

# 投資計画期間中のリスクを考慮した 多期間ポートフォリオモデルの検証

## 《発表構成》

1. 研究背景
2. 研究目的
3. モデル化
4. 数値実験
5. まとめ
6. 参考文献

# ポートフォリオ最適化問題とは

2

- 機関投資家は長期投資のための最適資産配分を行う必要性がある.

\* 機関投資家・・・生損保会社, 銀行などの企業体で投資を行っている大口の投資家

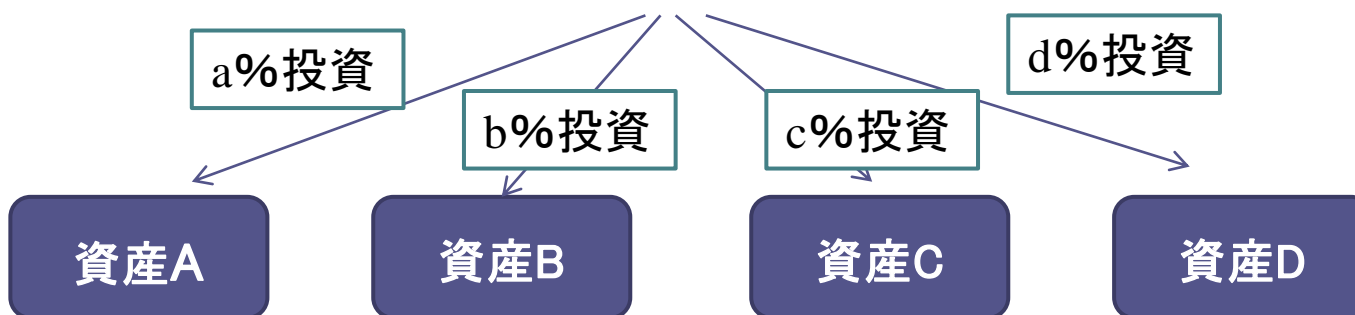


図1: 資産配分のイメージ図

最適な資産配分 (a,b,c,d%の比率) を決める問題

↓  
ポートフォリオ最適化問題

# ポートフォリオ最適化問題の種類

3

## □ 単期間モデル (ex. Markowitzの平均・分散モデル)

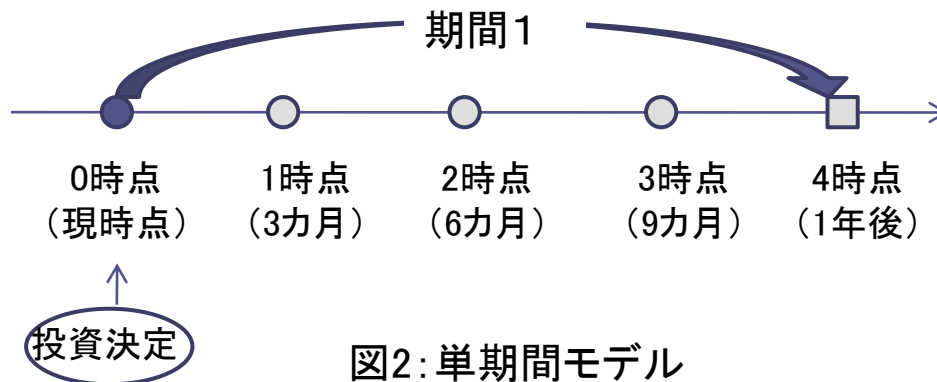


図2: 単期間モデル

資産配分の計画期間を(期間の長い) **1期間**と考え、  
 資産価格変動にある確率分布を想定し、  
**現時点**での投資のみを決定

## □ 多期間モデル

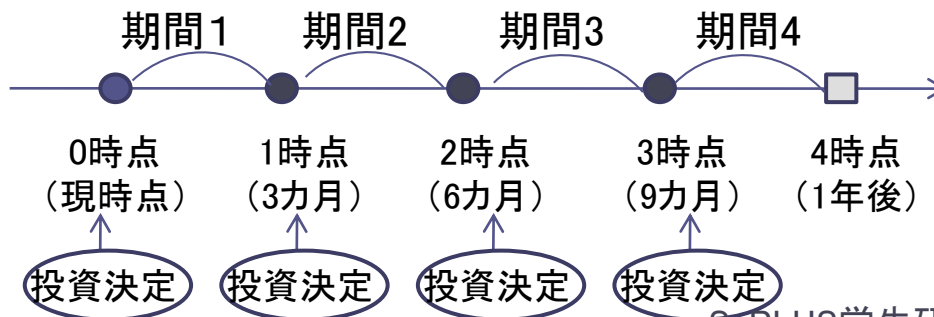


図3: 多期間モデル

計画期間中に設定された **複数期間**で資産価格変動の確率分布を想定し、  
**各時点で異なる**投資決定

# 多期間確率計画モデル

4

- 多期間にわたるシナリオ（収益etc）の不確実性や意思決定を離散的に記述

シミュレーション型多期間確率計画モデル

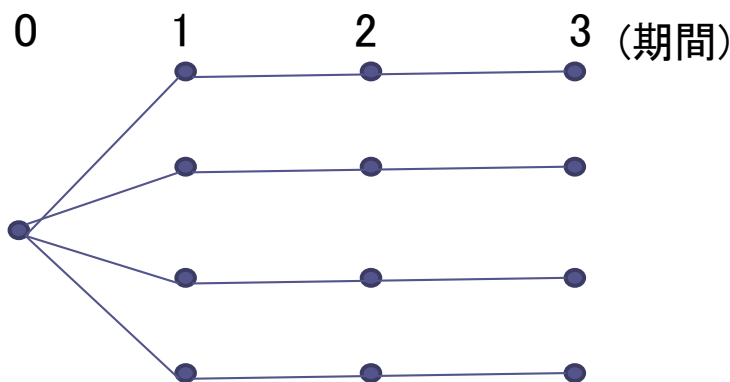


図4: モンテカルロシミュレーションパス

\*シナリオ生成には、シナリオが枝分かれしていく様子を描くシナリオ・ツリー型モデルも存在するが、ここでは、シミュレーション型を扱う。

- 長期投資における利点

資産価格変動を柔軟に記述できる

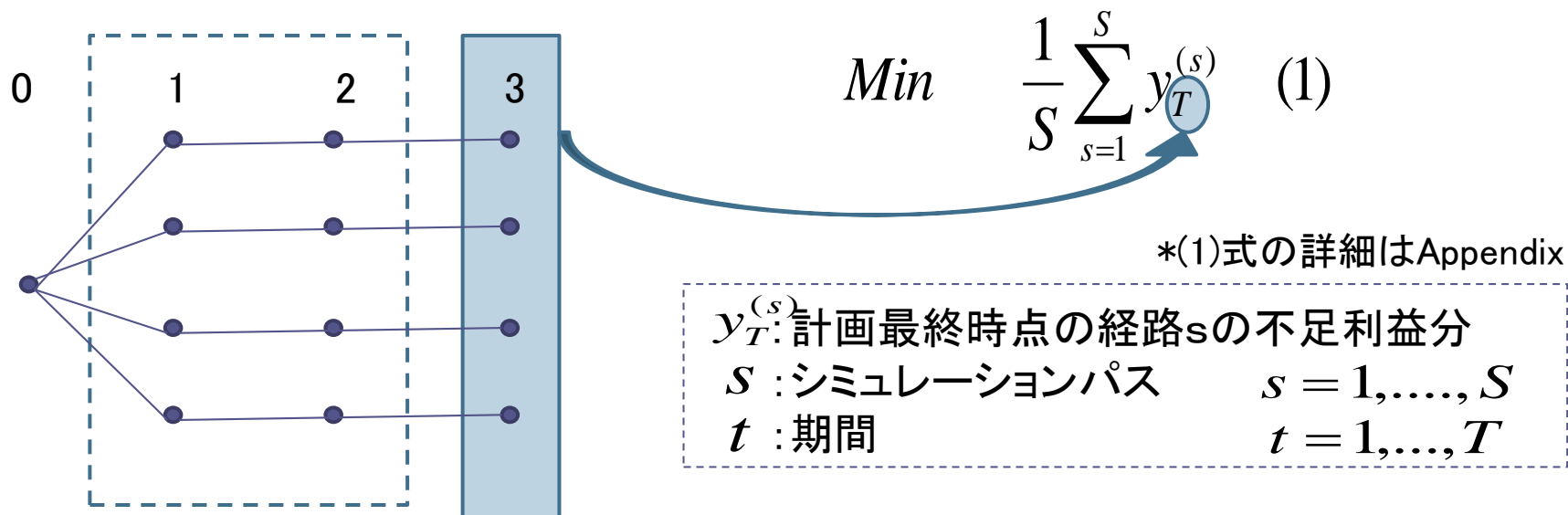
将来のリバランスを明示的にモデル化した上で、意思決定が可能

# 多期間モデルの問題点

5

## □ 目的関数のリスク値が最終時点を考慮

例: シミュレーション型多期間モデル (T=3)



