

拡張型カルマンフィルターを用いた SPDの推定に関する考察

1

法政大学大学院 理工学研究科
システム工学専攻
高橋 明之

発表概要

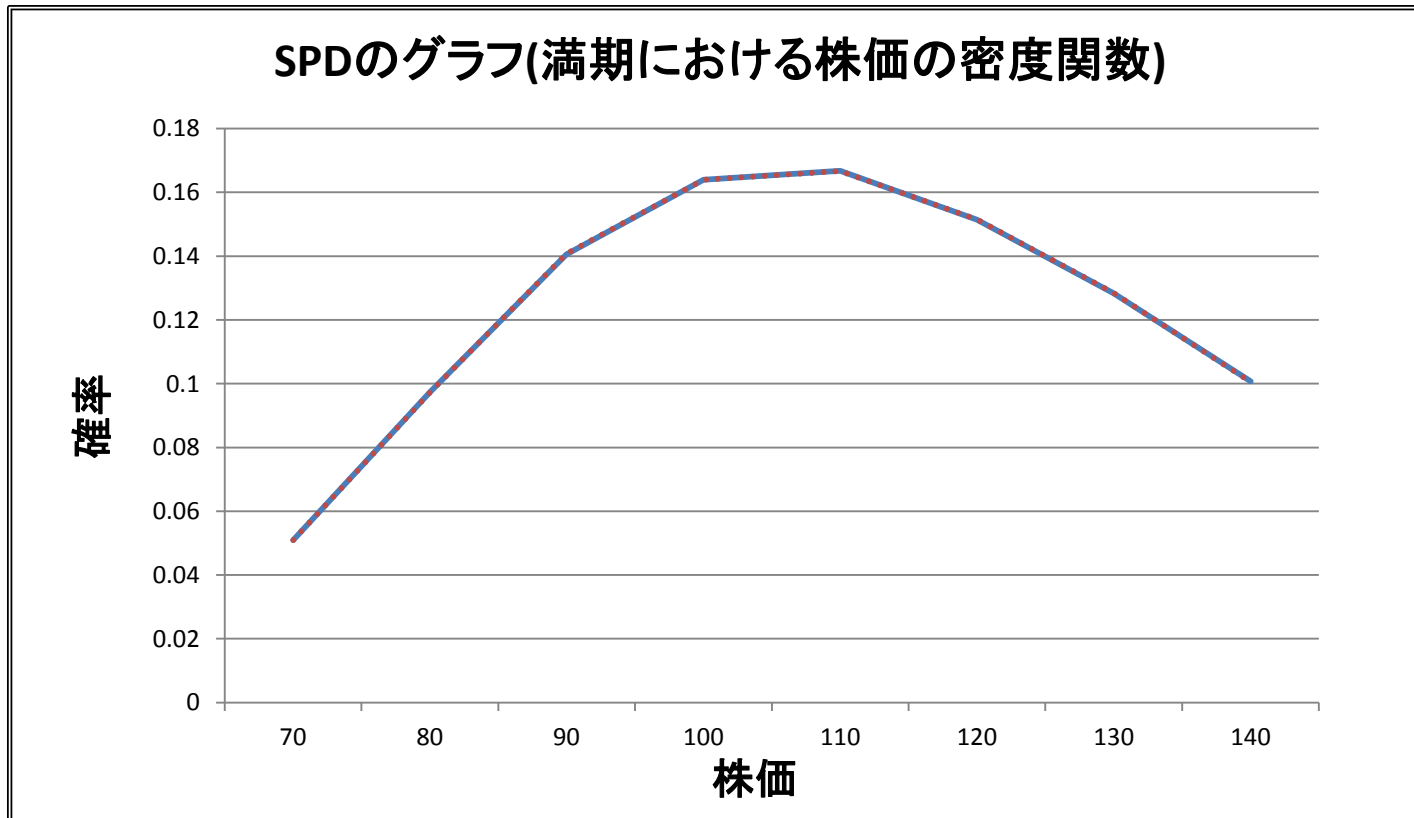
- 本研究の概要
- 日本のオプション市場からSPDの推定を行うことを目的とする。
- SPDは将来の株価の値動きに対する重要な情報を持っており、正確な推定を行うことができれば投資などに応用できると考えられる。
- その為に、シミュレーションデータを用いてSPDの推定手法について考察する。
- その後、拡張型カルマンフィルターを用いて日本のオプション市場におけるSPDの推定を行う。

