国際分散投資における
下方リスク尺度を用いた
最適ポートフォリオの研究

東京理科大学工学部 4 年

末安　俊也

目次

1．　研究背景

近年,国際分散投資に注目が集まっている.この背景には,昨年までの株式市場の低迷と,現在も続く低金利による影響で，日本国内市場で十分な収益を確保することの難しさが挙げられる[3]．図１.1 を見ると 1997 年から 2005 年までで，日本国内における外貨建て資産額はおよそ 3 倍となっており，日本の機関投資家が新たな収益を得るために国際分散投資への関心が高まっているがわかる．ここで，投資対象国を拡大する国際分散投資による利点は，国内市場以上の収益をあげることと分散投資効果による市場リスクの低減である．

国際分散投資により分散投資効果による市場リスクは低減できるが，外国通貨を自国通貨に換算する際に為替レートの変動に伴うリスクが存在する．近年まで国際分散投資が積極的に行われてこなかった理由の 1 つにも，この為替レートの変動に伴うリスクをヘッジする手段が十分に確立されていなかったことが挙げられる[9].

為替リスクのヘッジの中で最も一般的な手法として通貨先渡契約が挙げられる．この契約では，取引当事者は約定した取引を満期日に実行する義務を互いに負っている．日本の機関投資家にとって，例えば，満期日に指定した交換レートで外国通貨を売却し，円を得る義務契約を結ぶことで，為替リスクをヘッジすることができる．

