

第2回 S-PLUS ユーザ カンファレンス

ノンパラメトリック平滑化法による信用リスクの測定

慶応義塾大学総合政策学部

小暮 厚之

kogure@sfc.keio.ac.jp

2002年11月22日(金)

1 はじめに

伝統的な統計分析では、観測値は既知のパラメトリック・モデルに従うと想定される。正しいと想定されたパラメトリック・モデルの下で、未知のパラメータを推定し、信頼区間や検定方式を設定することが主要な問題とされてきた。ノンパラメトリック平滑化法は、パラメトリック・モデルを先験的に想定することなく、確率密度や回帰関数のような統計モデルの曲線としての特徴を探ろうとする。近年、このようなノンパラメトリック平滑化が医学・工学・経済学といった多様な領域で活用されるようになってきた。高速かつ低コストな計算環境が整うなかで、ノンパラメトリック平滑化法は、単なる理論的関心の対象を越えて、新たなデータ解析ツールとして位置づけられつつある。本報告では、「信用リスクの測定」という問題を通して、ノンパラメトリック平滑化手法の理論と実際について報告する。

2 信用リスクと倒産確率

信用リスクとは、貸出ローンなどの契約が約定どおり履行されないリスクである。次のBIS(国際決済銀行)規制では、信用リスクの大きさに応じて自己資本の積み増しを行うことが金融機関に求められている。金融機関だけでなく、機関投資家さらには事業会社にとっても、信用リスクを正しく測定し適正に管理することが急務になっている。

信用リスクの測定法としては、アルトマンによる「Zスコア」がよく知られており、現在の与信管理の現場においても広く用いられているようである。それは、自己資本比率、総資本回転率のような企業の財務指標データ(及び非財務データ)に線形判別分析を適用したものであり、各企業の線形判別関数の値に他ならない「Zスコア」による危険企業のランキングは分かりやすいが、その一方でその値の解釈については曖昧さが残る。例えば、「Zスコア」が2倍の企業は「危険度」も2倍なのであるか?

最近では、「Zスコア」に代表されるような判別評点の代わりに、各企業の倒産確率を推定するアプローチが用いられるようになってきた。判別評点に比べ、倒産確率はその経済的意味が明確である。また、倒産確率を推定することによって、貸出しローンの価格評価をより適切に行うことができる。

3 ロジット・モデルによる倒産確率の推定

事業会社の倒産確率の推定を考えよう． n 社の企業について，倒産を生じる要因（信用リスクファクター）を表す p 次元説明変数 x と倒産企業が否かを表すダミー変数（ $Y = 1$ ならば倒産， $Y = 0$ ならば非倒産）が観測されているとする．

ロジット・モデル

x が与えられたときの倒産確率は

$$\Pr(Y = 1|x) = F(x'\beta)$$

と与えられる．ここで， β は p 次元パラメータ・ベクトルであり， F はロジスティック分布の分布関数

$$F(u) = \frac{1}{1 + e^{-u}}, \quad -\infty < u < \infty$$

である．

n 個の観測値 $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ が互いに独立にロジット・モデルに従うならば，尤度は

$$L = \Pr(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = \prod_{i=1}^n \Pr(Y_i = y_i) = \prod_{i=1}^n F(x_i'\beta)^{y_i} (1 - F(x_i'\beta))^{1-y_i}$$

となるから，対数尤度は

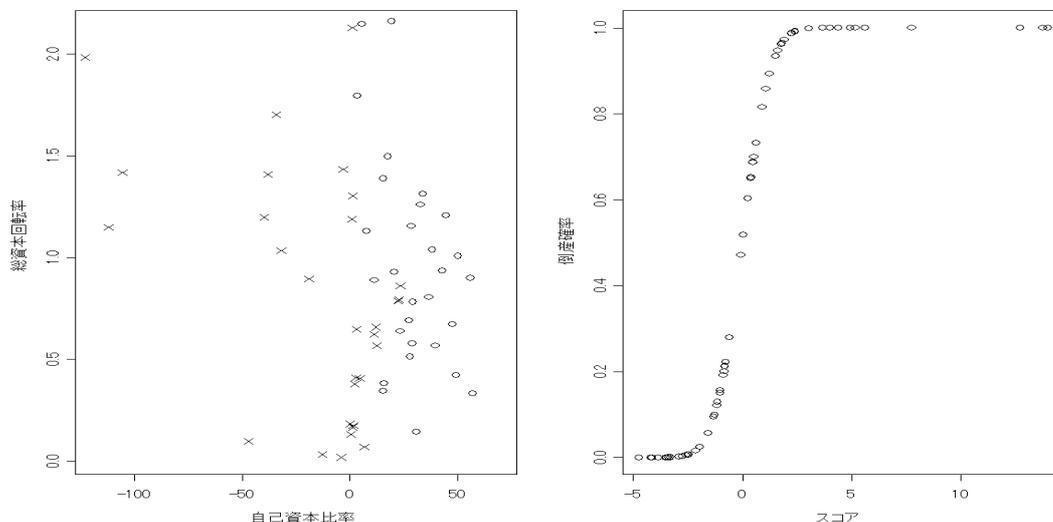
$$l(\beta) \equiv \log L = \sum_{i=1}^n y_i \log F(x_i'\beta) + (1 - y_i) \log(1 - F(x_i'\beta))$$