オプション市場とは

- オプションとは満期日(T)に原資産を行使価格(K)で売買することのできる権利のことであり、原資産が株式であるものを株式オプションという。ここでは株式オプションを考える。
- コールオプションとは買う権利であり、プットオプションとは売る権利である。
- オプション市場では、あらゆる行使価格(日本では500円刻み)でオプションを売買している。
- オプションの価格は1日の中でも分単位で変化している。

SPD(State Price Density)とは

- 満期における株価 S_T の確率密度関数 $f(S_T)$ のことであり、SPDが推定できれば満期日の株価の確率分布を推定できるため、投資などに役立つと考えられる。



SPDの推定手法

SPD: $f(S_T)$ を用いて、コールオプションの価格 $C_t(K, T)$ を表すと、

オプション価格

$$C_t(K, T) = \int_0^{+\infty} (S_T - K)^+ f(S_T) dS_T, \quad (1)$$

コールオプションの
ペイオフ

株価の密度関数

SPD

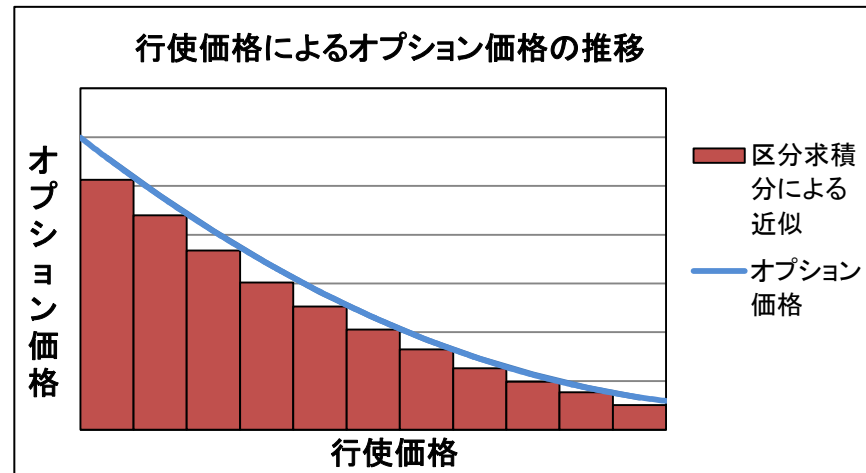
になり、

オプションの価格はペイオフと株価の密度関数(SPD)で表せることがわかる。

SPDの推定手法

この関係式を離散化(区分求積分)することにより、

区分求積分の
イメージ



市場から観測することのできるオプション価格とペイオフからSPDを推定する。

その為に、この関係式を時系列モデルに置き換えて線形化する。

時系列モデル

$$C_i = \vec{\mu}(\mathbb{K}) + \vec{\epsilon}_i.$$

そして、カルマンフィルタを用いることでSPDを推定する。

オプション価格に対する時系列モデル

ある銘柄のオプション市場での1日の取引をn個に分割し、i番目のオプション価格のベクトルに対する時系列モデルを構築する。

オプション市場の取引

P種類の行使価格(K)

	K1	K2	...	Kp-1	Kp
1					
2					
:					
i	$C_i(K_1)$	$C_i(K_2)$...	$C_i(K_{p-1})$	$C_i(K_p)$
:					
n					

$\vec{\mu}(K)$: 理論価格

$\vec{\epsilon}_i$: ホワイトノイズ

$$C_i = \vec{\mu}(K) + \vec{\epsilon}_i$$

オプション価格のベクトル

線形モデル

区分求積分を行うために、オプション価格の理論値である

$$\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T \text{を}$$

SPDの推定値 $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{p-1})^T$ に関して次のようにおく。

$$\vec{\mu} = \Delta \times \vec{\beta}.$$

オプション価格 ペイオフに関する行列 SPD

ただし、

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \Delta_p^1 & \Delta_{p-1}^1 & \dots & \Delta_3^1 & \Delta_2^1 \\ 1 & \Delta_p^2 & \Delta_{p-1}^2 & \dots & \Delta_3^2 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 1 & \Delta_p^{p-2} & \Delta_{p-1}^{p-2} & & 0 & 0 \\ 1 & \Delta_p^{p-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例：6種類で50円刻み行使価格の場合

