

# 数理計画モデルのデザインパターンと NUOPT

株式会社 数理システム

田辺 隆人

tanabe@msi.co.jp

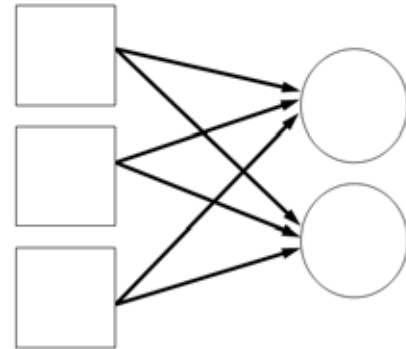
## 1 モデリングとデザインパターン

数理計画法の適用にはまず現実の事象をモデル化(モデリングと呼ばれる)する必要がある。数学的なアルゴリズムによる解析のために必須のプロセスではあるが、多くは経験や勘に頼りつつ人手で行われるため、計算機の発達之恩恵を比較的受けずらく、数理計画の適用の敷居を高くしている事実も否めない。本稿では、このプロセスを容易化するため、数理モデルを既知の「デザインパターン」の組み合わせとしてとらえ、そのような特性を持つモデルの解析ツールとして数理計画法パッケージNUOPTの機能と特徴をまとめてみる。

### 1.1 輸送

配送元と配送先を結ぶ二部グラフの辺に定義された配送量を変数、各配送元や配送先では所定量・需要量の制約を付加するパターン。辺には配送量の制約が課され、配送量に依存したコスト関数が定義される。ヒッチコック型の輸送問題(特殊解法とそのエンジンが存在する)が最も基本的な形で、生産地とデポ、デポと需要地を結ぶ物流の最適化モデル、配送計画モデルの基本的コンポーネントとして用いられる。

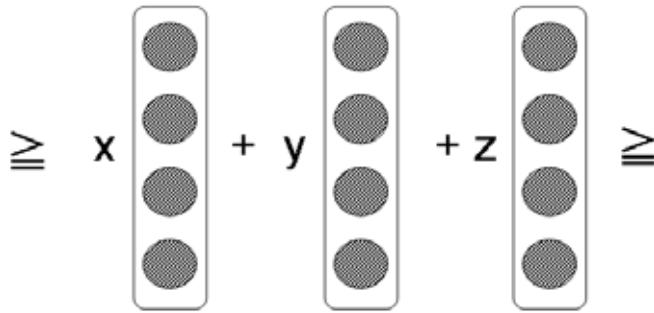
配送量が時刻毎に変動する場合には、倉庫など時系列にまたがった保存を行うコンポーネントが結合し、後述する「ネットワーク」のパターンと結合する。配送量が複数種別存在する場合には後述する多品種流問題と同様に、品種毎に別の変数を立て、各辺に課されている配送量の制約でそれらを同時に考慮する。



「輸送」パターン

### 1.2 生産(組み立て・混合)

生産計画モデルにおいて典型的なのは、組み立て産業の場合のように各製品を作成するのに所要する要素部品の数確定しているとき、要素部品の供給量の制約の下、生産した製品の価値を最大化するような生産量を求めるパターン(組み立て型)。また鉱工業製品の場合のように製品が複数の成分を一定比率で持つ原材料を混合してできる場合、製品に含まれる成分に関する制約の下、原材料コストを最小化するような原材料の量を求めるパターン(混合型)の二つである。両者とも要素部品や成分の保存に着目すると同系のモデルとして表すことができる。



「生産」パターン

両者ともに線形計画問題の最も基本的な例として知られる。紙の裁断問題(組み立て型)、ダイエット問題(混合型)は広く知られており、線形計画法の入門書の例題として頻りに現れる。ただ、実際にはこれらが単独で現れること