計画期間中のリスクは目的関数で制御できていない。しかし、投資家は期中のリスクにも着目[9]

# 研究目的

6

## 研究背景より

- 多期間モデルは、最終時点のリスクや収益を目的関数とし、期中のリスクには着目していない。
- 長期投資をする上で、計画期間中のリスク動向にも着目する投資家選考が存在する。



最終時点のみならず、期中のリスクを考慮する多期間ポートフォリオ最適化モデルを構築、有効性を検証する。

# 先行研究

7

- 多期間モデルの中間時点に着目
  - 損失リスクLPM (Lower Partial Moments) の加重平均をリスク指標とする概念を提案[3]
  - 各期の投資目標とリスクを考慮する線形目標計画モデルを提案[4]
  - 中間時点の制御の欠如が期間終了前の破産を生む危険性を示す[8]
  
- 異なる時点や基準を目的関数でコントロールするWeighted multiple CVaRを採用[1][5][6] \* p.8にてCVaR定義説明



本研究では、全時点のCVaRの加重平均をリスク指標とし、異なる時点や基準をコントロールする

# 目的関数(CVaR)

8

## □ CVaR (Conditional value-at-risk)

### —VaR (value-at-risk)を超える損失の条件付き期待値

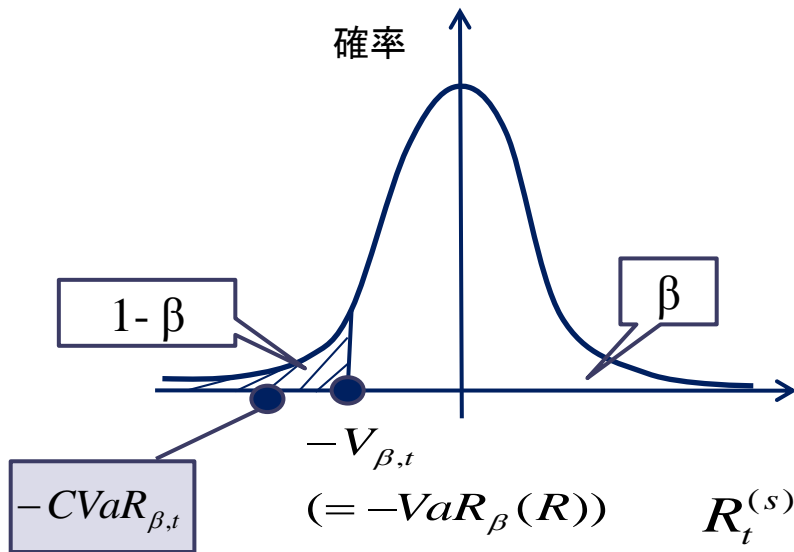


図5: CVaRの概念

\* VaR: 与えられた期間内に, 与えられた信頼度 $1-\beta$ のもとで, ポートフォリオがどのくらいの損失を出すかの推定値

$\beta$  : 確率水準 (ex.  $\beta=0.95$ )

$V_{\beta,t}$ : t時点のVaR

$u_t^{(s)}$ : t時点の経路 $s$  の損失が $V_{\beta,t}$ を下回る値

$R_t^{(s)}$ : t時点の経路 $s$  における利益率

$s$  : シミュレーションパス  $s=1, \dots, S$

$$CVaR_{\beta,t} = \min \left\{ V_{\beta,t} + \frac{1}{(1-\beta)S} \sum_{s=1}^S u_t^{(s)} \mid R_t^{(s)} + V_{\beta,t} + u_t^{(s)} \geq 0 \right\} \quad (2)$$



# 目的関数(多目標CVaR)

9

- 多目標計画問題の定式化により, 複数時点のリスクを同時に考慮する

\* 多目標計画問題・・・複数の設定された目標に可能な限り近づけるために, 各目標の不達成によるリグレット(残念度)を最小にする問題.

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^T wf_t df_t CVaR_{\beta,t} \quad (3)$$

各時点リスクの加重平均を, 目的関数に.  
各時点の不足利益分(リグレット)を1つの関数で表し, 最小にする.

$wf_t$  : t時点のリスクに対するウェイト  
 $df_t$  : t時点の割引率  
 $CVaR_{\beta,t}$  : t時点のCVaR

# 多目標CVaRの利点と欠点

10

## □ 利点

- 期間中のリスクを考慮できること

ex. T=3の時,  $CVaR_{\beta,1}$ ,  $CVaR_{\beta,2}$ ,  $CVaR_{\beta,3}$  を考慮

- 期間中の $\beta$  の値を設定できること

ex. t=1の時, 信頼水準90%  $CVaR_{0.90,1}$

t=2の時, 信頼水準95%  $CVaR_{0.95,2}$

## □ 欠点

- 様々な場合が考慮できるため, CVaRがマイナスになる場合が発生する. (制限が厳しくない時)

\* CVaRは大きさなので, 正であるべき

# 目的関数(CVaR偏差)

11

## □ CVaR偏差 (deviation) の導入

$$CVaR\text{偏差} = CVaR_{\beta}[R_t^s - E(R_t^s)] \quad (4)$$

収益と平均収益との距離

## □ 常に正となるCVaR偏差の値が得られる.

⇒どんな場合においても一貫した  
リスク指標.