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 250 & 200 & 150 & 100 & 50 \\ 1 & 200 & 150 & 100 & 50 & 0 \\ 1 & 150 & 100 & 50 & 0 & 0 \\ 1 & 100 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とする。ここで、

$$\Delta_j^i = k_j - k_i \text{であり、}(1 \leq i \leq j \leq p) \text{である。}$$

線形モデル

このように置くことにより、 $\Delta \times \vec{\beta}$ がオプション価格の区分求積分の役割を果たし、オプション価格とペイオフからSPDを推定することが可能になる。

$\vec{\beta}_i$ を推定するためにはよく知られたカルマンフィルターを用い、線形型の状態空間モデルは下式のようになる。

- 線形型状態空間モデル

$$\mathbb{C}_i(\mathbb{K}) = \Delta \vec{\beta}_i + \vec{\epsilon}_i, \quad (\text{観測可能})$$

$$\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_{i-1} + \vec{\eta}_i. \quad (\text{観測不可})$$

ここで、 $\vec{\epsilon}_i \sim N(0, \sigma^2 I)$, $\vec{\eta}_i \sim N(0, \nu^2 I)$ である。

非線形モデルの導入

線形モデル

- カルマンフィルタによりSPDの推定が出来るもののSPDのモデルとして実用的でない部分がある。

問題点

- v^2 の値が大きくなると $\vec{\beta}$ の値が負を取るなど確率としての定義を満たさなくなり、推定に大きな誤差をもたらす恐れがある。

非線形モデル

- よって、この問題点を考慮した非線形モデルを導入する。

非線形モデル

SPD推定値 $\vec{\beta}$ をパラメータ $\vec{\xi}(\xi_0, \dots, \xi_{p-1})$ により指数化した関数 $\vec{g}(\cdot) = (g_0(\cdot), \dots, g_{p-1}(\cdot))^T$ を用いて非線形モデルを構築する。

$$\beta_0 = g_0(\vec{\xi}_i) = \exp(\xi_0),$$

$$\beta_k = g_k(\vec{\xi}_i) = S^{-1} \exp(\xi_k), \quad \text{for } k = 1, \dots, p-1.$$

ここで、

$$S = \sum_{j=1}^{p-1} \exp(\xi_j),$$

とする。

非線形モデル

このように置くことにより β_k の値は常に非負になる。

また β_k の総和も1になり、確率の定義を満たしたSPDの推定値 β_k になる。

非線形型の状態空間モデルは次のようになる。

- 非線形型状態空間モデル

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_i(\mathbb{K}) &= \Delta \vec{g}(\vec{\xi}_i) + \vec{\epsilon}_i, \\ \vec{\xi}_i &= \vec{\xi}_{i-1} + \vec{\eta}_i.\end{aligned}$$

ここで、 $\vec{\epsilon}_i \sim N(0, \sigma^2 I)$, $\vec{\eta}_i \sim N(0, \nu^2 I)$ である。

拡張型カルマンフィルター(非線形モデルに対するカルマンフィルター)を用いて $\vec{\xi}$ を推定し $\vec{\beta}$ を求める。

シミュレーションデータでの検証

- 観測不可能であり推定結果に大きく影響を与える v^2 にいくつかの値を与え、線形モデルと非線形モデルを比較検証する。

線形モデル $\vec{\beta}_i = \vec{\beta}_{i-1} + \vec{\eta}_i.$

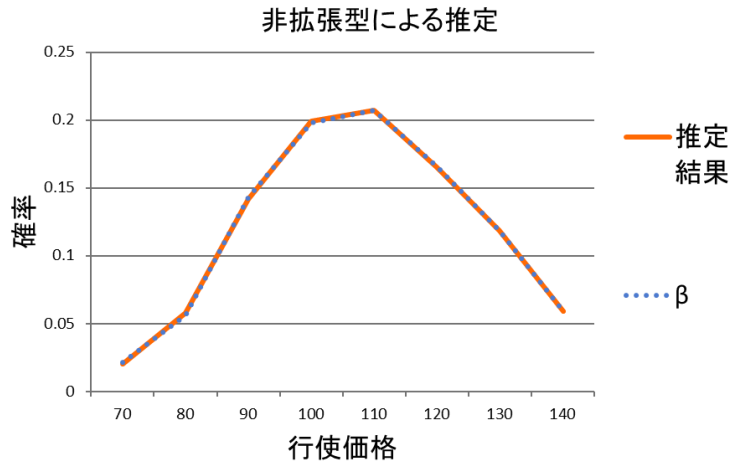
非線形モデル $\vec{\xi}_i = \vec{\xi}_{i-1} + \vec{\eta}_i.$