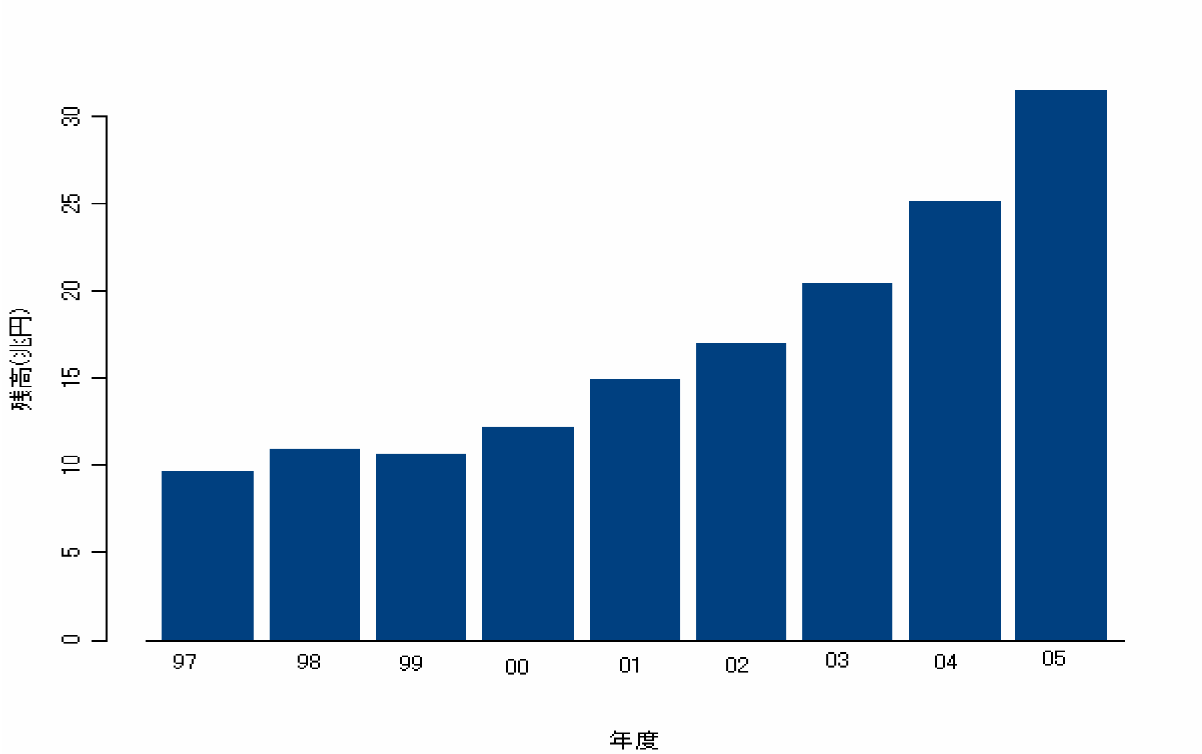


図 1.1　日本国内における外貨建て資産の増加の推移

注)キャピタルパートナーズ証券より

注)図 1 の各年度において左から外貨預金，対外証券投資，外貨建投信を表す

文献[1]では平均･分散モデルに為替リスクヘッジなしの場合と通貨先渡ヘッジの場合のパフォーマンスと安定性を比較・検証している．ここでリスク尺度として分散を用いているが，分散は収益率が投資家にとってプラスの方向にバラつく大きさもリスクとしてしまっている．本来，投資家にとってのリスクであるマイナスの方向部分をリスク尺度とする，平均・下方リスク尺度モデルを用いることが，より実用的であると考えられる．

また為替リスクヘッジを行った収益は必ずしも正規性をもつとは限らないのだが，平均・分散モデルは収益の正規性を仮定したうえで議論を行っている．一方，平均・下方リスク尺度モデルは収益の正規性を仮定しないため，この点でも平均・下方リスク尺度モデルを用いることのほうが実用的であると考えられる．

２．　研究目的

研究背景でも述べたように，ポートフォリオを構築する際に，平均・下方リスク尺度を用いたほうがより実用的であると考えられる．よって本研究では，平均･下方リスク尺度モデルをベースに，為替リスクヘッジなしの場合と通貨先渡ヘッジの場合の 2 つのモデルのパフォーマンスとリスクを示し，比較・検証することを目的とする．

３．　理論の概要とモデルの定式化

3．1 下方リスク尺度の定義と種類

下方リスク尺度とは，“ある値を下回る大きさや確率をリスクとする尺度”のことである．

主な下方リスク尺度を挙げる．

- 下方半分散
- 下方絶対偏差
- 不達成確率
- Value at Risk ，以下 VaR
- Conditional(条件付) Value at Risk ，以下 CVaR
- 下方部分積率

本研究では，Conditional Value at Risk を用いる．

3．2 本研究に用いる尺度の定義と選択理由

CvaR とは，“VaR を超えて発生する可能性のある期待値”であり，VaR とは“1-β の確率で生起する可能性のある最大損失額 α”と定義される．ここでポートフォリオ収益率 R の連続確率密度関数を f(R)とする．

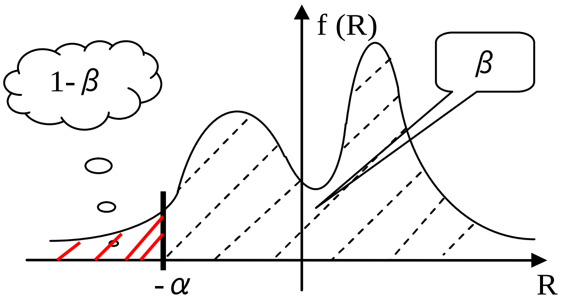


図 3.1　VaR と CVaR の概念図

図 3.1 上で CVaR は実斜線部分の期待値を表す．この CVaR を用いることによる利点は，次のとおりである．

- VaR には統計量に基づく理論的な裏づけが存在する．VaR は%点を表しているため，発生するリスクを同確率の下で考えることができる．一方，リスクを分散にした場合，同確率下の値ではない．
- CVaR を用いることで，VaR を超えて発生する可能性のある損失を考慮でき，また計算においても線形計画法の枠組みで実現できる．

以上のような利点から，本研究では CVaR を用いることにする．

3．3 平均・CVaR モデルの定式化

実際に平均・CVaR モデルの定式化を行う．

図 3.1 より VaR は(3.1)式のように定義できる．

$$VaR(R) \equiv \min\{\alpha \mid \int_{-\alpha}^{\infty} f(R)dR \geq \beta\} \cdots (3.1)$$

(3.1)式より次式は明らかである．

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(R)dR = 1 - \beta \cdots (3.2)$$