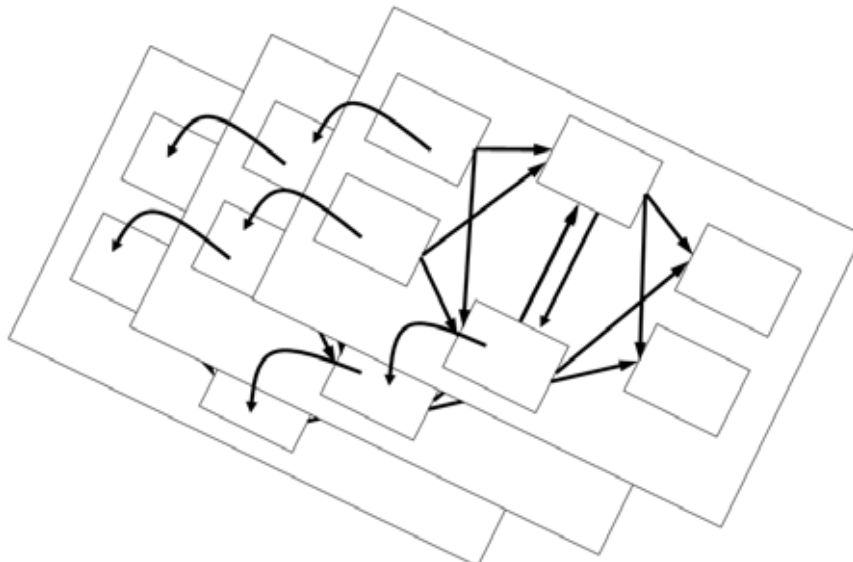
とはあまりなく、「輸送」パターンと結合して、生産・配送問題となったり、時系列の「ネットワーク」パターンと結合して、生産・在庫計画問題となる。応用例として紙の裁断問題がある。

原材料を混合する操作が化学変化などを伴う場合には、成分に関する制約が非線形な関係となり、モデル全体は非線形計画問題となる。

### 1.3 ネットワーク(空間的・時系列的)

プラントや電気回路のようにモデルにあらわれる要素が一般に有向グラフの形で表現されるように結合し、グラフの各辺で流量の保存が成り立っている場合に適用されるパターン。各辺の流量を変数とし、各要素における保存を示す等式制約が基本的な制約、そのほか各辺の流量の制約や、流量に依存するコスト関数を定義する(空間的ネットワーク)。

流量が時系列的に変化し、ネットワークに流量の時系列的な蓄積を許す要素(配送問題における



「ネットワーク」パターン

倉庫、石油精製におけるタンク、プラントにおける蓄熱槽・蓄電池)が含まれている場合、流量の時系列方向の保存を示す制約を考慮する等式制約を加える(時間的ネットワーク)。

ネットワーク最適化問題の多くは空間的ネットワークのパターンによって記述

され、最も基本的なのが最小コスト流問題である。流量が複数種類存在する多品種流問題では品種毎に別の変数を立て、各辺に課されている流量の制約でそれらを同時に考慮する。時系列ネットワークと「生産」・「輸送」パターンとを組み合わせるのが、生産・在庫計画を含むロジスティク

モデルである。また金融分野における資金繰りの問題(キャッシュフローマッチング[9])も時系列ネットワークの応用と考えることができる。ただし、この場合の流量である金額は正確な保存ではなく、収益に応じた量を付加したものが1タイムステップ先の量に寄与する。

冷暖房や発電プラントの最適化問題は空間的・時間的ネットワーク両方のパターンの結合であることが多い。前者は機器の結合関係、後者は運転スケジュールに相当する。プラントの最適化問題ではさらに後述する「選択」パターンが融合しているため、混合整数計画法となり、計算時間を所要する。

#### 1.4 確率的分布

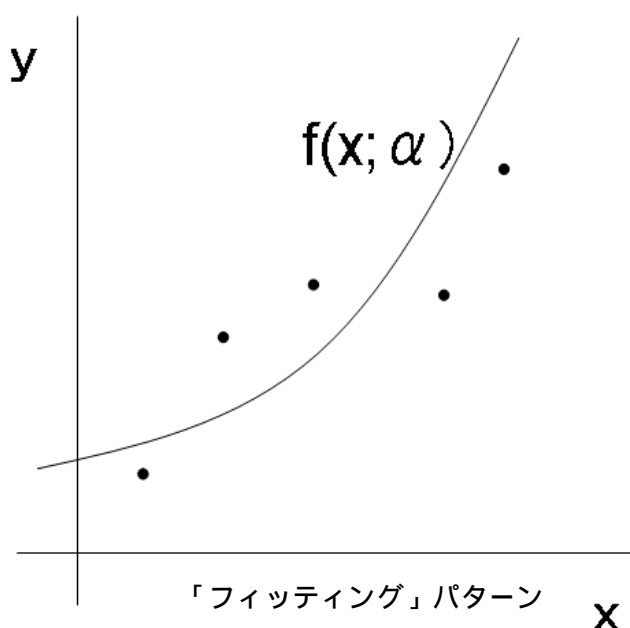
決定変数の関数として、ある量に関する分布が得られ、分布全体の統計的な特性に関する制約や目的関数が設定されるパターン。ポートフォリオ最適化問題[4]がこの典型で、組み入れ比率に応じて、収益率の分布が得られ、その分布点の平均・分散・積分量・CvaRなどが制約や目的関数として現れる。このパターンを含む問題を確率計画問題と呼ぶ。精度を上げるためには多くの分布点を考慮する必要がある、大規模モデルとなることが多い。金融ポートフォリオにおける多期間モデル[8]は時系列「ネットワーク」のパターンと確率的分布の結合とみなすことができる。



