデルを解く.

2. 上の検証期間から得られた最適投資比率とヘッジ比率を用いて, 2006年1月の収益率を算出する.

3. 以上の手順を2002年7月から2006年9月までの検証期間を繰り返す.(全部で10個になる)

出力結果(事後評価)

- 各検証期間についてS+NUOPTを用いて求解を行い,得られた最適投資比率を用いて図3を得る.

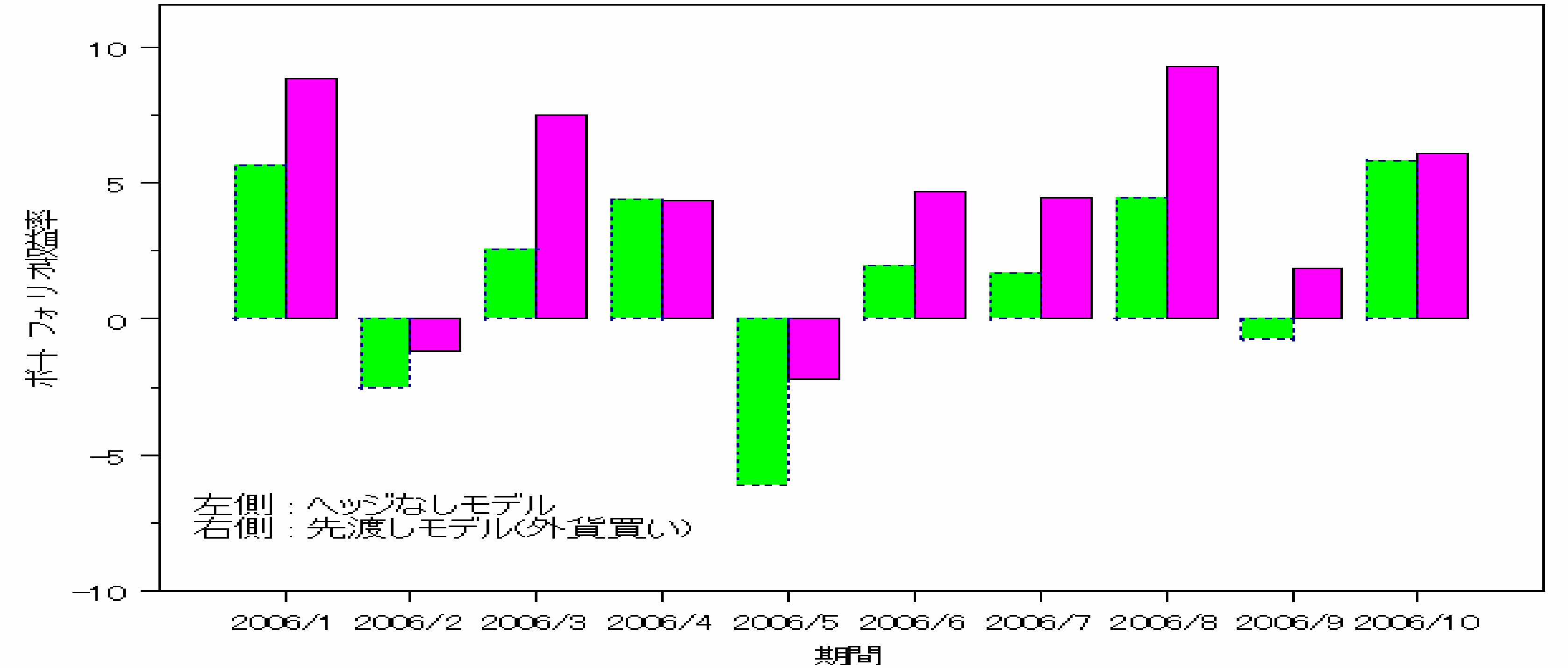


図3　事後パフォーマンスの比較

表2　2つのモデルのパフォーマンスとリスクの比較(単位:%)

ヘッジなし	検証期間平均収益率	検証期間平均CVaR	先渡	検証期間平均収益率	検証期間平均CVaR
要求収益率=1.2%	1.724908012	8.090612	要求収益率=1.2%	4.370939543	3.50937

考察（事後評価）

- 図3より,ほぼすべての検証期間で通貨先渡契約の方が有利なパフォーマンスとなっている.
- 表3よりリスクの面と併せても,通貨先渡契約の方がよりリスクが小さく,パフォーマンスが大きい.