$$\vec{\eta}_i \sim N(0, v^2 I)$$

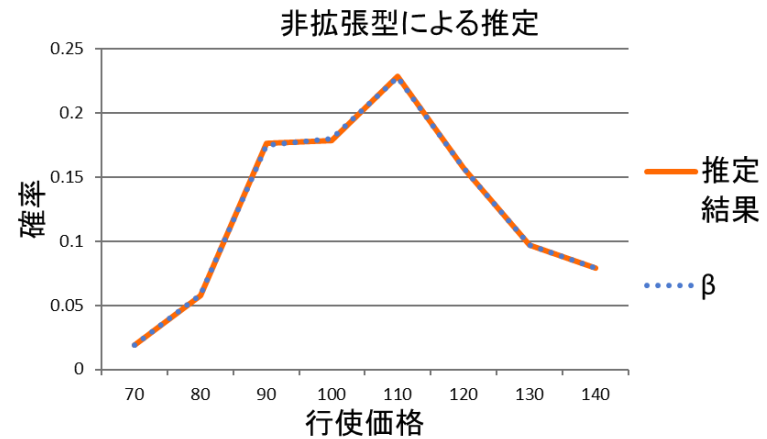
- 使用するデータは $S_0 = 100, T=30$ 日, 行使価格
 $\mathbb{K} = (60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140)$