これらを用いて CVaR ，つまり VaR を超えて発生する可能性のある期待値を定義できる．

$$CVaR(R) \equiv -\frac{\int_{-\infty}^{\alpha} R \cdot f(R)dR}{\int_{-\infty}^{\alpha} f(R)dR} = -\frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha} R \cdot f(R)dR \cdots (3.3)$$

ここで，(3.3)式は連続分布上での CVaR を表す．本研究ではコンパクト分解表現を用いたシナリオデータによる分析を行うため，次にように展開する

$$CVaR = \frac{\alpha}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha} f(R)dR - \frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}(R+\alpha)\cdot f(R)dR$$

$$= \alpha - \frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}(R+\alpha)\cdot f(R)dR \cdots (\because (3.2)\text{式})$$

$$= \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}\left|R+\alpha\right|_{-} f(R)dR \cdots (\because \left|R+\alpha\right|_{-}\text{を展開すれば明らか})$$

$$= \alpha + \frac{1}{1-\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|R+\alpha\right|_{-} f(R)dR \cdots (\because \left|R+\alpha\right|_{-}\text{の性質から区間を変更できる})$$

$$= \alpha + \frac{1}{1-\beta}E[\left|R+\alpha\right|_{-}] \cdots (\because \text{全区間の収益率}\times\text{確率を足している})$$

ポートフォリオ収益率 R に，シナリオ t におけるポートフォリオ収益率 r_t を用いると，

$$CVaR = \alpha + \frac{1}{1-\beta}E[\left|r_t+\alpha\right|_{-}] = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\sum_{t=1}^{T} f_t \left|r_t+\alpha\right|_{-} \cdots (3.4)$$

事象 t は等確率に発生すると仮定できるため，

$$CVaR = \alpha + \frac{1}{1-\beta}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|r_t+\alpha\right|_{-} \cdots (3.5)$$

となる．

以上より平均・CVaR モデルは次のように定式化できる．

$$(\mathrm{A})\quad \left[\begin{array}{ll} \mathrm{Min} & \alpha + \dfrac{1}{(1-\beta)}\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\left|r_t+\alpha\right|_{-} \\ \mathrm{s.\ t.} & \overline{r_p} \geq r_E \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0 \end{array}\right.$$

このとき，各記号の意味は次のとおりである．

x_j :リスク資産 j への投資　比率 (決定変数)

T : 事象の数

r_{jt} :ある事象 t でのリスク　資産 j への収益率

r_t :ある事象 t でのポート　フォリオの収益率

ここで , $\sum_{j=1}^{n} r_{jt} x_j = r_t$　が成立する

$\overline{\mathrm{r}}_p$: 構築されたポートフォ　リオの期待収益率

r_E : 投資家の要求する期待　収益率

α : *Value at Risk* (決定変数)

β : 定数項

$|a|_- = \max(-a, 0) \quad ex)|-5|_- = 5 \quad , \quad |5|_- = 0$

本研究では，目的関数に含まれる r_t について，為替リスクヘッジなしモデルにおける収益率 r_t^N と為替先渡ヘッジモデルにおける収益率 r_t^F について各々インプットし，最適解を得る.

3．4 為替リスクヘッジなしモデル

為替リスクヘッジなしモデルにおける収益率 r_t^N を導出する.

第 j 国資産の国内での収益率を G_j，第 j 国資産への投資比率を x_j とすれば，ポートフォリオ収益率 R は

$$R = \sum_{j=1}^{n} G_j x_j \cdots (3.6)$$

となる．第 j 国の為替レートによる収益率を Q_j とすれば, 期首為替レート e_j , 期末為替レート E_j を用いて,

$$Q_j = {E_j - e_j}\Big/{e_j} \cdots (3.7)$$

(3.6)，(3.7)式を考慮した為替リスクヘッジなしモデルのポートフォリオ収益率 R^N は

$$R^N = \sum_{j=1}^{n}\{(1+G_j)(1+Q_j)-1\}x_j = \sum_{j=1}^{n}\{G_j + Q_j + G_jQ_j\}x_j \cdots (3.8)$$

となる.