[redacted]

今後の課題

- 本研究では各国のインデックス指数を用いている.
- 分散効果の点からは個別資産を用いた方が望ましい.
- よって,個別資産を用いて分散効果を高めることが課題である.

主要参考文献

[1]張立:”国際分散投資”,平成17年度卒業研究抄録,p277-280 2006

[2]玉之内直:”政策資産配分の検証へのCVaRの実装” (http://www.dir.co.jp/consulting/report/pension/pension-mngt/02070105pension-mngt.html)(最終閲覧日2006/10/12)

[3]鳥居祐史:”国際分散投資～REIT編” (http://www.dir.co.jp/consulting/report/pension/pension-mngt/05050202pension-mng.pdf#search='%E5%9B%BD%E9%9A%9B%E5%88%86%E6%95%A3%E6%8A%95%E8%B3%87%20REIT')最終閲覧日2006/10/12

[4]枇々木規雄:”金融工学と最適化”,朝倉書店, 2005

[5]枇々木規雄,田辺隆人:”ポートフォリオ最適化と数理計画法”,朝倉書店, 2005

[6]山下智志:”市場リスクの計量化とVaR”,朝倉書店, 2000

[7]デービット・G・ルーエンバーガー:”金融工学入門”,日本経済新聞社,2002

[8]木島正明:”バリューアットリスク”,金融財政事情研究会,2000

Appendix

国際分散投資の利点

- 日本国内の投資家が,円のみで運用するのに比べ,パフォーマンスがよくなると考えられる.
- 直近10年間で外貨建て資産は6兆円から30兆円に増えている (Appendix)