カルマンフィルターによる検証結果

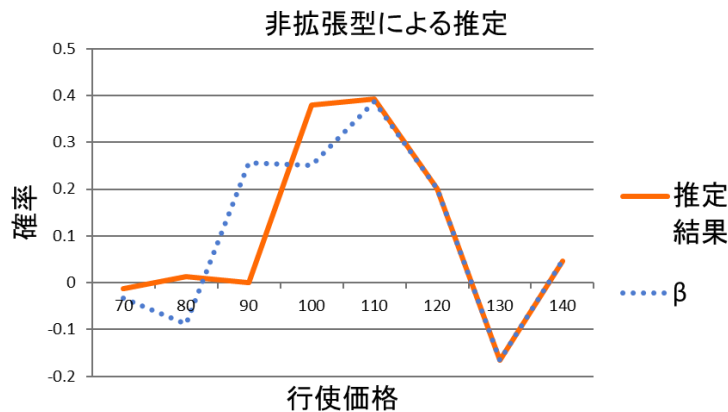
$v^2 = 0.000001$ の場合



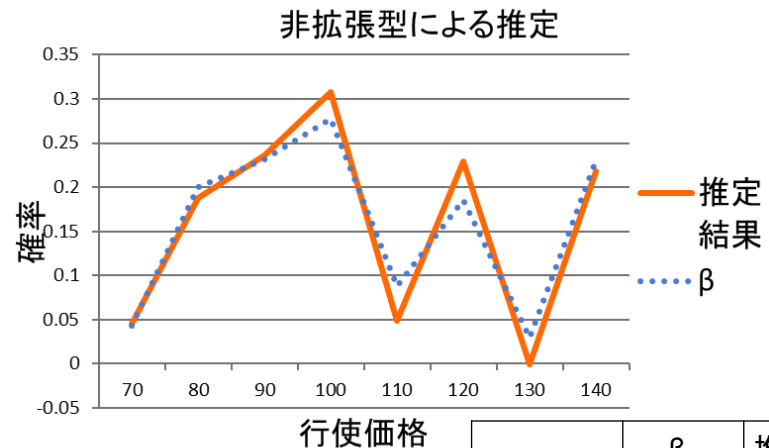
$v^2 = 0.00001$ の場合



$v^2 = 0.00005$ の場合



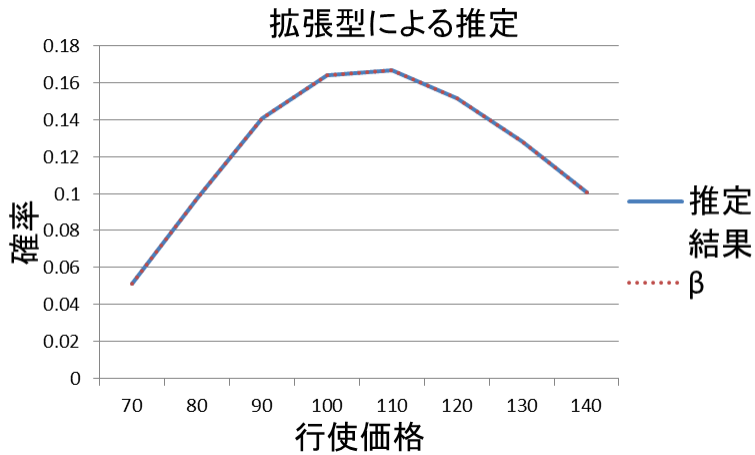
$v^2 = 0.0005$ の場合



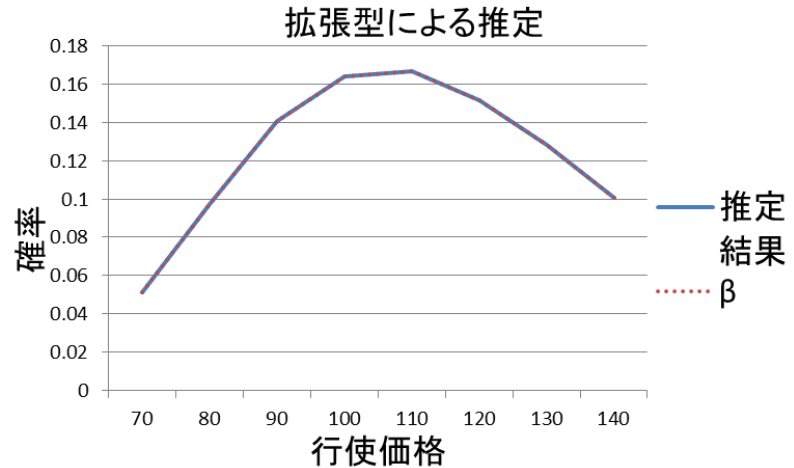
	β	推定結果
確率の総和	1.287379	1.272022

拡張型カルマンフィルターによる検証結果

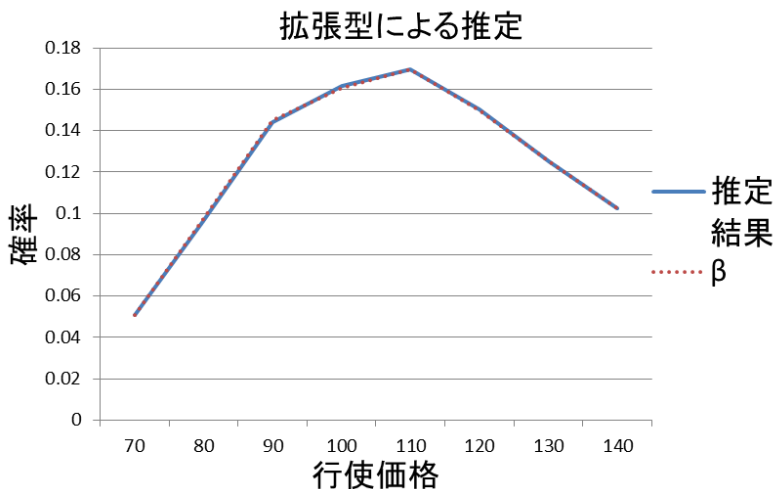
$v^2 = 0.000001$ の場合



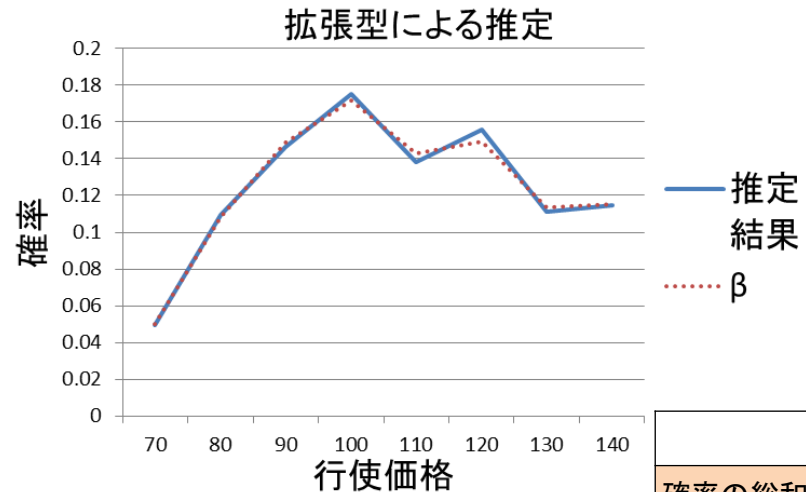
$v^2 = 0.00001$ の場合