次にコンパクト分解を行う. 収益率ベクトル $(G_1,\cdots,G_n)$ と $(Q_1,\cdots,Q_n)$ がそれぞれ $(g_{1t},\cdots,g_{nt})$, $(q_{1t},\cdots,q_{nt})$, t = 1, …, T を実現値とする離散分布に従うものと仮定する. (3.8)式は

$$R^N = \sum_{j=1}^{n}(g_{jt} + q_{jt} + g_{jt}q_{jt})x_j \cdots (3.9)$$

と表現できる. ここで $r_{jt}^N \equiv g_{jt} + q_{jt} + g_{jt}q_{jt}$ とすれば,

$$R^N = \sum_{j=1}^{n} r_{jt}^N x_j = r_t^N \cdots (3.10)$$

となり, 為替リスクヘッジなしモデルの定式化は次のとおりである.

$$(\mathrm{B})\quad \left[\begin{array}{ll} \mathrm{Min} & \alpha + \dfrac{1}{(1-\beta)}\dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\left|r_t^N + \alpha\right|_- \\ \mathrm{s.\ t.} & \overline{r_p} \geq r_E \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\ & x_j \geq 0 \end{array}\right.$$

3. 5 為替先渡ヘッジモデル

為替先渡ヘッジモデルにおける収益率 r_t^F を導出する.

為替レートの変動リスクをヘッジするために, 一定量の第 j 国の通貨を期末に為替レート e'_j 円で売却する, 為替先渡契約を結ぶことを考える. この契約を結ぶことで, 為替レートが変化しても, 第 j 国通貨を期末に e'_j 円で売却する保証が得られる.

1 期間先の先渡レート e'_j は金利平価

$$e'_j = e_j \frac{1 + r_d}{1 + r_f} \cdots (3.11)$$

より，現物レート e_j，自国通貨の金利 r_d，外国通貨の金利 r_f から求めることができる．

よって，期末に第 j 国通貨を先渡契約で売ることで得られるプレミアムは

$$P_j = \frac{e'_j - e_j}{e_j} \cdots (3.12)$$

となるが， ここで日本円の金利が外国通貨の金利より小さいと仮定すると，(3.12)式は常に負の値となる．

一方，期末に第 j 国通貨を先渡しで買う契約を結ぶことで得られるプレミアムは

$$P'_j = \frac{e_j - e'_j}{e_j} \cdots (3.13)$$

となる．

以下では外国通貨を売る為替先渡ヘッジモデルについて定式化を行う．

第 j 国通貨に対して行うヘッジ比率 h_j（ただし $0 \le h_j \le 1$）とし，期末に $h_j x_j / e_j$ 単位の第 j 国通貨を e'_j 円で売却すると

$$\frac{h_j x_j}{e_j}(e'_j - E_j) = h_j x_j \frac{(e'_j - e_j) - (E_j - e_j)}{e_j} = h_j x_j (P_j - Q_j) \cdots (3.14)$$

だけの収益率を得ることができる．この結果， コンパクト分解を行った為替先渡ヘッジモデルのポートフォリオ収益率 R^F は

$$R^F = \sum_{j=1}^{n} (g_{jt} + q_{jt} + g_{jt} q_{jt}) x_j + \sum_{j=1}^{n} (p_{jt} - q_{jt}) h_j x_j \equiv r_t^F \cdots (3.15)$$

となり，為替先渡ヘッジモデルの定式化は次のとおりである．

$$
\text{(C)}\quad
\begin{cases}
\text{Min} & \alpha + \dfrac{1}{(1-\beta)} \dfrac{1}{T} \displaystyle\sum_{t=1}^{T} \left| r_t^{F} + \alpha \right|_{-} \\
\text{s. t.} & \overline{r_p} \geq r_E \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& x_j \geq 0 \\
& 0 \leq h_j \leq 1
\end{cases}
$$