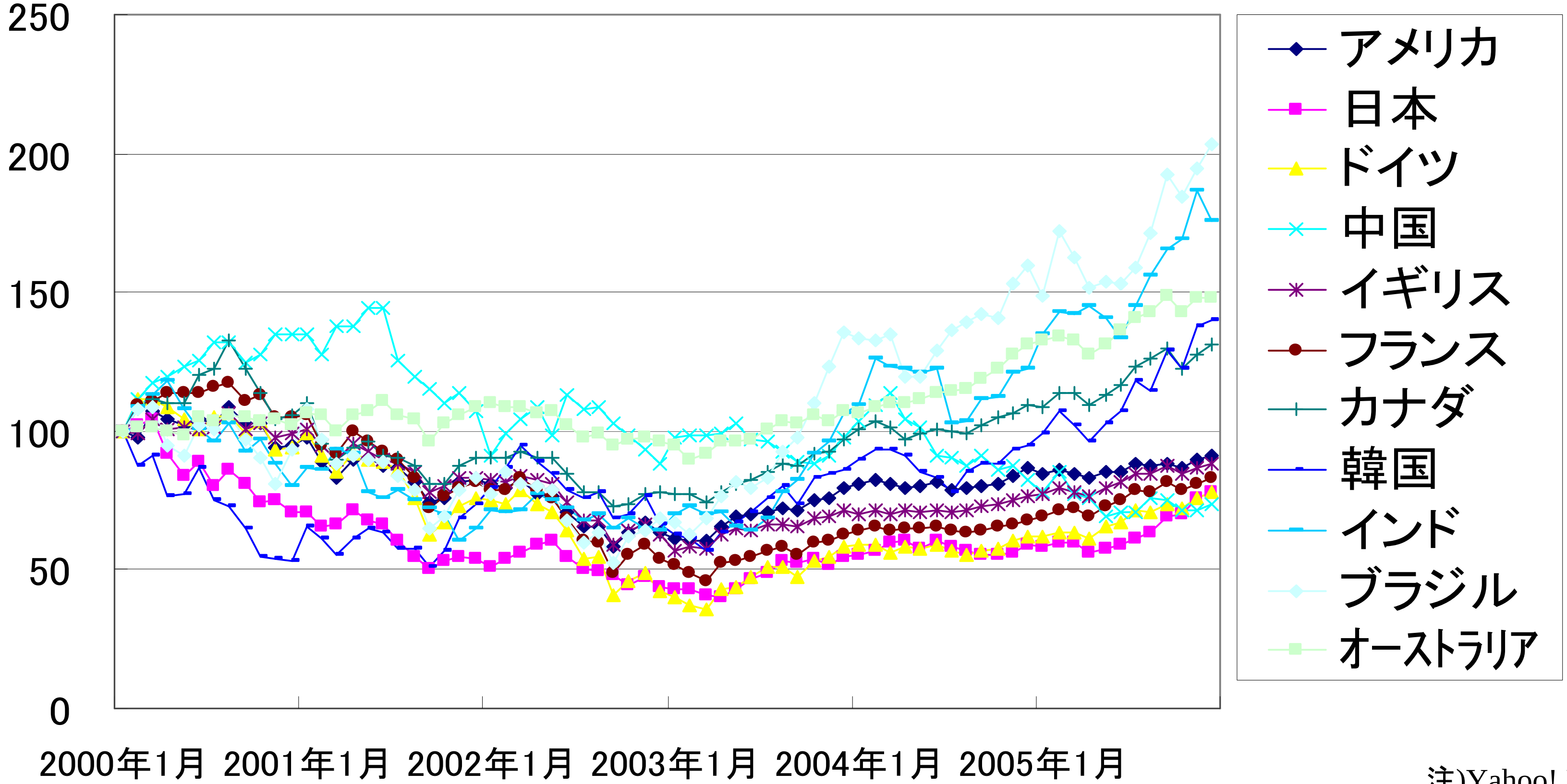
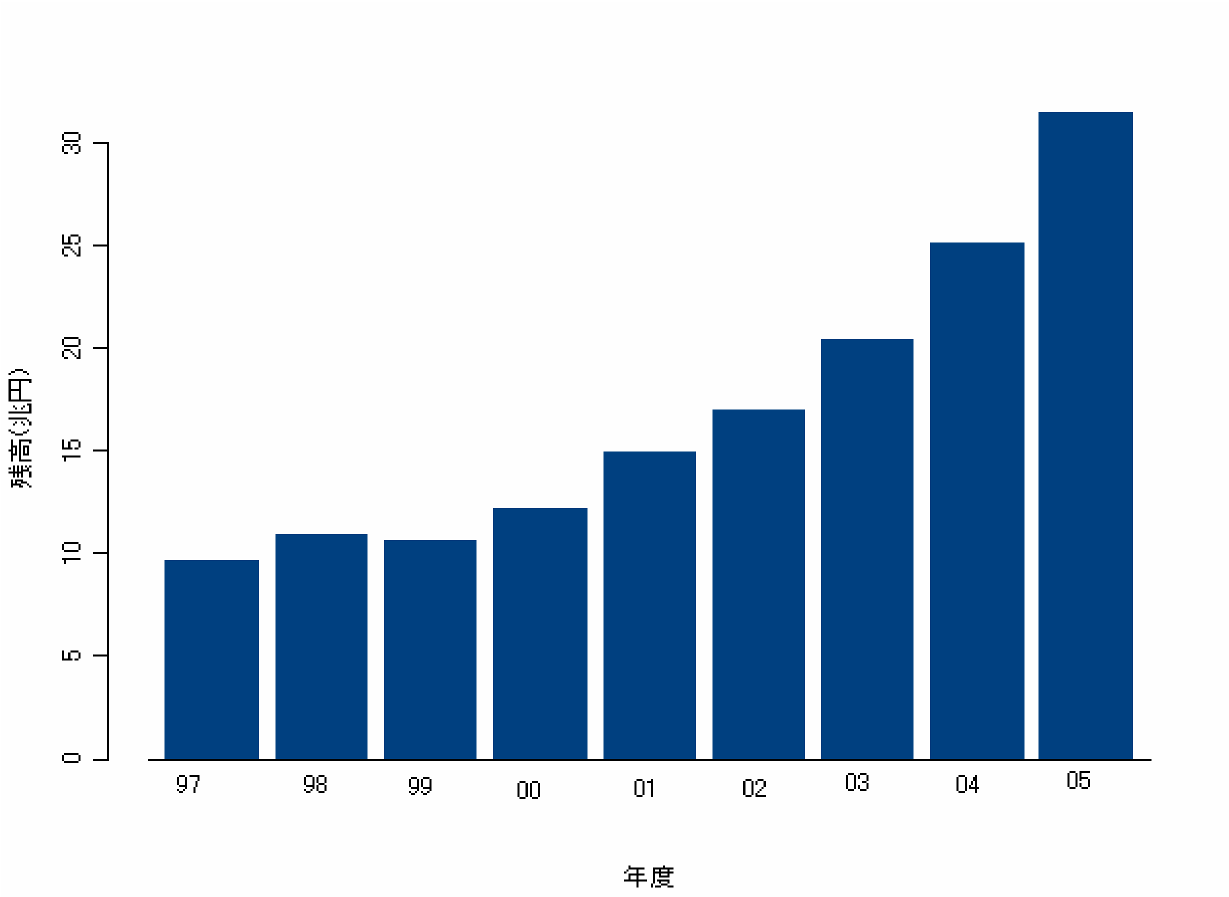