$v^2 = 0.00005$ の場合



$v^2 = 0.0005$ の場合



	β	推定結果
確率の総和	1	1

シミュレーションデータによる検証のまとめ

- 拡張型カルマンフィルターの方が幅広い v^2 に対応していることがわかる。
- また、同じ v^2 の値でも拡張型カルマンフィルターの方がSPDの推定値 β の形としてきれいなものが出るのがわかる。
- したがって、日本のオプション市場における実データからSPDの推定を行うには拡張型カルマンフィルターを用いたほうが良いことが分かる。

日本のオプション市場での検証

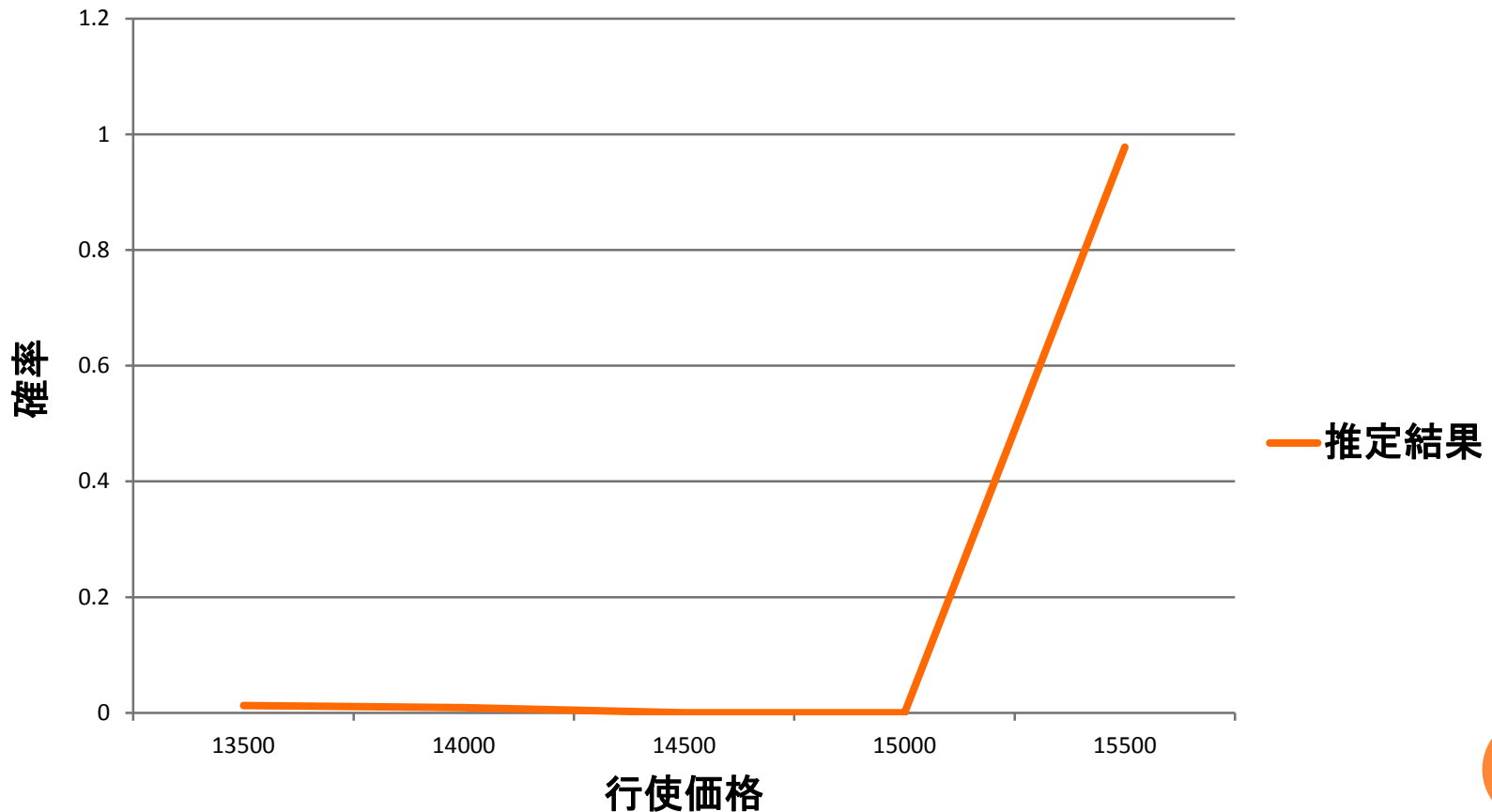
- 2008/04/15における日経平均株価(約13000円)のコールオプションの価格を用いて、満期が2008/05/09の日経平均株価(約13600円)のSPDを推定する。
- データの取り方は行使価格が13000円から15500円(500円刻み)のオプション価格を5分おき($n=58$)にとっていく。