４．　分析

本研究では事前評価と事後評価に分けてシミュレーションを行い，分析する．事前評価では各々のモデルの効率的フロンティアを描くことで比較を行う．事後評価では検証期間でのパフォーマンスとリスクについて検証を行う．投資対象国は市場の安定性という面から 2005 年度 GDP 上位国と地域の分散性からアメリカ，カナダ，イギリス，オーストラリア，フランス，ドイツ，日本を選択した．資産の運用期間を 1 ヶ月とする．

4．1 データ概要

- データ期間は 2001 年 10 月から 2006 年 9 月までの 60 ヶ月である．
- 各投資対象国の資産は Yahoo!Finance の World Indices に記載されているインデックス指数を用いる
- 先物レート算出のために必要な各国の金利には LIBOR の 1 ヶ月ものを用いる．
- 為替レートは日本円に対する交換レートを用いる．

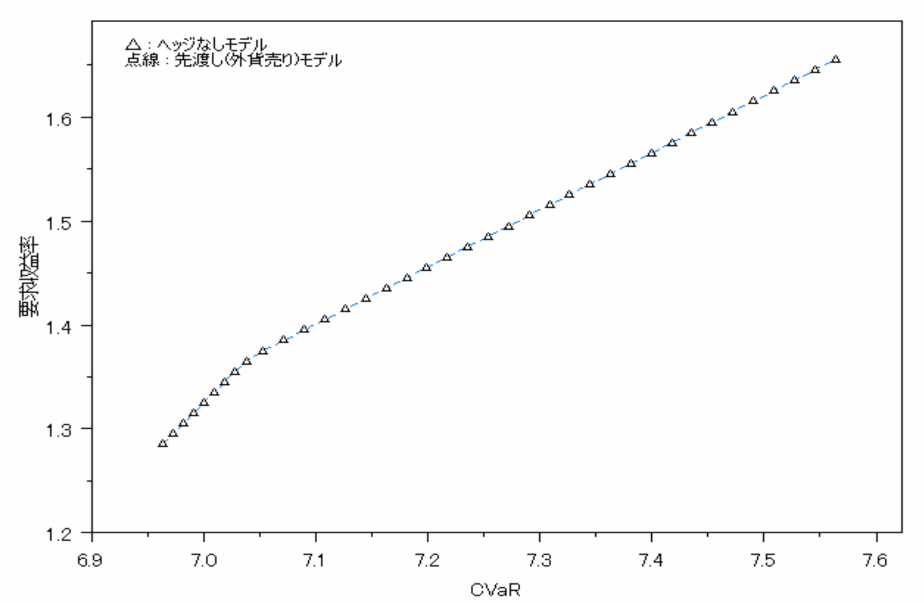
4．2 シミュレーション概要

1. 2001 年 10 月から 2006 年 9 月までの 60 ヶ月のデータを用いて各々のモデルで効率的フロンティアを描く．
2. 2001 年 10 月から 2005 年 12 月までの 51 ヶ月のデータについて，円換算した各国のインデックス指数の収益率，為替レートの変動率と通貨先渡契約によるプレミアムによる収益率を算出する．
3. 2 で求めた収益率データをモデルにインプットし，モデルごとの効率的フロンティアを描く．またこのとき算出される最適投資比率とヘッジ比率は事後評価に用いる．
4. 3 で求めた最適投資比率とヘッジ比率を用いて検証期間での 2006 年 1 月の収益率を算出する．
5. 以上の手順を 2002 年 7 月から 2006 年 9 月までの検証期間まで繰り返す．