となる．図1は，参考文献 [1] で用いられている財務データ（ $n=60$ ，倒産企業 30 社，非倒産企業 30 社）に対してロジット・モデルを推定した例である．スコアは以下のように推定される．

$$\text{スコア} \equiv \beta'x = 2.6174 - 0.1117x_1 - 1.2102x_2 \\ (3.2580) \quad (-3.8025) \quad (-2.3018)$$

ここで， x_1 = 自己資本比率， x_2 = 総資本回転率であり，() 内の数値は t 値である．

図1：財務データの散布図とロジット・モデルによる倒産確率の推定



4 Nadaraya-Watson 推定量

F にロジスティック分布を仮定したことは妥当であろうか．特定のパラメトリック・モデルを仮定せずに F をノンパラメトリックに推定することを試みよう．簡単化のために， $p = 3$ とし，1 番目の説明変数は定数項としよう．このとき

$$F(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) = \Pr(Y = 1|\mathbf{x}) = E[Y|\mathbf{x}]$$

であるから，倒産確率の推定はノンパラメトリック回帰の推定問題とみなせる．従って，例えば代表的なカーネル推定法である Nadaraya-Watson 推定量

$$\hat{p}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n w(x - x_{1i}|h_1)w(x - x_{2i}|h_2)y_i}{\sum_{i=1}^n w(x - x_{1i}|h_1)w(x - x_{2i}|h_2)}$$

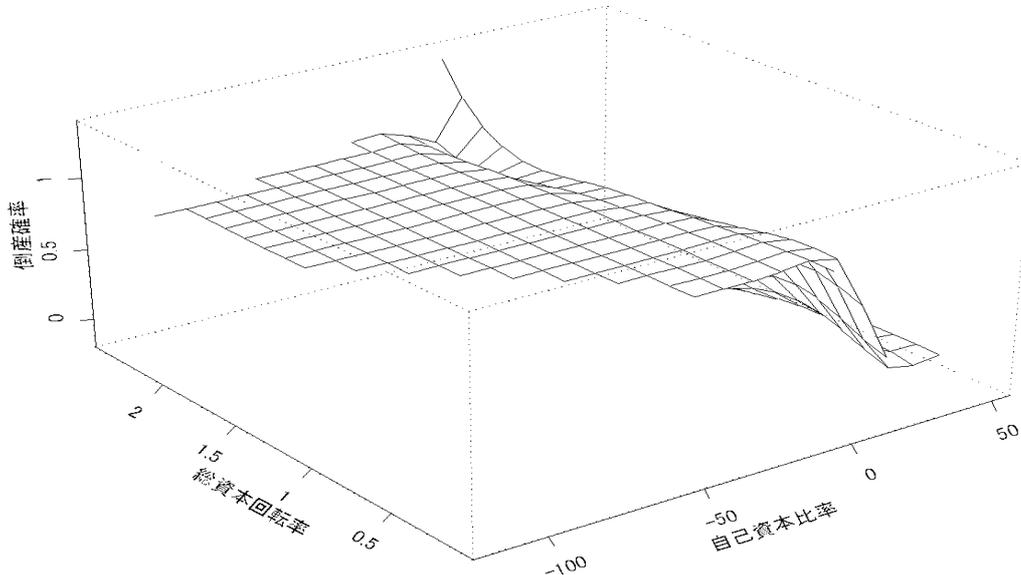
を用いて倒産確率を推定できる．ここで

$$w(z|h) = \frac{K_h(z)}{\sum_{i=1}^n K_h(z)}, \quad K_h(z) = \frac{1}{h} K\left(\frac{z}{h}\right)$$

