

MERTON DD MODELにおけるパラメータ 推定方法の違いによるAR値への影響

法政大学 理工学部研究科

システム理工学専攻

山下 政紘

研究背景

- 銀行が融資した企業が倒産した場合, 借入残高を満額回収できず損失を背負ってしまう**リスク**が存在する.

 これを**信用リスク**と呼ぶ

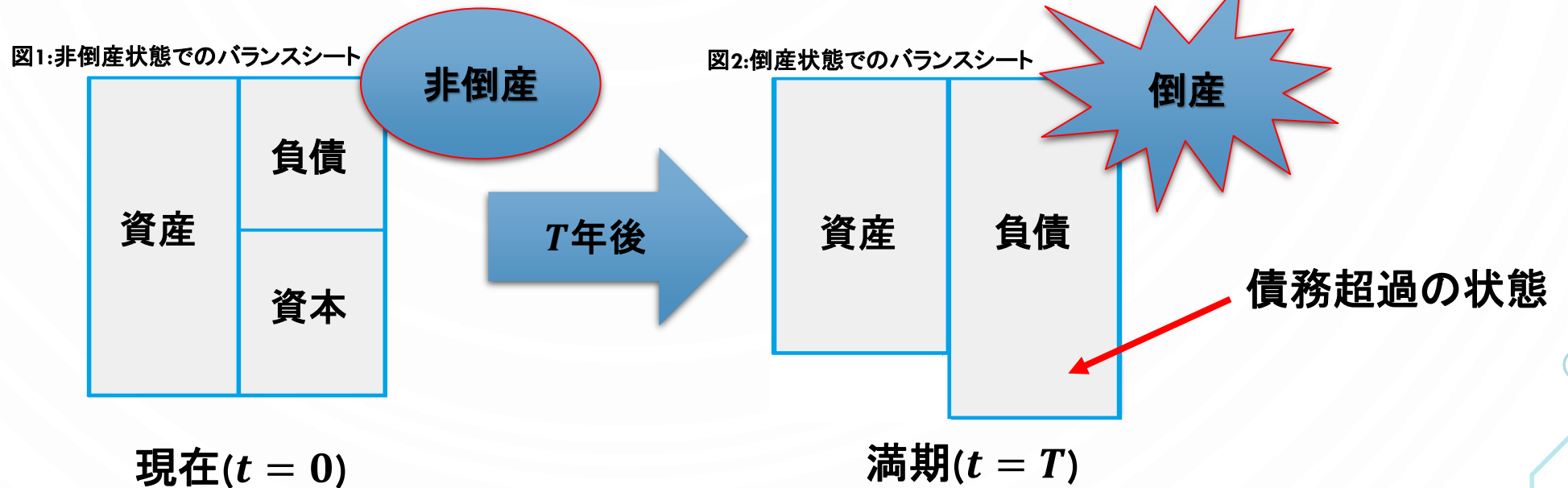
- すなわち, 銀行は信用リスクを計量化する適切なモデルの選択とその評価が大きな課題になると考えられる.

研究目的

- 本研究では, 研究背景で挙げた「信用リスク計量化モデルの評価」に着目する.
- そこで, 信用リスクの計量化モデルとしてMerton[1]を参考にしたMerton DD Model による倒産確率を用いる.
- また, 企業の資産価値とそのボラティリティについて, 簡便法とキャリブレーション法それぞれのパラメータ推定方法による倒産確率がモデルの良さを表すCAP曲線とAR値にどのような影響があるのかを数値実験より比較する.