５． 結果と考察

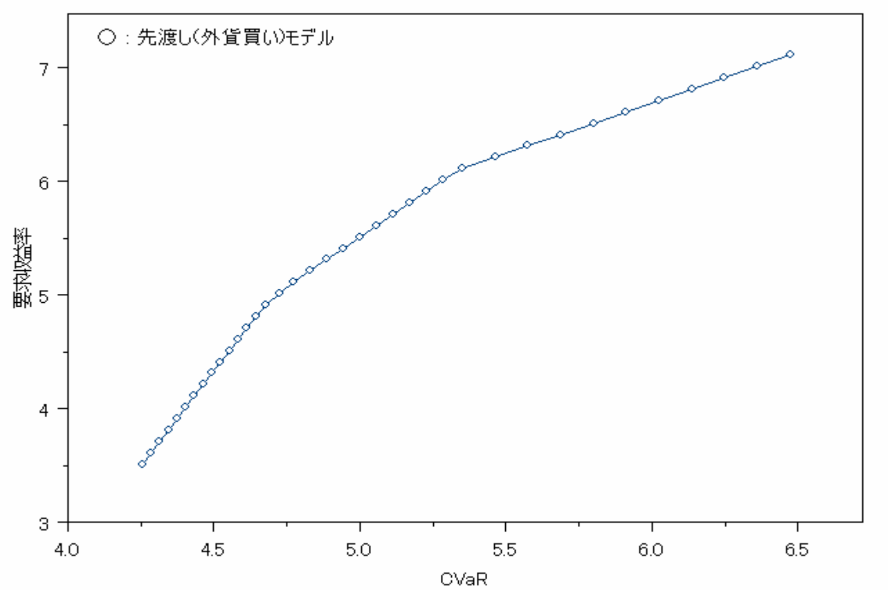
5.1 事前評価

図 5.1 に為替リスクヘッジなしモデルと為替先渡ヘッジモデル(外国通貨売り)の効率的フロンティアを，図 5.2 に外国通貨買い為替先渡ヘッジモデルの効率的フロンティアを示す.



期間：2001/10-2006/9

図 5.1 為替リスクヘッジなしモデルと外国通貨売り為替先渡ヘッジモデルの効率的フロンティア



期間：2001/10-2006/9

図 5.2　外国通貨買い為替先渡ヘッジモデルの効率的フロンティア

図 5.1 と図 5.2 を比較すると，為替リスクヘッジなしモデルに対して外国通貨を買う先渡契約によるリスクヘッジモデルの優位性が見て取れる．為替リスクヘッジなしモデルの最小 CVaR ポートフォリオが 1.28%の要求期待収益率を満たすために，5%の確率で 6.96%の損失リスクが存在する

のに対して， 外国通貨買い為替先渡ヘッジモデルの最小 CVaR ポートフォリオは，1.28％を大きく上回る 3.51%を満たしつつ，リスクである CVaR も 4.25%程度と小さくなっている．

一方， 外国通貨を売る為替先渡ヘッジモデルにおいては図 5.1 からもわかるように，リスク低減効果が見られなかった．これは検証期間内における外国通貨を売ることによるプレミアムが存在しなかったためであると考えられる．つまり，検証期間内での日本国内の金利が諸外国の金利より常に小さい値であったのである．このことから，相手国金利に比べ，国内金利が低い場合，もしくは低い状態が続く場合， 外国通貨を売る為替先渡ヘッジは有効ではないといえる．

事前評価からは， 外国通貨買いの為替先渡ヘッジモデルがヘッジなしモデルに比べ，かなり有意なフロンティアを描いている．この背景には近年の諸外国における金利の上昇から，為替レートが円安方向にシフトしたことも寄与していると考えられる．よって，為替先渡しヘッジを行う際には，そのときの情勢を見極めることが重要である．