## □ CVaR偏差最小化 ⇔ CVaR最小化 [7]

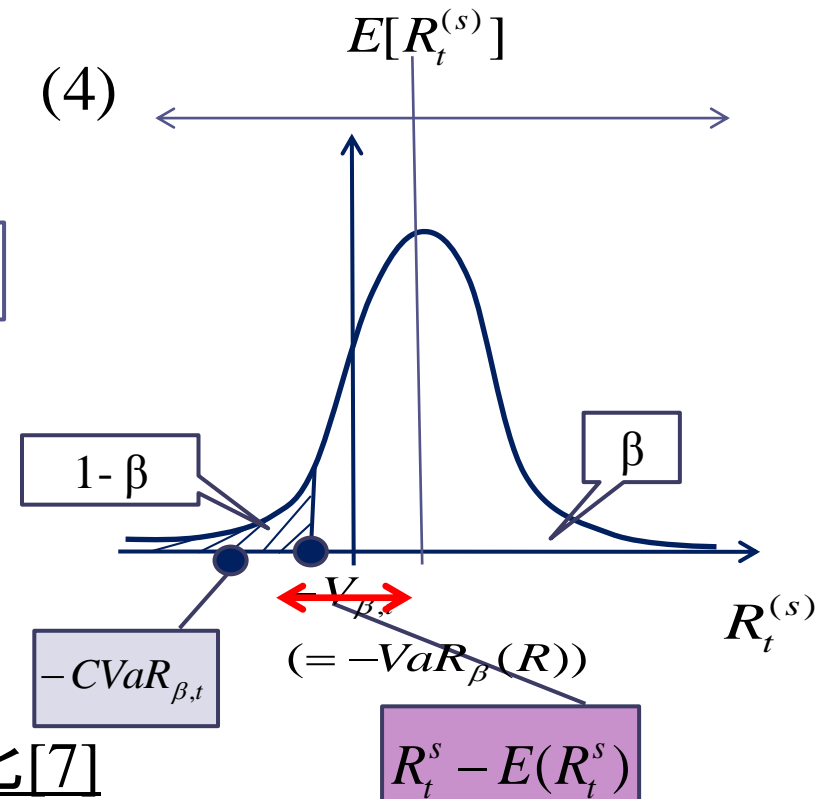
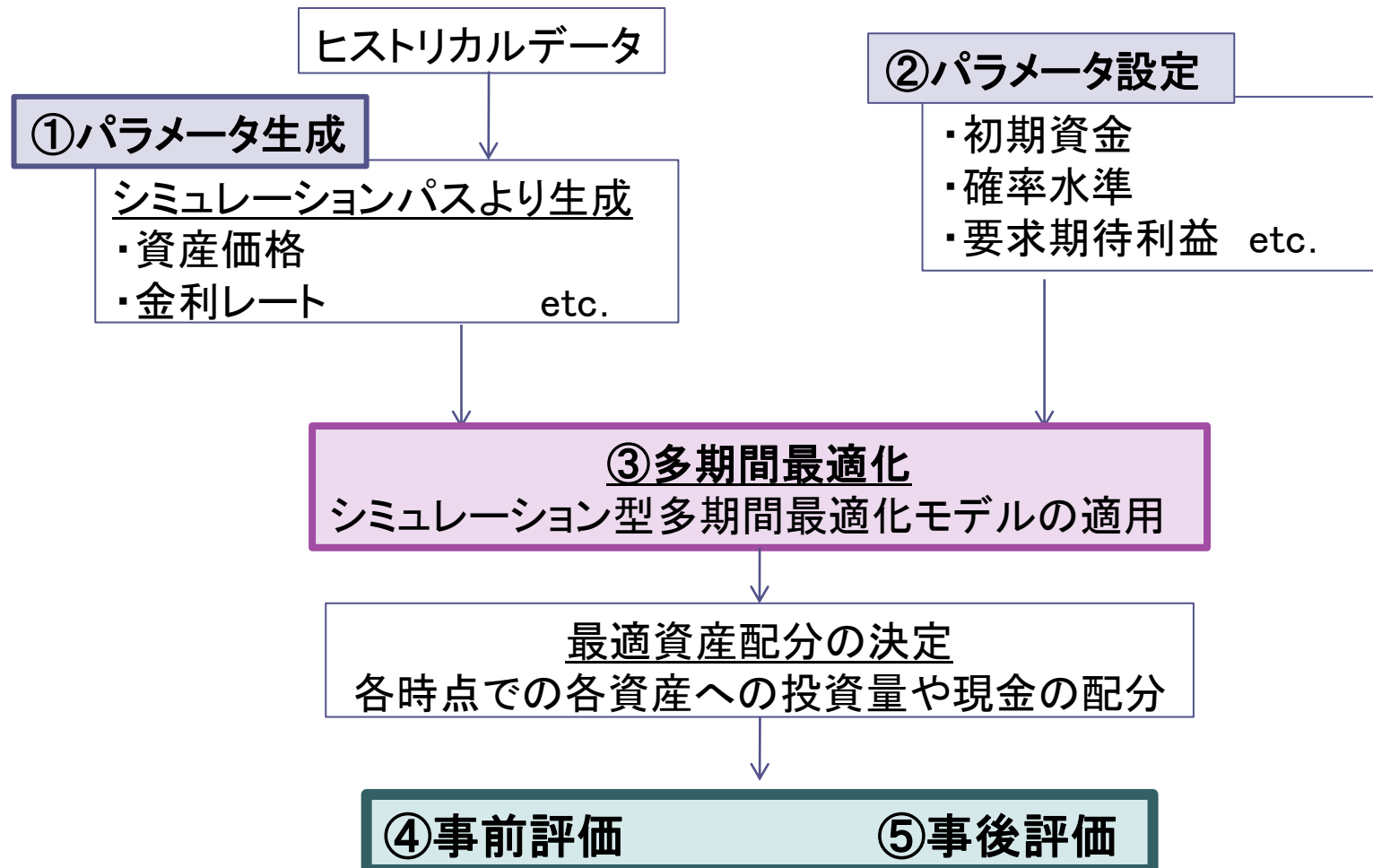


図6: CVaR偏差の概念

# 解法手順

12



# ①パラメータ生成

13

- 幾何ブラウン運動に従うと仮定し、シミュレーションパスを生成する。

<資産価格>

$$dP = \mu_P P dt + \sigma_P P dz \quad (5)$$

<金利>

$$dr = \mu_r r dt + \sigma_r r dz \quad (6)$$

$P$  : 資産価格  
 $r$  : 金利  
 $\mu$  : t時点での経路sの資産jの収益率  
 $\sigma$  : t時点の資産jの収益率のボラティリティ  
 $dz$  :  $\Sigma$  の相関をもつウィーナー過程  
 $\Sigma$  : 資産間, 時点間を考慮した相関行列

- (5),(6)式を離散化してパス生成に使用

$$P(t + \Delta t) = P(t) \exp \left[ \left( \mu_P - \frac{\sigma_P^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_P \varepsilon_{P_t} \sqrt{\Delta t} \right] \quad (7)$$

$$r(t + \Delta t) = r(t) \exp \left[ \left( \mu_r - \frac{\sigma_r^2}{2} \right) \Delta t + \sigma_r \varepsilon_{r_t} \sqrt{\Delta t} \right] \quad (8)$$

# ①パラメータ生成

14

## □ 設定条件

- ・期間T:3期間
- ・対象資産:国内の株式, 債券, CB(転換社債), 現金(1993/04~1999/03)
- ・初期資産価格  $P(0) : 1$
- ・シミュレーションパスS:500
- ・初期金利  $r(0) : 0.15\%$  (99/04時点)

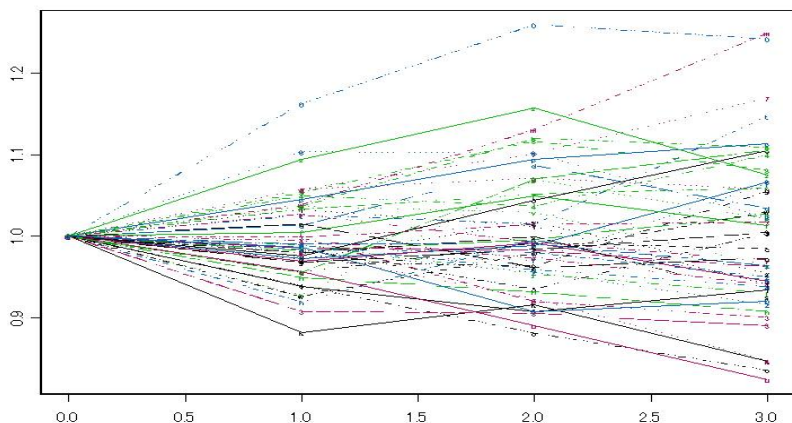


図7: 株価のシミュレーションパス(1~50パス)

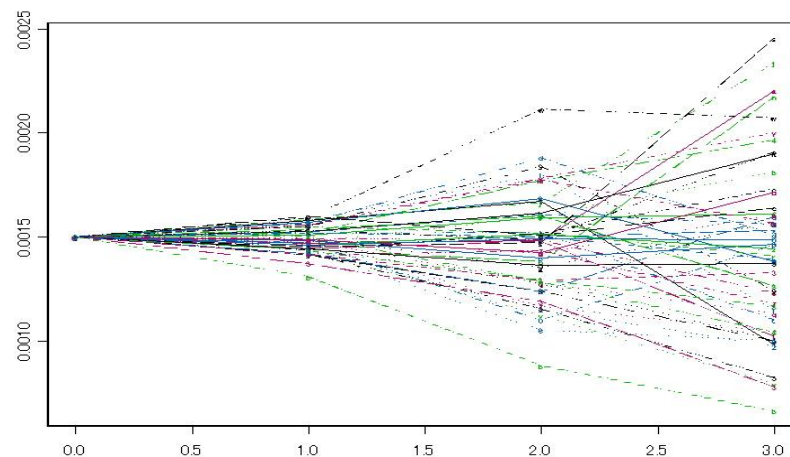


図8: 金利のシミュレーションパス(1~50パス)

# ③最適化モデル —記号定義—

15

パラメータ		決定変数	
$\rho_{j0}$	0時点での資産危険資産jの価格	$v_0$	0時点の現金
$r_0$	1時点の金利	$v_t^{(s)}$	t時点での経路sの現金
$W_0$	0時点の資金(初期資金)	$z_{jt}$	t時点での危険資産jへの投資量
$W_E$	最終時点における要求期待利益	$W_t^{(s)}$	t時点での経路sの利益
$\beta_t$	VaRの水準	$R_t^{(s)}$	t時点での経路sの利益率
$V_{\beta,t}$	t時点のVaR	$u_t^{(s)}$	t時点での経路sの損失が $V_{\beta,t}$ を下回る値
$wf_t$	t時点の重み	$yB_{j,t}$	t時点での危険資産jの購入量
$tc$	取引コスト	$yS_{j,t}$	t時点での危険資産jの売却量
シナリオ依存のパラメータ		添え字	
$\rho_{jt}^{(s)}$	t時点での経路sの危険資産jの価格	$t$	期間 $t = 1, \dots, T$
$r_{t-1}^{(s)}$	t時点での経路sの金利	$s$	シミュレーションパス $s = 1, \dots, S$
$df_t$	t時点の割引率	$j$	危険資産 $j = 1, \dots, n$