MERTON DD MODELとは

- 企業の資産にバランスシート構造を仮定することで、企業の倒産を「満期において資産が負債を下回った状態」と定義し、倒産確率を推定する。



バランスシート:企業の財政状態(資産や負債)を表す計算書

倒産確率の計算式

- Merton DD Modelでは、資産価値が時間とともに確率的に変動すると仮定し以下のような方程式で表す。

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t - (1)$$

負債	負債
資産	資本

- 次に、上の方程式を解くことで、企業の倒産確率は以下のような式で表される。

$$Pr\{A_T < D_T | A_0\} = N\left(-\frac{\ln\left(\frac{A_0}{D_T}\right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) - (2)$$

A_t : 時刻 t での企業の資産価値

D_T : 満期での企業の負債価値

μ_A : 資産価値の期待成長率

σ_A : 資産価値のボラティリティ

W_t : 標準ブラウン運動

$$N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

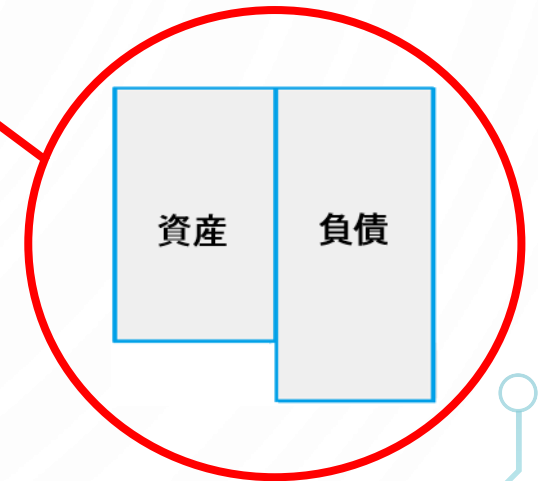
推定が必要なパラメータ

- 倒産確率の計算式

$$Pr\{A_1 < D_1 | A_0\} = N\left(-\frac{\ln\left(\frac{A_0}{D_1}\right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)}{\sigma_A}\right) - (2)$$

より,

A_t : 時刻 t での企業の資産価値
 D_T : 満期での企業の負債価値
 μ_A : 資産価値の期待成長率
 σ_A : 資産価値のボラティリティ



の4つのパラメータ推定を行う必要がある。

- また, 本研究では $T = 1$ として1年後の倒産確率を推定する。

負債価値 D_1 と資産価値の期待成長率 μ_A の推定方法

- 負債価値 D_1 は、バランスシートに記載されている直近の流動負債と固定負債の簿価を用いて1年後の負債価値とする。

$$D_1 = \text{流動負債} + \text{固定負債}$$

	負債
資産	資本

- 資産価値の期待成長率 μ_A については、日次株価の収益率で代用し、年率換算のため企業の営業日を250日として乗算する。

$$\mu_A = 250 * \mu_E$$

$$\mu_E = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right)$$

	負債
資産	資本

S_t : 時刻 t での日次株価

μ_E : 日次株価の収益率

- また、本研究では $n=60$ とする。

	負債
資産	資本

資産価値 A_0 , ボラティリティ σ_A の推定方法: 簡便法

- 資産価値 A_0 については, 現時点($t = 0$)で, バランスシートにおいて均衡状態であると仮定し, 以下の式で表す.

$$A_0 = D_0 + E_0 = D_0 + (S_0 \times N_0)$$

E_0 : 現時刻での自己資本価値

N_0 : 現時刻での発行済株式数

	負債
資産	資本

- 次に, 資産価値のボラティリティ σ_A は自己資本と負債のポートフォリオであると仮定する. ここで, 負債価値は定数としたため, 負債のボラティリティは0とする.

$$\sigma_A = \frac{E_0}{D_0 + E_0} \sigma_E$$

	負債
資産	資本

- 株式収益率のボラティリティ σ_E は, 過去の日次株価から推定するヒストリカル・ボラティリティを用いる.

$$\sigma_E = \sqrt{250 * \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) - \mu_E \right)^2}$$

資産	負債
	資本

資産価値 A_0 , ボラティリティ σ_A の推定方法: キャリブレーション法

$$\textcircled{1} \quad A_0 = \frac{E_0 + D_0 e^{-r} N(d_2)}{N(d_1)}$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma_A = \frac{E_0}{A_0 N(d_1)} \sigma_E$$

ただし,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{A_0}{D_0}\right) + \left(\mu_A + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)}{\sigma_A}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_A$$

- キャリブレーション法では, 資産価値 A_0 が従う式(1)から得られる2つの方程式①, ②を A_0, σ_A について数値的に解く.
- ここで, A_0 と σ_A の初期値は, 簡便法で与えたものとする.