図4 各国株価指数収益率の推移

注)Yahoo! Finance

Appendix-1

日本国内における外貨建て資産の増加



外貨建て資産は
8年間で,約3倍と
なっている.

図5 日本国内における外貨建て資産の増加の推移

出典 キャピタルパートナーズ証券

平均・分散モデルにおけるリスクの考え方

- 平均・分散モデル
  - 期待収益率からバラつく大きさをリスクとしている

投資家にとっての本質的なリスクは赤枠で囲った $\bar{r}_p$ を下回ってしまう部分のみである.

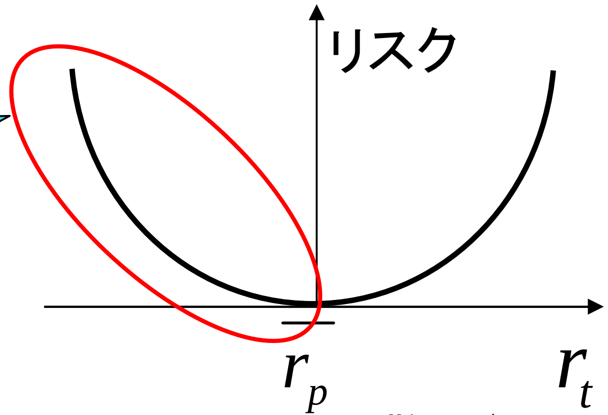


図6：平均・分散モデル

ある収益率を下回る部分をリスクとする”下方リスク尺度“を用いてポートフォリオを構築するべきであると考えられる.

研究に用いる下方リスク尺度

- 研究には条件付Value at Risk CVaR を用いる.
- CVaR:**VaRを超えて発生する可能性のある損失の期待値[2]**
- VaR:**損失が－αを下回る事象が,確率1-β で生起する時のα[8]**

  ある確率1-β の下で起こりうる最大損失額αとも言われる
- ポートフォリオ収益率Rの連続確率密度関数をf (R)とする

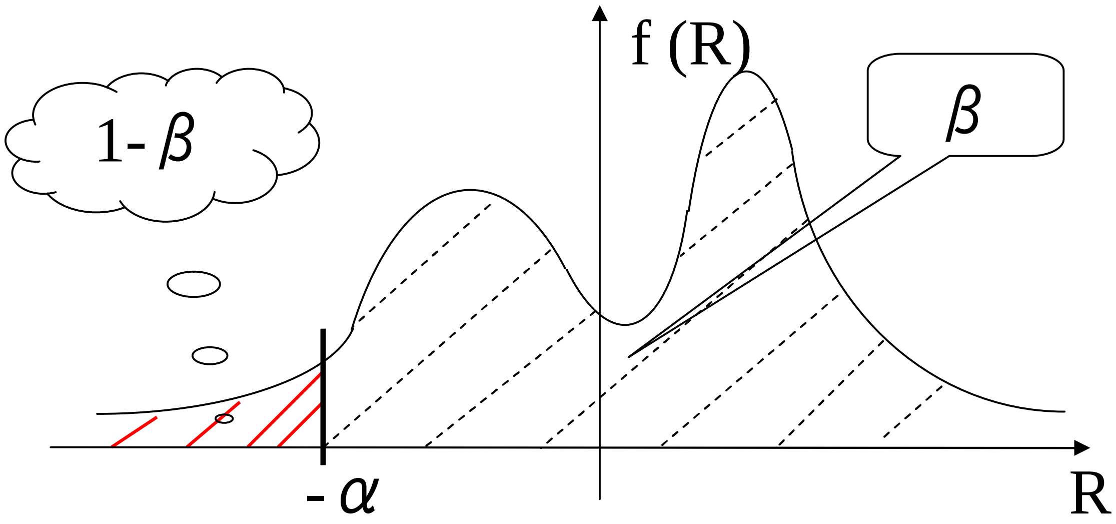


図7 VaRの概念図

左図において

αがVaRを示し,

赤い部分の期待値が
CVaRを示す.