「確率的分布」パターン

#### 1.5 フィッティング

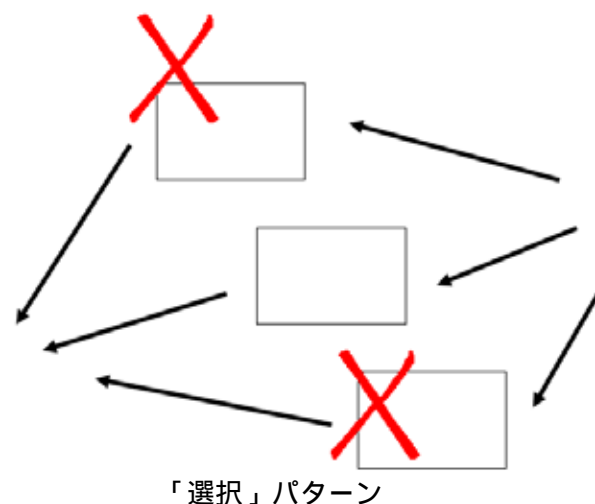
座標とパラメータを与えると値を返すモデル関数の応答をデータに対して最良にする場合に用いられるパターン。モデル関数のパラメータを変数、モデルの応答とデータとして与えられる座標と値の組の関係を制約または目的関数とする。モデル関数を線形関数、応答とデータの差を自乗の和で測り、最小化するようなモデルは線形回帰で、この最も基本的なものである。モデル関数が非線形な場合や誤差の評価関数が異なる場合には一般の非線



形最適化となる。2次計画法による判別分析や格付け行列のフィッティング[3]などはこの一例である。

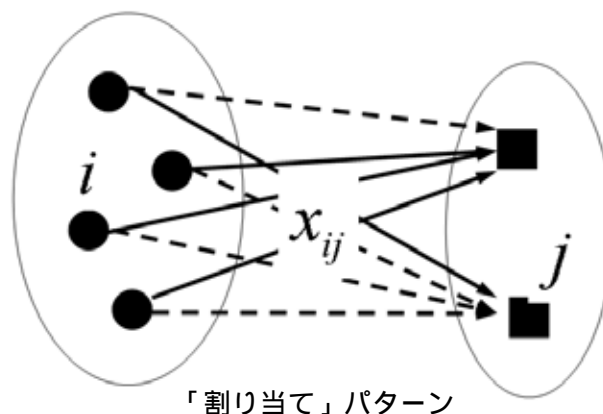
### 1.6 選択

0 - 1変数と他の変数の上下限を連動させることによって、複数のものの選択を表現するパターン。さまざまなパターンと融合することによって、幅広い意思決定のモデルを作成することができる。「配送」や「生産」のパターンとこのパターンを組み合わせると施設の配置や中・長期計画の問題を表現することができる。「確率的分布」のパターンとの組み合わせでは銘柄数制約などの投資制約付きのポートフォリオ問題、「ネットワーク」のパターンとの組み合わせではプラントの運転や機器選定問題などを作成することができる。