# ③最適化モデル —制約式—

資金の源泉(左辺)

=

資金の使途(右辺)

【0時点の配分決定】

$$W_0 = \sum_{j=1}^n (1+tc)\rho_{j0}z_{j0} + v_0 \quad (9)$$

【1時点】

$$\begin{aligned} W_1^{(s)} &= \sum_{j=1}^n (1-tc)\rho_{j1}^{(s)}yS_{j1} + (1+r_0)v_0 \\ &= \sum_{j=1}^n (1+tc)\rho_{j1}^{(s)}yB_{j1} + v_1^{(s)} \end{aligned} \quad (10)$$

$(s = 1, \dots, S)$

【t時点(t=2, …, T-1)】

$$\begin{aligned} W_t^{(s)} &= \sum_{j=1}^n (1-tc)\rho_{jt}^{(s)}yS_{jt} + (1+r_{t-1}^{(s)})v_{t-1}^{(s)} \\ &= \sum_{j=1}^n (1+tc)\rho_{jt}^{(s)}yB_{jt} + v_t^{(s)} \end{aligned} \quad (11)$$

$(s = 1, \dots, S; t = 1, \dots, T)$

$$z_{jt-1} + yB_{jt} - yS_{jt} = z_{jt} \quad (12)$$

$(j=1, \dots, n; t=1, \dots, T-1)$

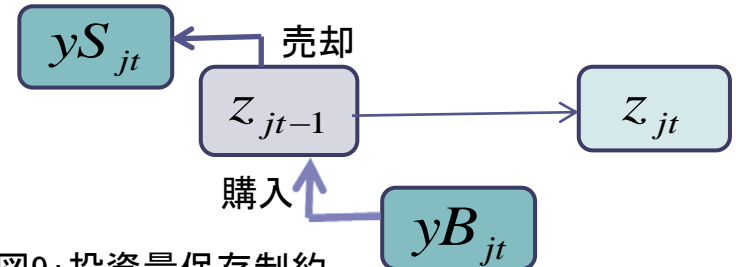


図9: 投資量保存制約

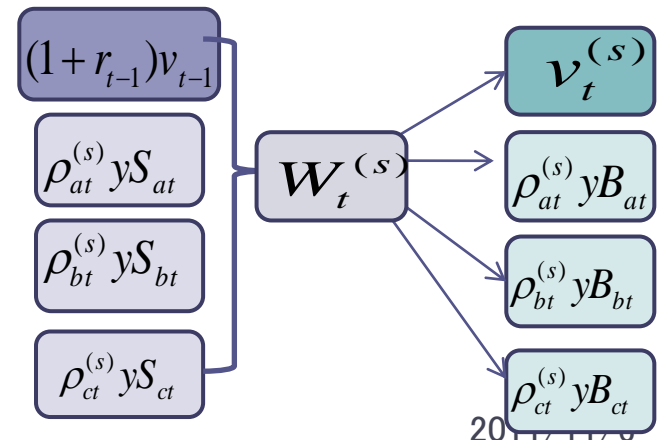


図10: t時点の配分決定



# ③最適化モデル —まとめ—

17

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^T wf_t df_t \left( V_{\beta,t} + \frac{1}{(1-\beta)S} \sum_{s=1}^S u_t^{(s)} \right) \quad (\text{a-1})$$

subject to

【投資量保存制約】

$$W_0 = \sum_{j=1}^n (1+tc) \rho_{j0} z_{j0} + v_0 \quad (\text{a-2})$$

$$W_1^{(s)} = \sum_{j=1}^n (1-tc) \rho_{j1}^{(s)} y S_{j1} + (1+r_0) v_0 = \sum_{j=1}^n (1+tc) \rho_{j1}^{(s)} y B_{j1} + v_1^{(s)} \quad (\text{a-3})$$

(s = 1, ..., S)

$$W_t^{(s)} = \sum_{j=1}^n (1-tc) \rho_{jt}^{(s)} y S_{jt} + (1+r_{t-1}^{(s)}) v_{t-1}^{(s)} = \sum_{j=1}^n (1+tc) \rho_{jt}^{(s)} y B_{jt} + v_t^{(s)} \quad (\text{a-4})$$

(s = 1, ..., S; t = 1, ..., T)

$$z_{jt-1} + y B_{jt} - y S_{jt} = z_{jt} \quad (\text{a-5})$$

【目的関数に関する制約】

$$R_t^{(s)} - E(R_t^{(s)}) \geq -V_{\beta,t} - u_t^{(s)}, (s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T) \quad (\text{a-6})$$

$$R_t^{(s)} = \frac{W_t^{(s)}}{W_0} - 1, (s = 1, \dots, S; t = 1, \dots, T) \quad (\text{a-7})$$

$$E(R_t^{(s)}) = \frac{\bar{W}_t^{(s)}}{W_0} - 1, (t = 1, \dots, T) \quad (\text{a-8})$$

$$\bar{W}_1 = \sum_{j=1}^n \bar{\rho}_{j1} z_{j0} + (1+r_0) v_0 \quad (\text{a-9})$$

$$\bar{W}_t = \sum_{j=1}^n \bar{\rho}_{jt} z_{jt-1} + \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S (1+r_{t-1}^{(s)}) v_{t-1}^{(s)}, (t = 2, \dots, T) \quad (\text{a-10})$$

【期待利益の制約&非負条件】

$$\bar{W}_T \geq W_E \quad (\text{a-11})$$

$$z_{jt} \geq 0 \quad (\text{a-12})$$

$$(j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$v_0 \geq 0 \quad (\text{a-13})$$

$$v_t^{(s)} \geq 0 \quad (\text{a-14})$$

$$(t = 1, \dots, T-1; s = 1, \dots, S)$$

$$y B_{j,t} \geq 0 \quad (\text{a-15})$$

$$y S_{j,t} \geq 0 \quad (\text{a-16})$$

$$(j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T-1)$$

$$u_t^{(s)} \geq 0 \quad (\text{a-17})$$

$$(j = 1, \dots, I; t = 1, \dots, T)$$

2011/11/6

励賞

# 数値実験概要

18

- CVaR偏差を導入した, 多目標多期間モデルを使用し, **重み付け**や**確率水準  $\beta$** による変化を分析

\*使用ソフトウェアはS+NUOPT

## □ ②パラメータ設定

- ・初期資金  $W_0$  (百万円): 10000
- ・要求期待利益  $W_E$ : 10055 ~ 10155
- ・ウェイト  $wf_t$ :
- ・取引コスト0.01%
- ・確率水準  $\beta_t$ :

表1: ウェイト

$(wf_1, wf_2, wf_3)$	
(1,1,1)	(1,5,10)
(0,0,1)	(1,1,100)

表2: 確率水準

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$	
(0.95,0.95,0.95)	(0.95,0.95,0.85)
(0.95,0.95,0.90)	(0.85,0.90,0.95)