		行使価格(円)					
		13000	13500	14000	14500	15000	15500
取引分割数	1	380	165	50	15	5	2
	2	365	155	50	15	5	2
	:						
	i	$C_i(K_1)$	$C_i(K_2)$	$C_i(K_{p-1})$	$C_i(K_p)$
	:						
	58	385	165	55	20	4	2

2008/04/15における日経平均のコールオプションの価格

日本のオプション市場での検証結果

拡張型カルマンフィルターによるSPDの推定



考察

- 13600円付近の確率はほとんどなく、行使価格の1番高い所へ確率が推移してしまっていて推定は失敗だったといえる。
- 原因の一つとして、諸外国と比べるとまだまだ未発達な日本のオプション市場における取引高の少なさが考えられる。(この点はプットオプションを用いて補完することで改善する見込みがある。)
- しかし、1番の原因は株価に対する行使価格差が500円と大きいため、区分求積分に対する近似誤差が大きくなったためと考えられる。

おわりに

- シミュレーションによるSPDの推定に関しては望ましい結果が得られ、拡張型カルマンフィルターの優位性が示された。
- しかし、日本のオプション市場におけるSPDの推定に関しては失敗だったといえる。拡張型カルマンフィルターにより幅広い v^2 の値に対応させ、日本のオプション市場でのSPDの推定ができると考えられたが前述の理由により推定が不可能だった。
- つまり、推定方法の問題ではなく現状の日本のオプション市場の未発達さが問題であると考えられる。
- 現状では、この推定手法を用いた日本のオプション市場でのSPDの推定は難しい。

参考文献

- Zdenek Hlavka and Marek Svojik, Application of Extended Kalman Filter to SPD Estimation, Applied Quantitative Finance 2nd, Springer, 2009.
- Wolfgang Hardle, Zdenek Hlavka, Dynamics of state price densities, Journal of Econometrics, Elsevier, 2009.

プログラムの一部

#拡張型カルマンフィルターの更新方程式

```
ExUpEquation <- function(PreXi, PreSigma, ExPreBeta) #予測段階の $\xi_{i|i-1}, \beta_{i|i-1}$ を $\xi_{i|i}, \beta_{i|i}$ に更新する関数
{
  PreExpXi <- exp(PreXi)
  PreS <- sum(PreExpXi[2:m])
  B <- matrix(0,m,m) #非線形モデルをテイラー展開により線形化する行列
  B[1,1] <- PreS^2 * PreExpXi[1]
  B[row(B) == col(B) & row(B) != 1] <- PreExpXi[2:m] * (PreS - PreExpXi[2:m])
  for(j in 2:(m-1))
  {
    B[row(B) > col(B) & col(B) == j] <- -exp(PreXi[(j+1):m] + PreXi[j])
    B[row(B) < col(B) & row(B) == j] <- -exp(PreXi[(j+1):m] + PreXi[j])
  }
  B <- B / PreS^2
  ExI <- ExPriceMatrix[,j] - DeltaMatrix %**% ExPreBeta #予測誤差
  ExF <- DeltaMatrix %**% B %**% PreSigma %**% t(B) %**% t(DeltaMatrix) + diag(m) * sigma #予測誤差の分散
  ExK <- PreSigma %**% t(B) %**% t(DeltaMatrix) %**% solve(ExF) #カルマンゲイン
  UpXi <- PreXi + ExK %**% ExI
  UpExpXi <- exp(UpXi)
  UpS <- sum(UpExpXi[2:m])
  ExUpSigma <- (diag(m) - ExK %**% DeltaMatrix %**% B) %**% PreSigma
  ExUpBeta <- c(UpExpXi[1], UpExpXi[2:m] * solve(UpS))
  return(UpXi, UpSigma, ExUpBeta)
}
```