キャリブレーション法の手順

A_0, σ_A に初期値を与える



初期値 A_0, σ_A を式①, ②に代入し, 新たな A_0, σ_A を求める



求められた A_0, σ_A と, 与えた A_0, σ_A を比較し, 誤差が 10^{-3} より小さくなるまで反復計算を繰り返す

CAP曲線とAR値

- 以上から、簡便法とキャリブレーション法、どちらのパラメータ推定方法が倒産確率を計算するうえで優れた手法であるかを検証する.
- そこで、倒産確率推定値の大きさに注目し、実際に倒産した企業がどのくらいの比率であったかを表現した尺度である順序性でモデルの良さを判定する方法を明らかにする.
- その方法にCAP曲線(Cumulative Accuracy Profiles)とAR(Accuracy Ratio)値がある.

- 企業のデータ数を6件, そのうち実際に倒産した企業を3件とし, 倒産確率推定値降順に並べ, 以下のような数値を計算する.

表1:CAP曲線をプロットするために必要な数値表(例)

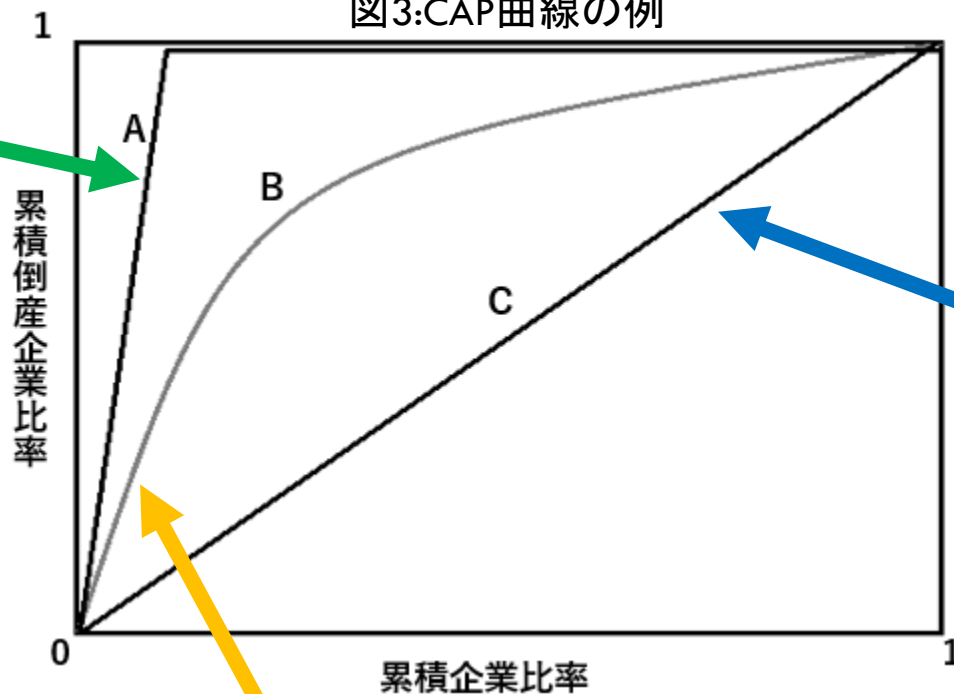
会社名	推定倒産確率の降順	企業数	企業数/合計企業数	累積企業比率	倒産=1 非倒産=0	累積倒産件数	累積倒産企業比率
原点				0.000			0.000
A	0.80	1	0.167	0.167	1	1	0.333
B	0.70	1	0.167	0.333	1	2	0.667
C	0.50	1	0.167	0.500	0	2	0.667
D	0.10	1	0.167	0.667	1	3	1.000
E	0.05	1	0.167	0.833	0	3	1.000
F	0.01	1	0.167	1.000	0	3	1.000
合計		6	1.000		3		

X軸にプロット

Y軸にプロット

図3:CAP曲線の例

完璧な予測



予測力がない

通常のパredict

- 倒産確率推定値が実際の倒産に関係ない場合, CAP曲線は図3におけるCの45度線上にプロットされる. また, 倒産確率推定値が高い方から順に倒産したならば, CAP曲線は図3におけるAのようにプロットされる. 実際は, 図1におけるBのようなCAP曲線がプロットされる.
- 曲線Bと, $x = 1, y = 0$ で囲まれる部分の面積の値をAR値と呼び, 1に近いほどモデルの推定結果が良いと判断できる.