CVaRの導出①

- CVaR導出の手順

  ① 連続分布でのVaRを用いてCVaRを定義する.

  ② 離散分布データの式に書き換える. ∵ヒストリカル法

- VaR **損失が$-\alpha$を下回る事象が,確率1-βで生起するときの** α は次のように定義できる.

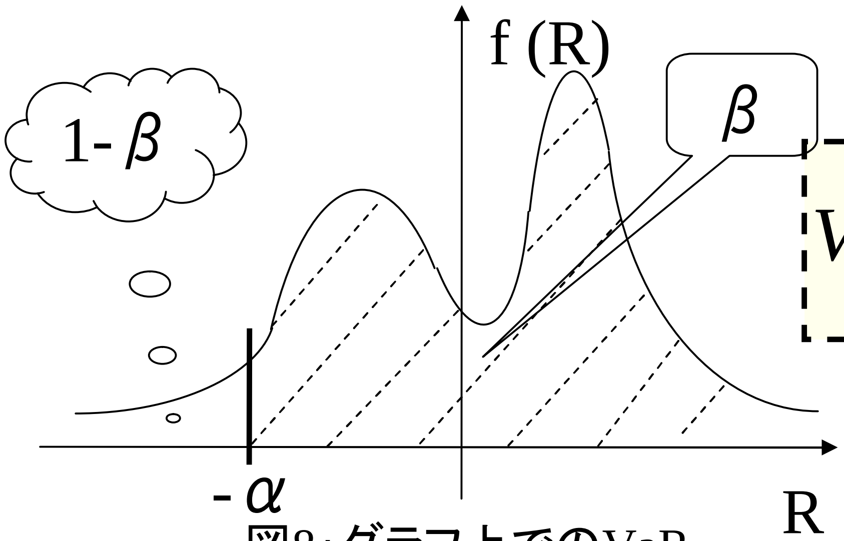


図8:グラフ上でのVaR

$$VaR \equiv \min\{\alpha \mid \int_{-\alpha}^{\infty} f(R)dR \geq \beta\} \cdots (1)$$

CVaRの導出②

- 1 式より

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(R)dR = 1-\beta \cdots (2)$$

- は明らか.よってCVaR =VaRを超えて発生する可能性のある損失の期待値 は次式で定義できる.

$$CVaR \equiv -\frac{\int_{-\infty}^{\alpha} R \cdot f(R)dR}{\int_{-\infty}^{\alpha} f(R)dR} = -\frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha} R \cdot f(R)dR \cdots (3)$$

- 以上の連続分布でのCVaRを離散分布データが利用できるように書き換える.

Appendix-4

CVaRの離散分布データへの書き換え①

$$CVaR=\frac{\alpha}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}f(R)dR-\frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}(R+\alpha)\cdot f(R)dR$$

$$=\alpha-\frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}(R+\alpha)\cdot f(R)dR\cdots(\because (2)\text{式})$$

$$=\alpha+\frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}\left|R+\alpha\right|_{-}f(R)dR\cdots(\because \left|R+\alpha\right|_{-}\text{を展開すれば明らか})$$

$$=\alpha+\frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|R+\alpha\right|_{-}f(R)dR\cdots(\because \left|R+\alpha\right|_{-}\text{の性質から区間を変更できる})$$

$$=\alpha+\frac{1}{1-\beta}E[\left|R+\alpha\right|_{-}]\cdots(\because \text{全区間の収益率}\times\text{確率を足している})$$

$$=\alpha+\frac{1}{1-\beta}E[\left|r_t+\alpha\right|_{-}]\cdots(\because R\text{を離散データに置き換えた})$$

$$=\alpha+\frac{1}{1-\beta}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|r_t+\alpha\right|_{-}\cdots(A)$$

目的関数 A式 の簡素化

まず

$$u_t^+ - u_t^- = r_t + \alpha \cdots (B)$$

とおく.ここで u_t^+, u_t^- はどちらか
の値が0になる非負変数で

$$u_t^+ = \begin{cases} r_t + \alpha & (r_t + \alpha \ge 0) \\ 0 & (r_t + \alpha < 0) \end{cases}$$

$$u_t^- = \begin{cases} -(r_t + \alpha) & (r_t + \alpha < 0) \\ 0 & (r_t + \alpha \ge 0) \end{cases}$$