付録:SPDについて

- SPD(State Price Density)

満期 T ,行使価格 K のコールオプションの価格を $C_t(K, T)$,
無リスク金利を r とすると、Dupireの公式より

$$SPD: f(S_T) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 C_t(K, T)}{\partial S_T^2}$$

で表すことができ、 $r = 0$ とおき式変形することで

$$C_t(K, T) = \int_0^{+\infty} (S_T - K)^+ f(S_T) dS_T \quad \text{①}$$

になる。

つまり、リスク中立な世界において当該水準に達する確率を表す。

付録:区分求積分について

Δ のj行目と $\vec{\beta}$ の掛け算をすると

$$\beta_0 + \sum_{i=j+1}^p \Delta_i^j \beta_{p+1-i},$$

となる。これを①式の区分求積分と考えると

$$C_t(k_{p-j}, T) = \int_{k_{p-j}}^{k_p} (S_T - k_{p-j})^+ f(S_T) dS_T \cong \beta_0 + \sum_{i=j+1}^p \Delta_i^j \beta_{p+1-i}$$

となる。

β_{p+1-i} は $f(k_{p+1-i}) \times (k_{p+1-i} - k_{p-i})$ と考えられ株価が k_{p+1-i} となる確率と考えられる。

よって、 $\vec{\beta}$ はSPDの推定量となる。

付録:カルマンフィルターについて

- 予測方程式

$$\beta_{i|i-1} = E(\beta_i | \mathcal{F}_{i-1}) = \beta_{i-1|i-1},$$

$$\Sigma_{i|i-1} = \Sigma_{i-1|i-1} + \nu^2 I.$$

- 更新方程式

$$\beta_{i|i} = \beta_{i|i-1} + K_i l_i,$$

$$\Sigma_{i|i} = (I - K_i \Delta) \Sigma_{i|i-1}.$$

予測誤差: $l_i = C_i(\mathbb{K}) - \Delta \beta_{i|i-1}.$

予測誤差の分散: $F_{i|i-1} = \sigma^2 I + \Delta \Sigma_{i|i-1} \Delta^T.$

カルマンゲイン: $K_i = \Sigma_{i|i-1} \Delta^T F_{i|i-1}^{-1}.$



付録:拡張型カルマンフィルターについて

- 予測方程式

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_{i|i-1} &= \vec{\xi}_{i-1|i-1}, \\ \Sigma_{i|i-1} &= \Sigma_{i-1|i-1} + \nu^2 \mathbf{I}.\end{aligned}$$

- 更新方程式

$$\begin{aligned}\vec{\xi}_{i|i} &= \vec{\xi}_{i|i-1} + K_i l_i, \\ \Sigma_{i|i} &= (\mathbf{I} - K_i \Delta B_{i|i-1}) \Sigma_{i|i-1}.\end{aligned}$$

予測誤差 : $l_i = \mathbb{C}_i(\mathbb{K}) - \Delta g_i(\vec{\xi}_{i|i-1})$.

誤差分散 : $F_{i|i-1} = \sigma^2 \mathbf{I} + \Delta B_{i|i-1} \Sigma_{i|i-1} B_{i|i-1}^T \Delta^T$.

カルマンゲイン : $K_i = \Sigma_{i|i-1} B_{i|i-1}^T \Delta^T F_{i|i-1}$.



付録：拡張型カルマンフィルタについて

ヤコビ行列： B

(テイラー展開により擬似的に線形化する行列)

$$B_{i|i-1} = \frac{\partial g_i(\xi_i)}{\partial \xi_i^T} \Big|_{\xi_i = \xi_{i|i-1}}$$

$$= \frac{1}{S^2} \begin{pmatrix} S^2 e^{\xi_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\xi_1}(S - e^{\xi_1}) & -e^{\xi_1 + \xi_2} & \dots & -e^{\xi_1 + \xi_{p-1}} \\ 0 & -e^{\xi_2 + \xi_1} & e^{\xi_2}(S - e^{\xi_2}) & \dots & -e^{\xi_2 + \xi_{p-1}} \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -e^{\xi_{p-1} + \xi_1} & -e^{\xi_{p-1} + \xi_2} & \dots & e^{\xi_{p-1}}(S - e^{\xi_{p-1}}) \end{pmatrix}$$