## □ 評価方法

- ④事前評価: リスクと利益のバランスを効率フロンティアで比較
- ⑤事後評価: 検証期間におけるパフォーマンス(収益率)を比較

# ④重み変化(効率フロンティア)

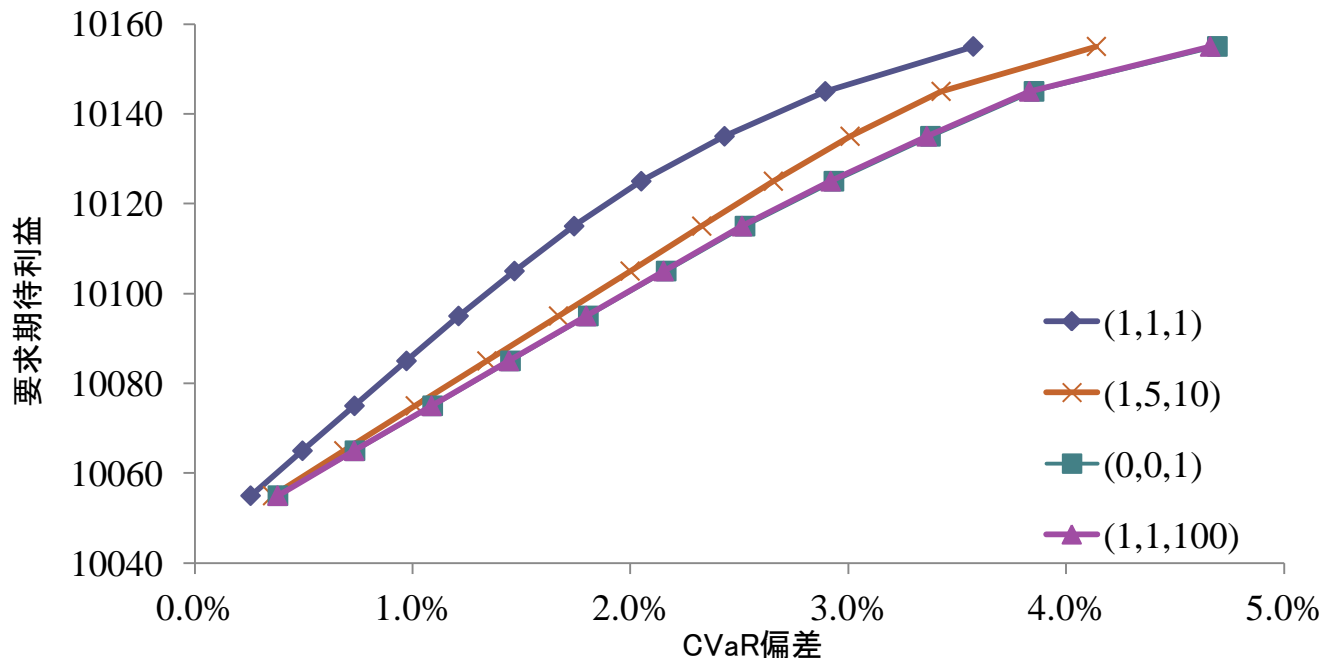


図11: 効率フロンティア(重み変化)

- (1,1,100)は極端に3時点目の重みを重視⇨CVaR多期間モデル[重み付け(0,0,1)]
- リスク全体を評価する多目標CVaR多期間モデルの方が左側に位置⇒有効性を発揮

## ④重み付け変化(CVaR偏差推移)

20

- 各要求期待利益における, 各(1,2,3)時点のリスクCVaR偏差

表3: 各ケースのCVaR

要求期待利益	CVaR[1]		CVaR[2]		CVaR[3]	
	(1,1,1)	(1,1,100)	(1,1,1)	(1,1,100)	(1,1,1)	(1,1,100)
10055	0.01%	0.22%	0.24%	0.36%	0.52%	0.38%
10065	0.03%	0.41%	0.47%	0.70%	0.99%	0.74%
10075	0.05%	0.57%	0.71%	1.01%	1.44%	1.10%
10085	0.07%	0.77%	0.95%	1.34%	1.91%	1.46%
10095	0.09%	0.95%	1.19%	1.66%	2.38%	1.81%
10105	0.19%	1.13%	1.53%	1.99%	2.70%	2.17%
10115	0.34%	1.34%	1.87%	2.25%	3.03%	2.54%
10125	0.88%	1.80%	2.01%	2.54%	3.28%	2.95%
10135	1.45%	2.20%	2.32%	2.84%	3.56%	3.39%
10145	2.02%	2.45%	2.71%	3.05%	3.98%	3.87%
10155	2.72%	2.72%	3.32%	3.32%	4.71%	4.71%

- 1,2時点のリスクは(1,1,1)の方が低い値をとっている。
- 3時点目は(1,1,100)がやや低い値をとっている。

⇒ 全体リスクを考慮した方が期中リスクを制御できる。

# ④β 変化(効率フロンティア)

21

## □ 期間中のCVaR偏差の効率フロンティア(1,2時点目)

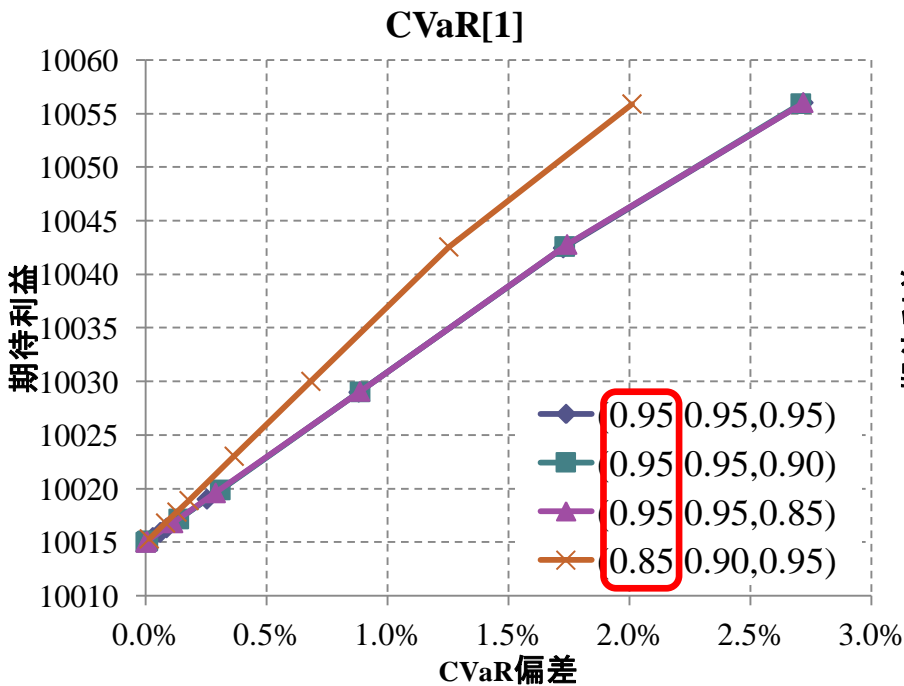


図12: 効率フロンティア (CVaR[1])

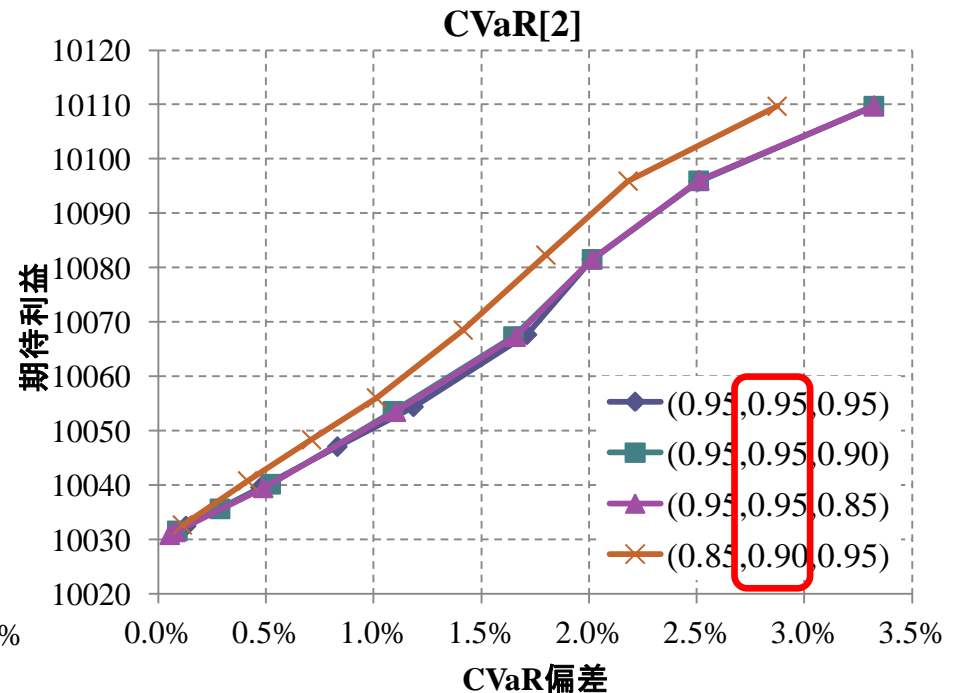


図13: 効率フロンティア (CVaR[2])

- 確率水準が同じものは同一の効率フロンティアを描く
- 確率水準が低い方が, 左に位置する.