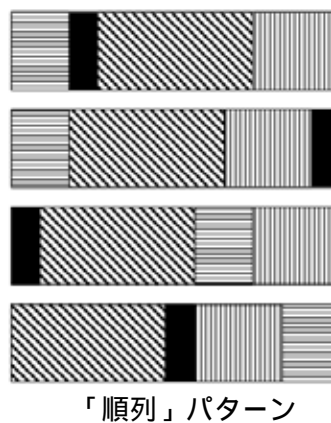
### 1.7 割り当て

二つの集合の要素同士の対応付けを変数とするパターンである。対応付けを0 - 1変数を要素とする行列で示す。人員の部署への配置、リソースへのジョブの割り当て、配送先への配車、時間割決定、ナーススケジューリングなどがこの一種である。時系列構造を含む割り当てはスケジューリング問題と言われ、大規模な整数計画問題(組み合わせ問題)となるため、問題に特化した解法の工夫やメタ・ヒューリスティクスの適用を考慮する必要がある場合も多い。



### 1.8 順列

決まった長さの順列自体を変数とするパターンである。ジョブショップスケジューリング、巡回セールスマン問題、車両経路問題などの組み合わせ問題がこの例であり、データが少量でも大規模組み合わせ問題となるため、メタヒューリスティクスの援用によって解かれる場合が多い。この



パターンと他のパターンの結合によって一般的な系を表現することができるが、モデルの拡張には解法の効率などを総合的に考慮する必要がある。

## 2 NUOPTの機能と数理モデル

### 2.1 求解アルゴリズムとその実装

上記デザインパターンの「輸送」や「ネットワーク」では線形制約がモデルの構造をおおむね決定し、モデルを精密化する際に一部非線形なコストや制約が導入される。

NUOPTの実装は大規模な線形モデルの一部に非線形制約を導入した形式の最適化問題に適しており、線形計画法 二次計画法 非線形計画法と比較的シームレスに移行できることを特徴としているが、その特徴は実際の数理計画法の応用に好適な特徴であることがわかる。

整数変数が必須となるパターン(2.6, 2.7, 2.8)を含まない問題例では、現状の計算機環境では数万変数の問題でも数分というパフォーマンスを発揮するため、むしろ実務上の問題は求解よりもモデリングやモデルの検証プロセスに移って来ていると言える。

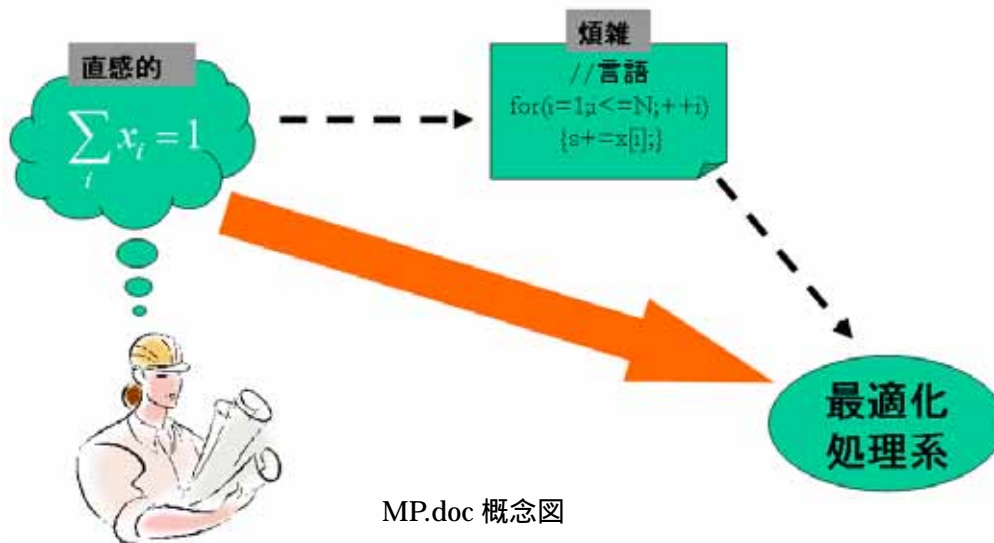
ただ、一般の非線形最適化問題は大域的最適解を求めることは難しく、また解が大域的に最適であるという検証も困難であるため、関数の性質が悪くかつ精度を求められる場合には要注意である。ただ、NUOPTのVer. 7から導入される大域的最適化機能[10](アドイン)によれば小規模の問題は現実的な時間内で大域的最適解、またはかなり良い上下限が得られる。この機能はモデリング言語で記述された問題を自動的に凸緩和し、分枝限定法を行うものである。