数値実験①

- 以上より, 推定されたパラメータを式(2)に入力することで倒産確率を計算することができる.
- 数値実験①では, 倒産企業と非倒産企業の株式, 財務データを用いて, 簡便法とキャリブレーション法のそれぞれでのパラメータ推定方法により倒産確率を算出し, CAP曲線とAR値への影響を比較する.
- また, CAP曲線のプロット, その他図の作成にはVisual R Platformを使用した.

本研究で扱うデータ概要

倒産企業について

- 2008年から2018年の間に、日本取引所グループが公表している上場廃止銘柄一覧[3]から、以下、4つの理由により上場廃止となった47社を倒産企業とする。

- 破産手続きを申請
- 民事再生手続きを申請
- 会社更生手続きを申請
 - 債務超過

- それぞれの株式データである日次株価と発行済株式数、財務データである負債簿価はNEEDS-FinancialQUESTデータベース[5] から、各企業抽出して利用する。

非倒産企業について

- 倒産企業と同規模を目指し、2018年4月1日時点に非倒産である企業で、日本格付研究所の格付け一覧[4]からBBB⁺以下であった88社を非倒産企業とする。

CAP曲線とAR値の数値実験①結果

図4:キャリブレーション法と簡便法で推定された倒産確率でのCAP曲線

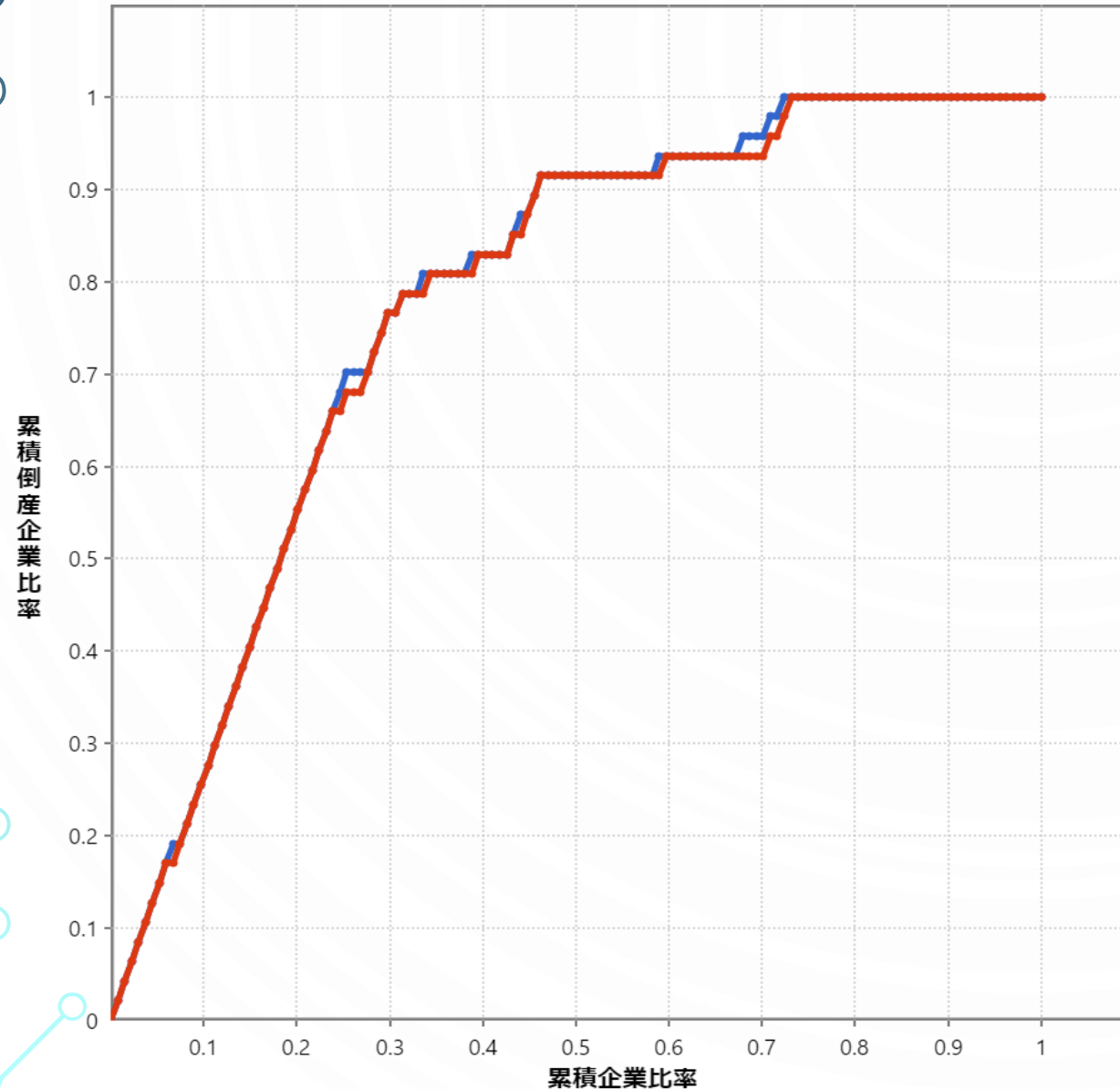


表2:キャリブレーション法と簡便法で推定された倒産確率でのAR値

	キャリブレーション法	簡便法
AR値	0.774611	0.7720705

— キャリブレーション法
— 簡便法

数値実験①のまとめ

- 図4のCAP曲線から, キャリブレーション法と簡便法で大きな違いはないものの, 表2のAR値の結果から, 簡便法よりキャリブレーション法で推定したパラメータによる倒産確率の方が約0.3%大きく, 手法として優れているという結果となった.
- この結果は, キャリブレーション法で推定された A_0, σ_A が, 簡便法で推定された A_0, σ_A よりも倒産企業と非倒産企業の倒産確率の差を大きくしたためだと考えられる.