# ④β 変化(効率フロンティア)

22

## □ CVaR偏差[3]の効率フロンティア(3時点目)

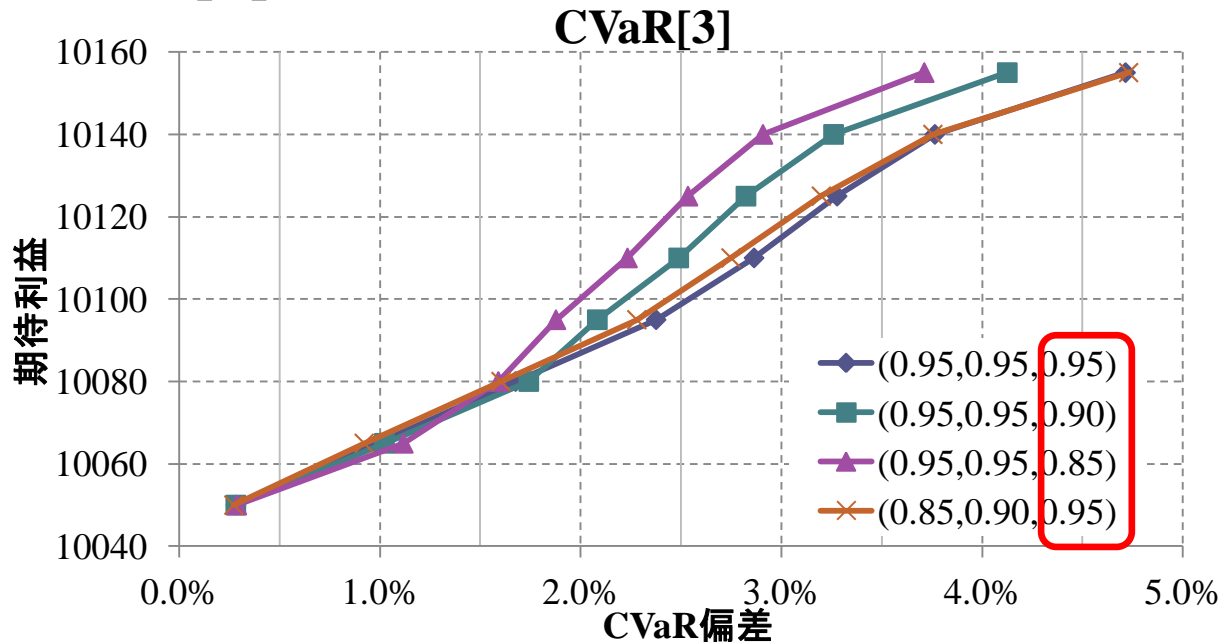


図14: 効率フロンティア(CVaR[3])

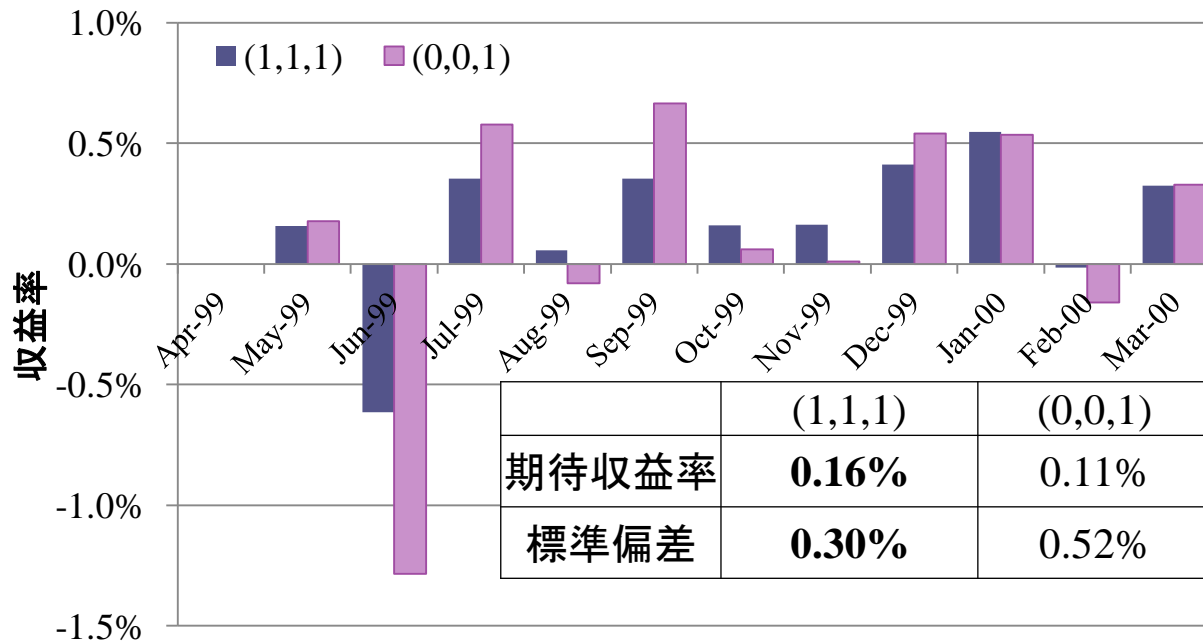
- 同じ確率水準のものは同じフロンティアを描く。
- 他の時点の確率水準の影響は受けない。

➡ 期中リスク考慮より, 各時点でのリスク許容度の設定可

# ⑤ 事後評価

23

- Step1. 検証期間(1999/04~2000/03)の各月ごとにパスを発生
- Step2. 発生させたパスをモデルに入力, 最適解を算出
- Step3. 翌月の実際の価格データを入力し, 収益率算出
- Step4. Step1~3を最後の月まで繰り返す



- (1,1,1)のモデル方が変動リスクが少ない.
- 結果的に検証期間中の期待収益率も(0,0,1)を上回った.

図15: 検証期間のパフォーマンス(We=10150)

# まとめ

24

- CVaR偏差をリスク値として，多目標多期間モデルの構築と有効性について検証.
  - 重み付け変化
    - 全体リスクを考慮した重み付けの方がモデルとして，有効性を発揮する.
    - 上記の重み付けの方が，期中リスクを制御できる.
  - $\beta$  変化
    - 多目標多期間モデルは，時点ごとにリスク許容度を設定できる.
  - 事後評価
    - 多目標多期間モデルは変動リスクが少なく，損失を抑えられる.



# 参考文献

- [1] Fabian, C.I. and Veszpremi, A.: “Algorithms for handling CVaR-constraints in dynamic stochastic programming models with applications to finance”, *Stochastic Programming E-Print Series* Volume 2007 Nr. 10. Accepted for publication in *Journal of Risk*
- [2] Konno, H., Tanaka, K. and Yamamoto, R.: “Construction of a portfolio with shorter downside tail and longer upside tail”, *Computational Optimization and Applications-Springer* (2009)
- [3] 枇々木 規雄: “戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル”, *Journal of Operations Research Society of Japan*, 44, No.2, pp169-192. (2001)
- [4] Ji, X., Zhu, S.S., Wang, S.Y. and Zhang, S.Z.: “A stochastic linear goal programming approach to multistage portfolio management based on scenario generation via linear programming”, *IIE Transactions* 37, 957 - 969(2005)
- [5] Mansini, R., Ogyryczak, W. and Speranza, M.G.: “Conditional value at risk and related linear programming models for portfolio optimization”, *Annals of Operations Research* 152, 227-256 (2007)
- [6] Ogyryczak, W.: “Multiple criteria linear programming model for portfolio selection”, *Annals of Operations Research* 97 143-162 (2000)

# 参考文献

- [7] Rockafellar, R.T., Urayasev, S. and Zabarankin, M.: “Generalized deviations in risk analysis”, *Finance Stoch.*, 10 (2006), pp. 51–74
- [8] Zhu, S.S., Li, D. and Wang, S.Y.: “Risk Control over Bankruptcy in Dynamic Portfolio Selection: A Generalized Mean-Variance Formulation”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49, 447-457(2004)
- [9] J.M. Mulvey and W.T. Ziemba: Asset and liability allocation in global environment. In R.A. Jarrow, V. Maksimovic and W.T. Ziemba (eds.): *Handbooks in OR & MS*, Vol.9 435-463 (Elsevier Science, 1995)
- (翻訳) 枇々木 規雄: グローバル環境における資産負債配分. 今野浩, 古川浩一編著: ファイナンスハンドブック, 424-450, 朝倉書店 (1997)
- [10] 枇々木 規雄: 金融工学と最適化, 朝倉書店 (2001)
- [11] 伏見多美雄, 福川忠昭, 山口俊和: 経営の多目標計画問題, 森北出版株式会社 (2003)

# Appendix

# LPM (Lower Partial Moments)

28

## □ 目的関数

LPM (Lower Partial Moments) = 下方部分積率

$$LPM_1 = \min \left\{ \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S y_T^{(s)} \mid W_T^{(s)} + y_T^{(s)} \geq W_G; s = 1, \dots, S \right\} \quad (13)$$