5.2 事後評価

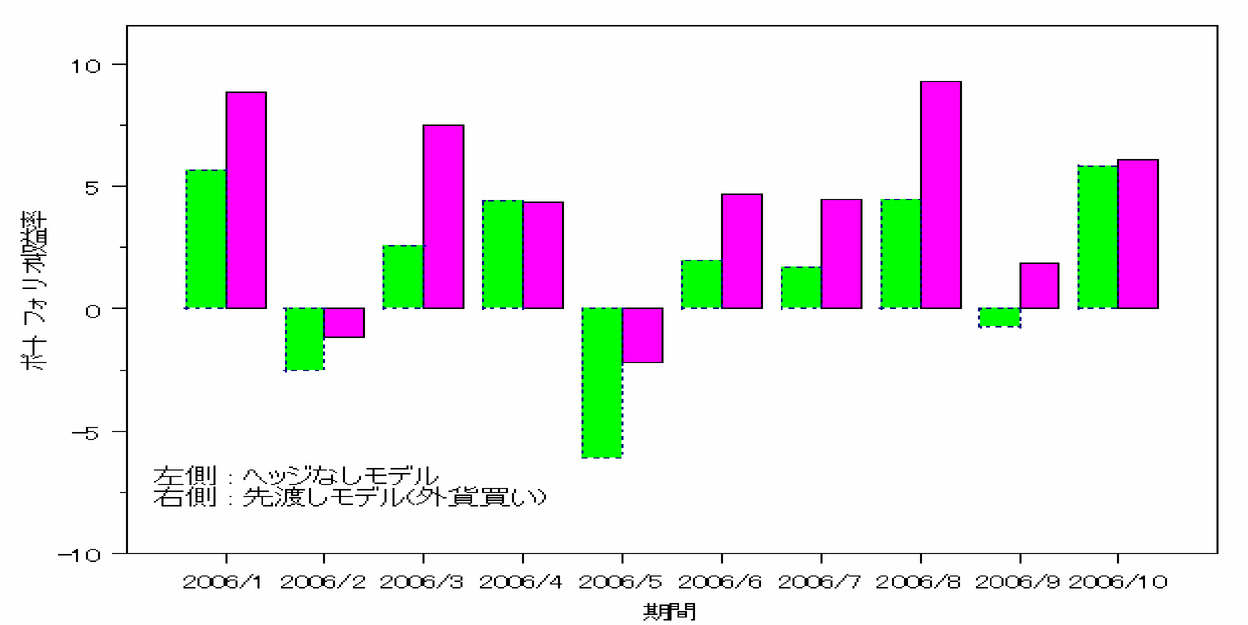


図 5.3 ヘッジなしモデルと通貨買い先渡し契約によるヘッジモデルのパフォーマンスの比較

要求期待収益率＝1.2%

図 5.3 より，要求期待収益率＝1.2%における 2 つのモデルの事後パフォーマンスは，為替先渡し契約を用いたほうがほとんど場合，改善されることがわかる．ヘッジなしモデルのパフォーマンスが唯一，有利である 2006 年 4 月をとってみても，その差は微々たるものである．よって，パフォーマンスにおいて外国通貨買い為替先渡し契約の有効性があると考えられる．

次に， 表 5.1 を用いてリスクを含めて考察する．要求期待収益率=1.2%の行において，先渡し契約を用いたほうがパフォーマンスはより大きく，リスクはより小さくなっていることが事後評価からわかる．よって外国通貨買い為替先渡し契約は有効な手段であるといえる．

表 5.1　2 つのモデルのパフォーマンスとリスクの比較(単位：%)

ヘッジなし	検証期間平均収益率	検証期間平均CVaR	先渡	検証期間平均収益率	検証期間平均CVaR
要求収益率=1.2%	1.724908012	8.090612	要求収益率=1.2%	4.370939543	3.50937

６．　今後の課題

本研究では資産として各国のインデックス指数を用いているが，分散効果の点から個別資産を用いた方が望ましいことがわかっている．よって，今後の課題としては個別資産を用いた場合の検証が挙げられる．また，円高局面との比較検討の必要性がある．

７．　主要参考文献

[1]張立:”国際分散投資”，平成 17 年度卒業研究抄録，p277-280 2006

[2] 玉之内直:”政策資産配分の検証への CVaR の実装” (http://www . dir . co . jp/consulting/report/pension/pension-mngt/02070105pension-mngt. html)(最終閲覧日 2006/11/12)

[3]鳥居祐史:”国際分散投資～REIT 編” (http://www . dir . co . jp/consulting/report/pension/pension-mngt/05050202pension-mng . pdf#search='%E5%9B%BD%E9%9A%9B%E5%88%86%E6%95%A3%E6%8A%95%E8%B3%87%20REIT')最終閲覧日 2006/11/12

[4]枇々木規雄:”金融工学と最適化”，朝倉書店， 2005

[5]枇々木規雄，田辺隆人:”ポートフォリオ最適化と数理計画法”，朝倉書店， 2005

[6]山下智志:”市場リスクの計量化と VaR”，朝倉書店， 2000

[7]デービット・G・ルーエンバーガー:”金融工学入門”，日本経済新聞社，2002

[8]木島正明:”バリューアットリスク”，金融財政事情研究会，2000

[9]今野　浩:「理財工学 2」，日科技連出版社，(1998)