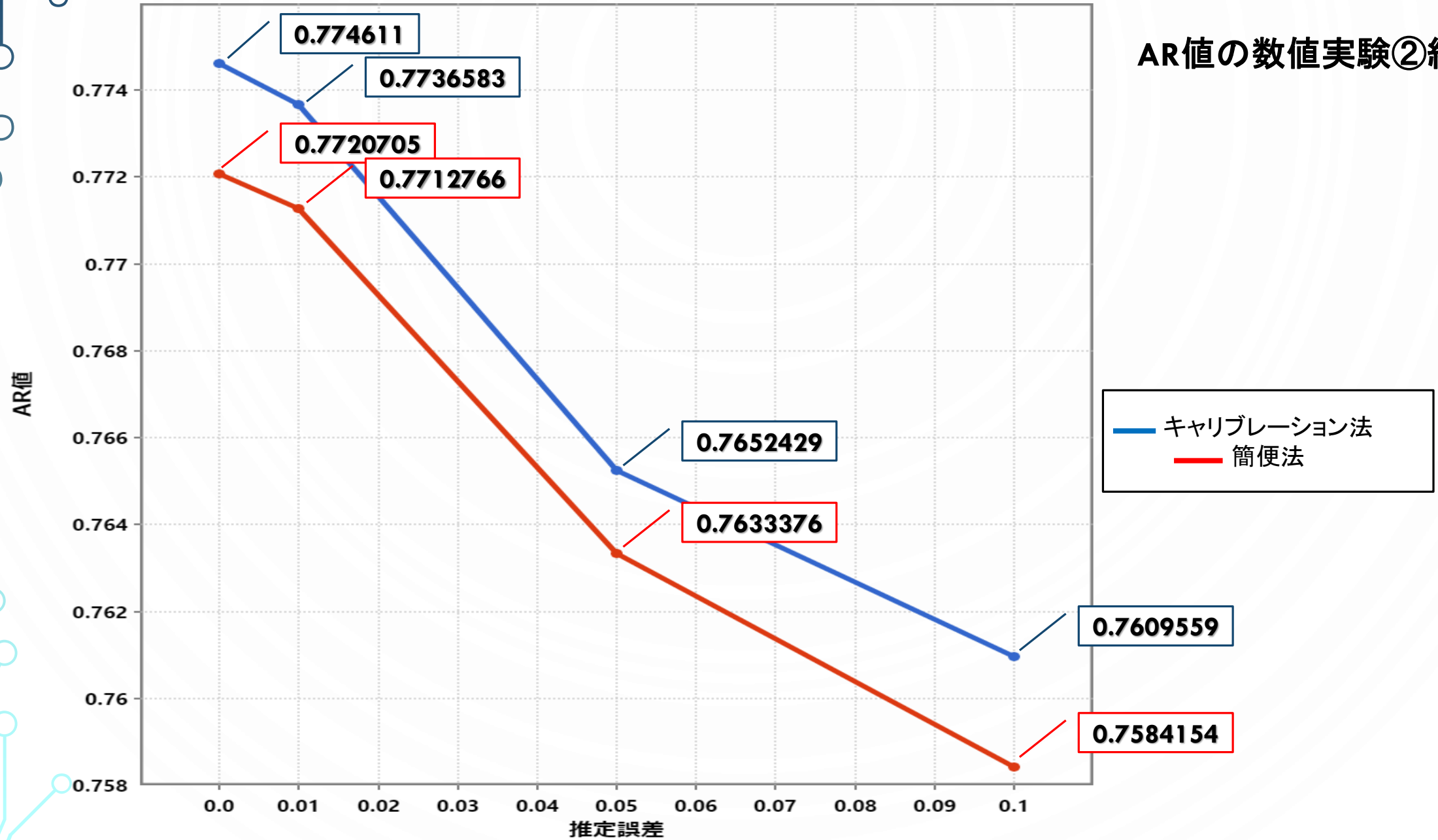
数値実験②

- 数値実験②では, 資産価値の期待成長率 μ_A と, 簡便法, キャリブレーション法のそれぞれの方法で推定された資産価値のボラティリティ σ_A について, 推定誤差として

1%, 5%, 10%

をそれぞれ加えた場合, CAP曲線とAR値にどのような影響があるのかを比較する.

図5:推定誤差ごとのAR値



数値実験②のまとめ

- 図5より, μ_A と, キャリブレーション法と簡便法それぞれで推定された σ_A の推定誤差が大きくなるほど両者ともに, AR値が低くなるという自然な結果となった.
- この結果から, 信用リスク計量化モデルの評価という点において, パラメータ推定の精度についても正確に把握することが重要であると考えられる.

結論と今後の課題

結論

本研究では、信用リスク計量化モデルにMerton DD Modelを採用し、評価を行った。数値実験の結果から、今回用いたデータでは、パラメータの推定方法として簡便法よりキャリブレーション法の方が手法として優れており、また、推定誤差によってモデルが悪化するという自然な結果が得られた。

今後の課題

本研究では、日本企業に対して倒産企業を47社、非倒産企業を88社として計135社の企業データを用いた。しかし、企業の倒産はごくわずかなものであるため倒産企業の規模と同程度で、かつ、倒産していない企業のデータをより多く用いて信用リスク計量化モデルの評価を行うことが今後の研究課題である。

参考文献

[1] Merton, R. C. 「On the pricing of corporate debt : The risk structure of rates」, 1974.

[2] 森平爽一郎, 「信用リスクモデリング-測定と管理」, 朝倉書店, 2009.

[3] 日本取引所グループ 上場廃止銘柄一覧

- <https://www.jpx.co.jp/listing/stocks/delisted/index.html>

[4] 日本格付け研究所 格付け一覧

- <https://www.jcr.co.jp/ratinglist/>

[5] 日経NEEDS-FinancialQUEST

- <https://finquest.nikkeidb.or.jp/ver2/online/>