難しいのは2.6, 2.7, 2.8のパターンを含む混合整数計画問題であり、分枝限定法のような厳密かつ汎用アルゴリズムが残念ながら実際の規模においては必要十分なパフォーマンスを発揮しないことがある。NUOPTのVer. 7から標準装備される制約充足問題エンジン[3]はメタ・ヒューリスティクスに基づいており、比較的現実的な時間内で大規模組み合わせ問題の実行可能解を与えることができる。このエンジンは特に2.7のパターンを含む問題にその持ち味を発揮する。

### 2.2 問題入力

前項で述べたが、整数変数を含まない典型的な問題については問題の求解速度の向上にともなって、問題を入力・検証するプロセスにソフトウェアを利用する手法の開発が望まれる。2.3のパターンを持つモデルをGUIを通じて入力するシステムはその一つの回答であるが、アプリケーションを限定しないと汎用化は難しい。

NUOPTのバージョンアップに先立って2004年9月に発売されたMP.doc[11]という製品は、このモデル入力プロセスの敷居を低くするための一つの提案であり、汎用的な数式をWord上に入力し、結果をWord上に返すという機能を持つ。これまでのモデルの入力には通常はモデリング言語という形を介する必要があるが、MP.docを使えば机上の数式モデルをそのまま実装に利用することができ、モデルの検討や理解に有益である。



problem  
 Set Asset, Period  
 index  $j \in \text{Asset}, i \in \text{Asset}, t \in \text{Period}$   
 Variable  $x_j$   
 Parameter  $\mu_j, r_{ij}, T = 60$   
 Parameter  $Q_{ij}$   

$$Q_{ij} := \frac{1}{T} \sum_t (r_{it} - \mu_i) \cdot (r_{jt} - \mu_j)$$
 minimize  $z = \sum_{i,j} Q_{ij} x_i x_j$   
 subject to  

$$\sum_j \mu_j \cdot x_j \geq 0.01$$

$$\sum_j x_j = 1$$

$$x_j \geq 0$$

MP.doc によるモデル記述例

### 3 まとめと今後

本稿では、数理計画のモデリングというプロセスに着目し、その観点から NUOPT の機能を論じた。これからも様々な分野の最適化による問題解決に貢献すべく、解法アルゴリズムと実装に改良を重ねてゆく予定である。

(株)数理システムでは最適化を援用したシステムのモデリング・コンサルティングから実際の開発まで様々なサポートを行っております。実際の問題に対する適用の見込みなどのお問い合わせをお待ちしております。

(NUOPT に関する最新情報入手先)

株式会社 数理システム 数理計画室

TEL 03-3358-1701 FAX 03-3358-1727 e-mail: [nuopt-info@msi.co.jp](mailto:nuopt-info@msi.co.jp)

(URL) <http://www.msi.co.jp/nuopt>

#### 参考文献

- [1] NUOPTVer.7 マニュアル, 2004, (株)数理システム
- [2] MP.doc マニュアル, 2004, (株)数理システム
- [3] K. Nonobe and T. Ibaraki, ``An improved tabu search method for the weighted constraint satisfaction problem,`` INFOR, 39, pp.131-151, 2001.
- [4] 今野 浩,理財工学 I,日科技連 1995
- [5] 楠岡成雄・青沼君明・中川秀敏,クレジット・リスクモデル,きんざい 2001
- [6] 高橋,石原,石岡,小野,古塩,須藤,中村,「火力・揚水・水系水力の協調を考慮した需給運用計画機能の開発」,電気学会研究会資料,PE-02-130, 2002
- [7] 柏原,吾妻,佐藤,松岡,田辺,火力発電所石炭払出コンベアラインにおける最適運用スケジューリング方策, 2004 スケジューリング・シンポジウム
- [8] 枇々木規雄:最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル,高橋一編, ジャファイア・ジャーナル[2001] 金融工学の新展開, 2001年6月, pp.89-119
- [9] 今野浩,鈴木賢一,枇々木規雄 共訳,金融工学入門:2002年,日本経済新聞社。(原著:Luenberger, Investment Science, Oxford University Press, 1998.)
- [10] 山下浩,逸見宣博,計算グラフと分枝限定法を利用した大域的最適化,日本オペレーションズリサーチ学会, 2003年秋季研究発表会
- [11]高橋良徳,山下浩,数式による記述で数理計画問題を解く試み,日本オペレーションズリサーチ学会,2003年秋季研究発表会