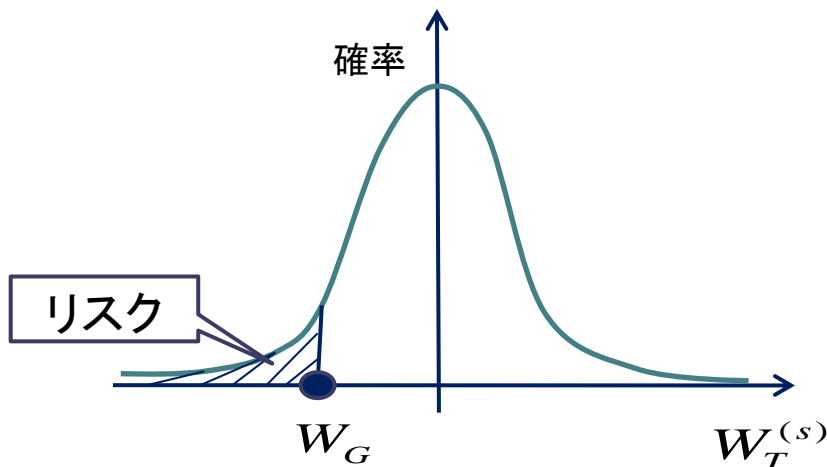


図16: LPM (下方部分積率) の概念

### パラメータ

$S$  : シミュレーションパス  $s = 1, \dots, S$

$t$  : 期間  $t = 1, \dots, T$

$W_G$  : 目標利益

### 決定変数

$y_T^{(s)}$  : 最終時点の経路  $s$  における不足利益

$W_T^{(s)}$  : 最終時点の経路  $s$  における利益

# ヒストリカルデータ

29

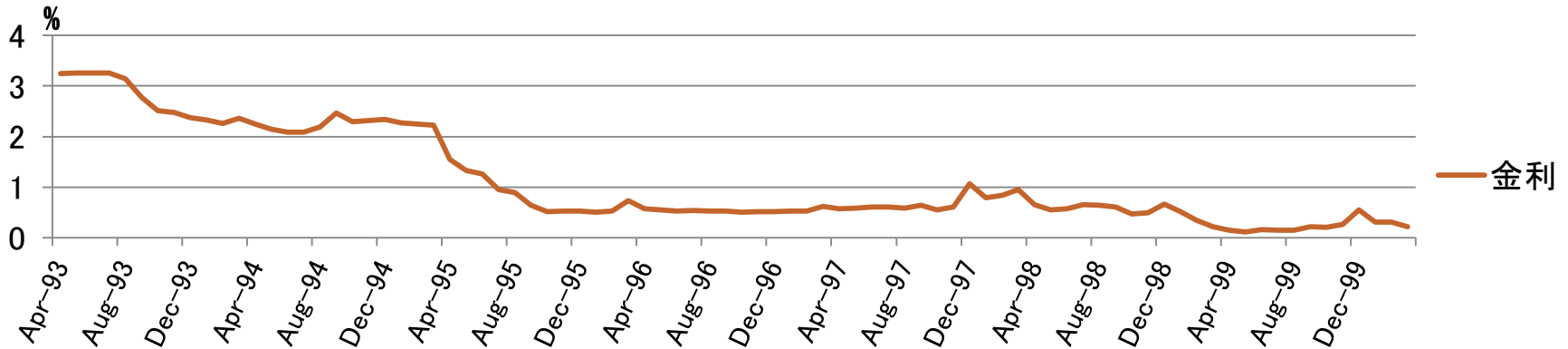


図17: 金利

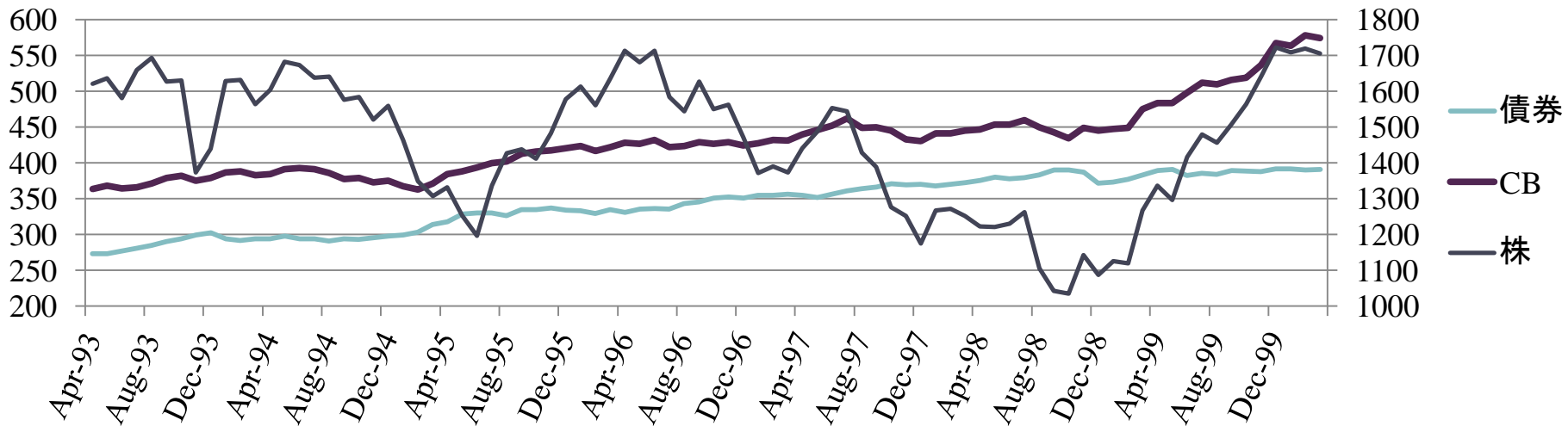


図18: 株(TOPIX) &amp; 債券 &amp; CB

# 基本統計量(シミュレーション用)

30

表4: 各資産の収益率の基本統計量

		金利			株式			債券			CB		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
期待値		-0.0172	-0.0408	-0.0176	-0.0019	0.0032	-0.0017	0.0058	0.0054	0.0031	0.0029	0.0063	0.0042
SD		0.0495	0.1496	0.2361	0.0617	0.0500	0.0592	0.0127	0.0115	0.0122	0.0166	0.0125	0.0202
相関係数		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
金利	1	1.0000											
	2	0.4986	1.0000										
	3	0.0916	0.1176	1.0000									
株式	1	-0.2254	-0.4320	0.0019	1.0000								
	2	0.1259	-0.1006	0.1072	0.1047	1.0000							
	3	-0.0482	0.1513	-0.3312	0.0592	-0.2097	1.0000						
債券	1	-0.0567	0.1076	0.0365	-0.4788	0.1693	0.0227	1.0000					
	2	0.0283	-0.0689	-0.1280	-0.1764	-0.2963	0.0625	0.0256	1.0000				
	3	0.0304	-0.0171	-0.3894	-0.1423	0.2620	-0.0771	0.2919	0.0148	1.0000			
CB	1	-0.5898	-0.4877	-0.0711	0.7283	0.0555	0.2057	-0.0342	-0.0060	-0.1093	1.0000		
	2	-0.1256	-0.4488	-0.1344	0.1676	0.5040	-0.0048	0.0835	0.3211	0.1681	0.2306	1.0000	
	3	-0.0239	0.0697	-0.2727	0.2513	-0.0925	0.8520	0.1118	0.0410	0.0944	0.3458	0.0746	1.0000

# シミュレーションパス

31

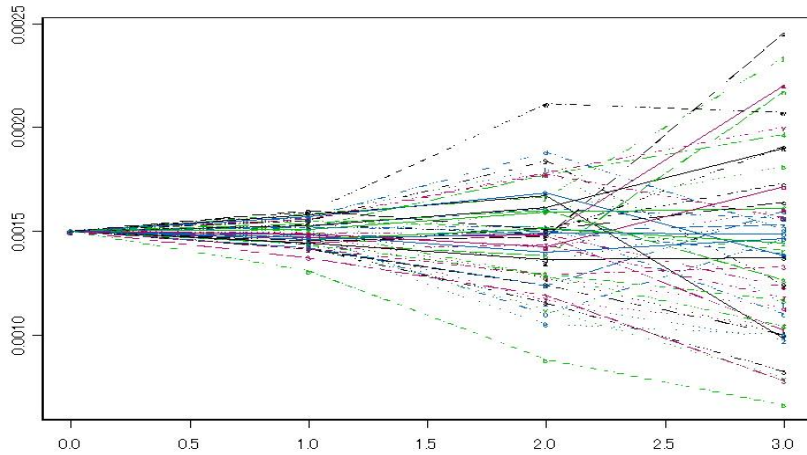


図19: 金利のシミュレーションパス(1~50パス)