であり， K は頂点 0 を中心に左右対称で $|z|$ とともに減少していく密度関数が用いられる．しばしば，標準正規分布の密度関数が K として採用される．

図 2 は，上の財務データに対して推定した結果を表す． K として標準正規分布を採用し， h_1 と h_2 はクロスバリデーション法と呼ばれる手法によって $h_1 = 9.8890$ ， $h_2 = 0.3847$ と設定した

図 2：Nadaraya-Watson 推定量による倒産確率の推定



5 平滑化ロジット・モデルによる倒産確率の推定

上のような通常のノンパラメトリック推定法では，推定された曲面がマイナスあるいは 1 を上回ることもありうるという明らかな欠点を持つ．これに対処するために，ロジット・モデルを局所的に当てはめる方法が考えられる．ロジット・モデルの対数尤度 $l(\beta) = l(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ は，

$$l_i(\beta) = y_i \log F(\beta' x_i) + (1 - y_i) \log(1 - F(\beta' x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

とおくと

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^n l_i(\beta)$$

と表される．このとき各 $x = (x_1, x_2)$ に対して，局所対数尤度を

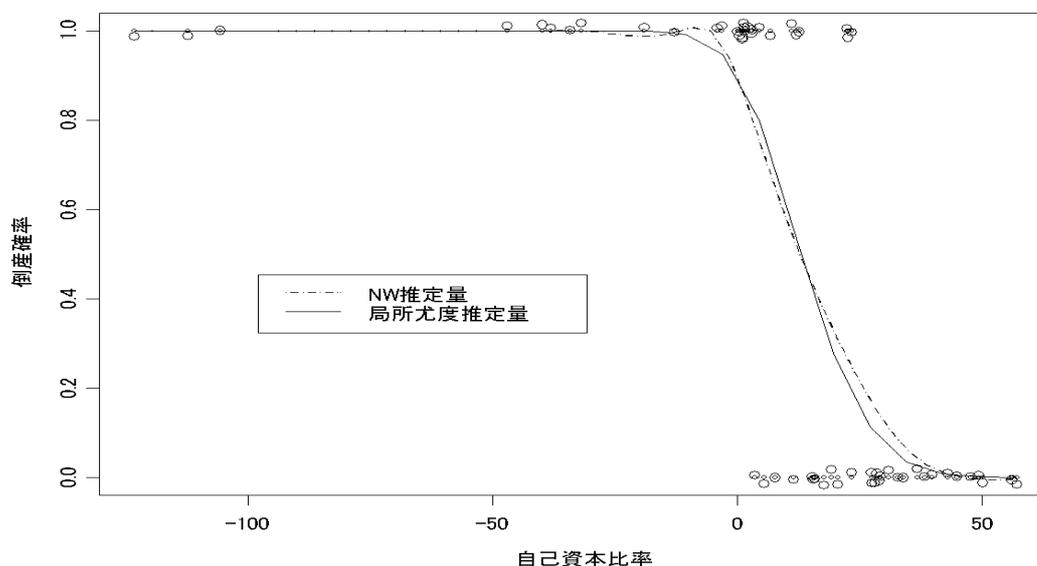
$$l(\beta|x) = \sum_{i=1}^n l_i(\beta) K_{h_1}(x_{1i} - x_1) K_{h_2}(x_{2i} - x_2)$$

と定義する．局所対数尤度の最大値を $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ とするとき，平滑化ロジット・モデルによる倒産確率の推定値は

$$\hat{p}(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}$$

となる．図3は，自己資本比率のみを用いた場合に，Nadaraya-Watson 推定量と平滑化ロジット・モデルによる倒産確率の推定量を比較したものである．

図3：Nadaraya-Watson 推定量と平滑化ロジットモデルによる倒産確率の推定の比較



参考文献

- [1] 木島正明・小守山克哉 (1999) 『信用リスク評価の数理モデル』 朝倉書店
- [2] 小暮厚之 (2002) 「ノンパラメトリック統計学」『金融工学事典』(近刊) 朝倉書店
- [3] 小暮厚之・寒河江雅彦 (2000) 「ノンパラメトリック統計モデルの最近の展開」『日本統計学会誌』, 30 巻, 265-280
- [4] 森平爽一郎 (1999-200) 「信用リスクの測定と管理」『証券アナリストジャーナル』 1999 年 9 月号, 11 月号, 2000 年 1 月号, 3 月号, 5 月号, 7 月号
- [5] Bowman, A.W. and Azzalini, A. (1997), Applied Smoothing Techniques for Data Analysis Clarendon Press:Oxford.