付録

Ｓ－ＰＬＵＳ　ＮＵＯＰＴにおけるＳＩＭＰＬＥ言語を用いた **program**

為替ヘッジなしモデルの program

```
cvar = function(kabuka ,  rBar ,  ER ,  percent){

    Period = Set()
    Asset = Set()
    t = Element(set = Period)
    j = Element(set = Asset)

    Q = Parameter(kabuka ,  index=dprod(t, j))
    p=length(rBar)
    rbar = Parameter( list(1:p ,  rBar) ,  index =j)
    rE =Parameter(ER)
    n = nrow(kabuka)
    beta = Parameter(percent)

    x = Variable(index=j)
    var  = Variable()
    u = Variable(index=t)

    #制約条件
    rp = Expression()
    rp ~ Sum(rbar[j] * x[j] ,  j)
    con = Constraint()
    con ~ rp >= rE
    Sum(x[j] ,  j) == 1
    x[j] >= 0
    Sum(Q[t, j] * x[j] ,  j)+ var + u[t] >= 0
    u[t] >= 0
    #目的関数
    Risk = Objective(type = minimize)
    Risk ~ var + Sum(u[t] ,  t) / ((1-beta) * n)
}
```

為替先渡ヘッジモデルの program

```
cvarfw = function(kabuka ,  rBar ,  fw ,  fBar ,  ER ,  percent  ){

    Period = Set()
    Asset = Set()
    t = Element(set = Period)
    j = Element(set = Asset)
    Q = Parameter(kabuka ,  index=dprod(t, j))
    FW = Parameter(fw ,  index=dprod(t, j))
    p1=length(rBar)
    rbar = Parameter( list(1:p1 ,  rBar) ,  index =j)
    p2=length(fBar)
    fbar = Parameter( list(1:p2 ,  fBar) ,  index =j)
    rE =Parameter(ER)
    n = nrow(kabuka)
    beta = Parameter(percent)

    x = Variable(index=j)
    var  = Variable()
    u = Variable(index=t)
    z = Variable(index = j)

    #制約条件
    h = Expression(index = j)
    h[j] ~ z[j]/x[j]
    rp = Expression()
    rp ~ Sum(rbar[j] * x[j] + fbar[j] * z[j] ,  j)
    con = Constraint()
    con ~ rp >= rE
    Sum(x[j] ,  j) == 1
    x[j] >= 0
    z[j] >= 0
    z[j] <= x[j]
    Sum(Q[t, j] * x[j] + FW[t, j] * z[j] ,  j)+ var + u[t] >= 0
    u[t] >= 0
    #目的関数
```

```
    Risk = Objective(type = minimize)
    Risk ~ var + Sum(u[t] ,  t) / ((1-beta) * n)
}
```

為替ヘッジなしモデルの効率的フロンティアを描く program

```
fronnon=function(rmat ,  rBar , percent){

    CVaR1=matrix(NA，nrow=38，ncol=1)
    rE1=matrix(NA，nrow=38，ncol=1)
    ER=0．01285245

    for(i in seq(1:38)){
        sys．cvar = System(model=cvar ,  rmat ,  rBar ,  ER , percent)
        sol．cvar = solve(sys．cvar，trace=F)
        CVaR1[i，] = summary(sol．cvar)$objective
        rE1[i，] = ER
        ER = ER + 0．0001
    }

    efficient1 = cbind(CVaR1 ,  rE1)
    #フロンティアのマトリックスデータを要求する場合
    efficient1
    #フロンティアを図としてダイレクトに要求する場合
    plot(efficient1，type="l"，xlab="CVaR"，ylab="rp")

}
```

為替先渡ヘッジモデルの効率的フロンティアを描く program についてはｆｏｒ文のなかを為替先渡ヘッジモデルの求解に変更すればよいので，ここでは割愛する．