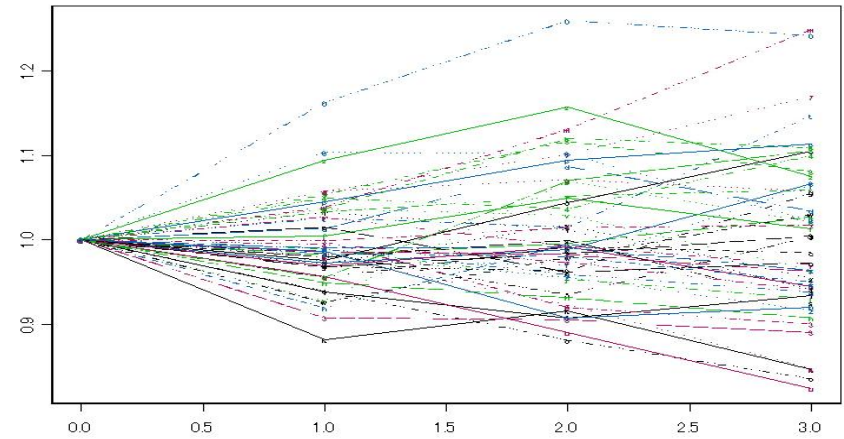


図20: 株のシミュレーションパス(1~50パス)

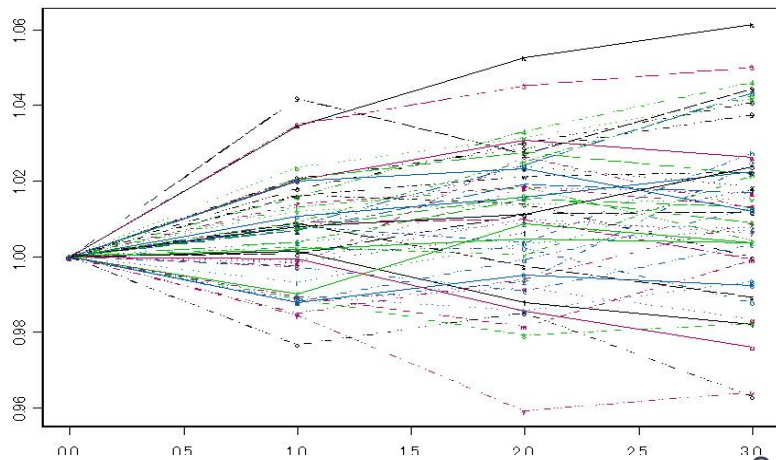


図21: 債券のシミュレーションパス(1~50パス)

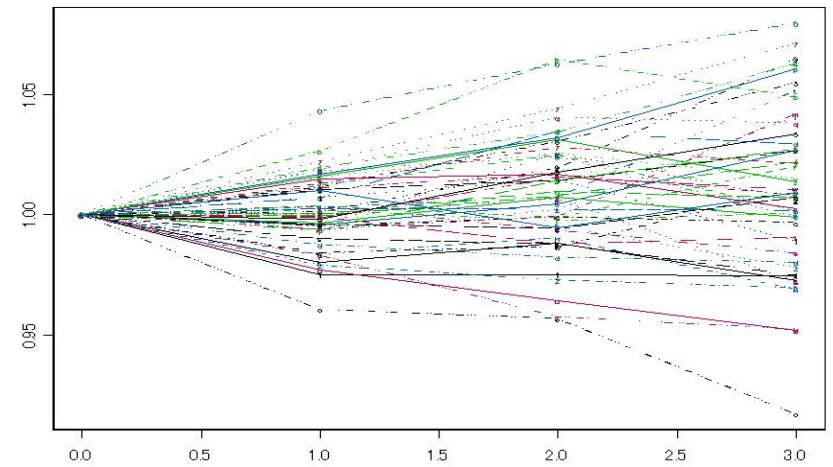


図22: CBのシミュレーションパス(1~50パス)

# 投資配分比率

32

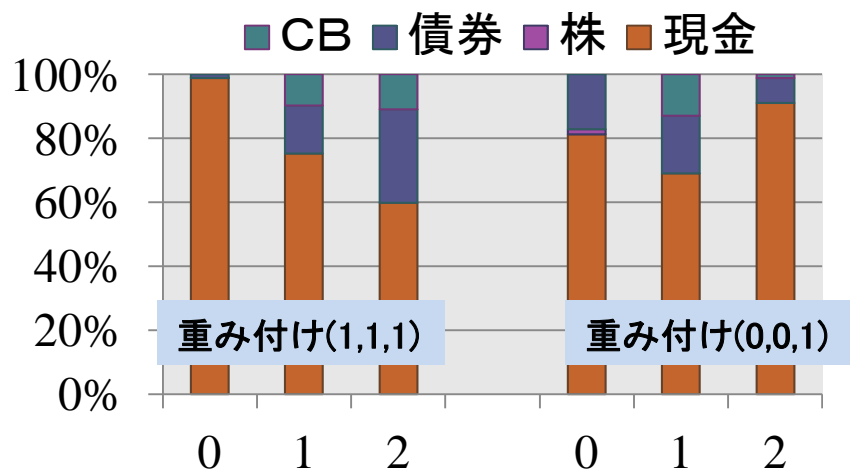


図23: We=10065の時

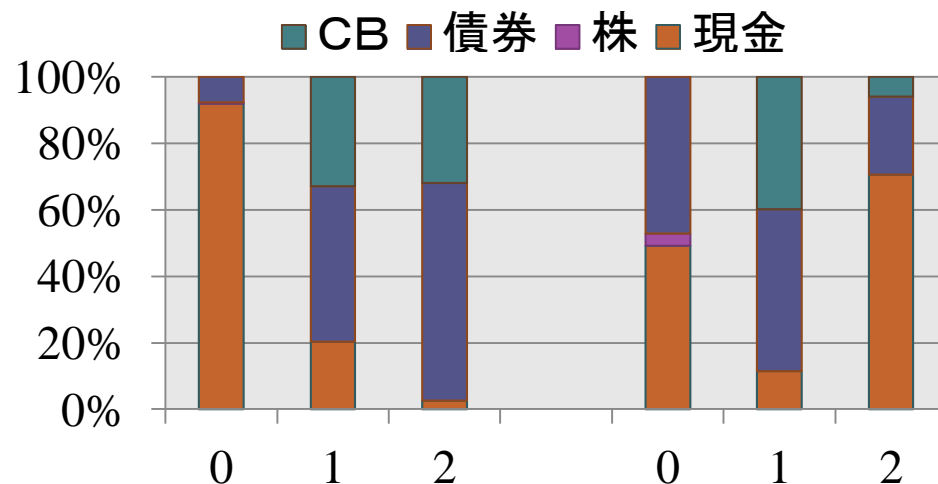


図24: We=10105の時

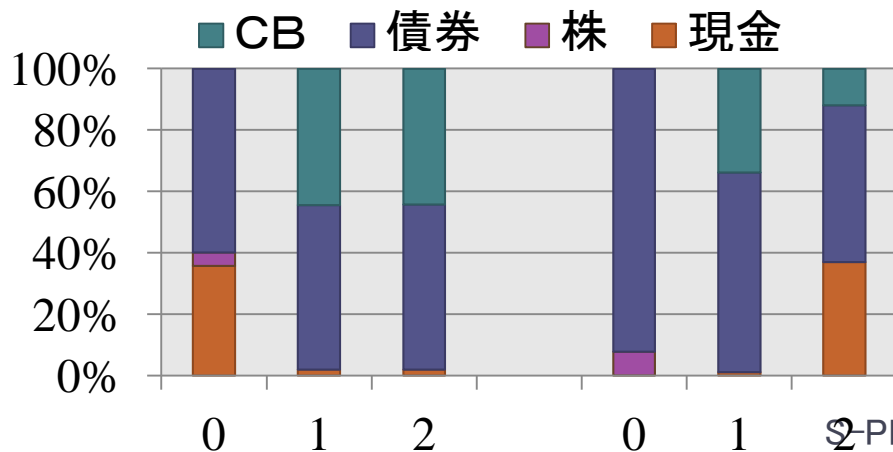


図25: We=10135の時

- 要求期待利益が少ない時ほど、現金を保有する。
- (0,0,1)は3時点目の現金の保有が一番大きい。



# モデルの規模

33

## □ 多期間確率計画モデル

表5: 多期間確率計画モデルの規模

変数総数	$(n + S)T + 1$
制約式総数	$TI + 2$

$n$  : 資産数  
 $T$  : 期間数  
 $I$  : シミュレーションパス数

## □ 多目標多期間確率計画モデル

表6: 多目標多期間確率計画モデルの規模

変数総数	$(n + S)T + 1$
制約式総数	$(2T - 1)I + 2$

+  $(T - 1)I$