$\cdots$(C)

C より

$$u_t^- = |r_t + \alpha|_- \cdots (D)$$

が成立する.ここで u_t^+ は非負で
あり,さらに u_t^- を u_t に置き換えると

$$u_t^+ = r_t + \alpha + u_t \ge 0$$

u_t^-の非負条件から

$$y_t \ge 0$$

で, D 式より目的関数は以下のとおり.

$$\alpha + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T}|r_t + \alpha|_- = \alpha + \frac{1}{(1-\beta)T}\sum_{t=1}^{T}u_t$$

Ｓ－PLUS　NUOPTにおけるSIMPLE言語を用いたprogram 1

Appendix-5

為替ヘッジなしモデルのprogram

```
cvar = function(kabuka， rBar， ER， percent){
        Period = Set()
        Asset = Set()
        t = Element(set = Period)
        j = Element(set = Asset)

        Q = Parameter(kabuka， index=dprod(t, j))
        p=length(rBar)
        rbar = Parameter( list(1:p， rBar)， index =j)
        rE =Parameter(ER)
        n = nrow(kabuka)
        beta = Parameter(percent)
        x = Variable(index=j)
        var  = Variable()
        u = Variable(index=t)
```

```
        #制約条件
        rp = Expression()
        rp ~ Sum(rbar[j] * x[j]， j)
        con = Constraint()
        con ~ rp >= rE
        Sum(x[j]， j) == 1
        x[j] >= 0
        Sum(Q[t, j] * x[j]， j)+ var + u[t] >= 0
        u[t] >= 0
        #目的関数
        Risk = Objective(type = minimize)
        Risk ~ var + Sum(u[t]， t) / ((1-beta) * n)}
```

Ｓ－PLUS　NUOPTにおけるSIMPLE言語を用いたprogram2

Appendix-5

為替先渡ヘッジモデルのprogram

```
cvarfw = function(kabuka， rBar， fw， fBar， ER， percent ){
        Period = Set()
        Asset = Set()
        t = Element(set = Period)
        j = Element(set = Asset)
        Q = Parameter(kabuka， index=dprod(t, j))
        FW = Parameter(fw， index=dprod(t, j))
        p1=length(rBar)
        rbar = Parameter( list(1:p1， rBar)， index =j)
        p2=length(fBar)
        fbar = Parameter( list(1:p2， fBar)， index =j)
        rE =Parameter(ER)
        n = nrow(kabuka)
            beta = Parameter(percent)
                x = Variable(index=j)
                 var  = Variable()
                u = Variable(index=t)
                z = Variable(index = j)
```

```
        #制約条件
        h = Expression(index = j)
        h[j] ~ z[j]/x[j]
        rp = Expression()
        rp ~ Sum(rbar[j] * x[j] + fbar[j] * z[j]， j)
        con = Constraint()
        con ~ rp >= rE
        Sum(x[j]， j) == 1
        x[j] >= 0
        z[j] >= 0
        z[j] <= x[j]
        Sum(Q[t, j] * x[j] + FW[t, j] * z[j]， j)+ var + u[t]
>= 0
        u[t] >= 0
        #目的関数
        Risk = Objective(type = minimize)
        Risk ~ var + Sum(u[t]， t) / ((1-beta) * n)
}
```

Ｓ－PLUS　NUOPTにおけるSIMPLE言語を用いたprogram3

Appendix-5

為替ヘッジなしモデルの効率的フロンティアを描く
program

```
fronnon=function(rmat，rBar，percent){

        CVaR1=matrix(NA，nrow=38，ncol=1)
        rE1=matrix(NA，nrow=38，ncol=1)
        ER=0．01285245

        for(i in seq(1:38)){
                sys．cvar = System(model=cvar，rmat，rBar，ER，percent)
                sol．cvar = solve(sys．cvar, trace=F)
                CVaR1[i，] = summary(sol．cvar)$objective
                rE1[i，] = ER
                ER = ER + 0．0001
        }

        efficient1 = cbind(CVaR1，rE1)
        #フロンティアのマトリックスデータを要求する場合
        efficient1
        #フロンティアを図としてダイレクトに要求する場合
        Plot(efficient1，type="l"，xlab="CVaR"，ylab="rp")

}
```