数理システムユーザーコンファレンス2009

脳の秘密を数理で明らかにする
一数理脳科学への招待

甘利俊一

理化学研究所脳科学総合研究センター

数学は人類の文化である

バビロニアの数学

アラビア、中国、ギリシャ、日本の数学

ユークリッド幾何

脳の仕組み

数の概念ー動物、チンパンジー

地理ーねずみ、幾何

ーー人間：抽象思考

脳の仕組み
ーー考える喜び

抽象的思考

ゲーム、　パズル

数学、文化

21世紀の科学技術

- 物理学　数理科学
- 生物科学
- 情報科学
- 人間科学

人間とは何か

社会とは何か

融合

人間の科学

情報

環境

エネルギー

心

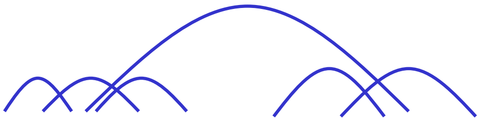
社会

教育

物理学　―大帝国

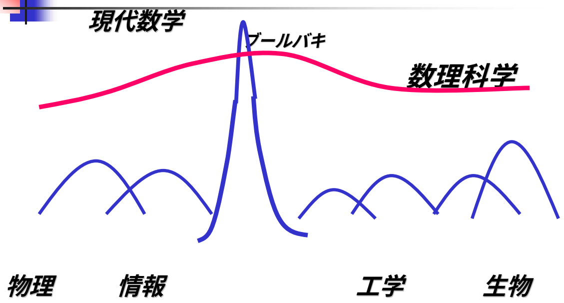
相対性理論　*団体物理*　*ナノテクノロジー*

量子力学　*エレクトロニクス*



経済学　*生物*　*科学*　…　*情報*　*数学*

数学　—象牙の塔



情報科学・工学　ーGödel・Turingの呪

電話・無線　　情報理論　サイバネティックス　　インターネット

情報化社会

真空管　　コンピュータ　トランジスタ

人工知能・ロボット・脳
バイオインフォーマティックス

生物学　―― 還元主義

博物学　　分子生物学　　遺伝子　バイオテクノロジー

種の多様性　　生命の基本原理　　構造と機能

脳・システムバイオロジー

人間とは何か
ー脳

思考・言語・意識
人間・社会・文明

脳科学ー分子からシステムへ

――― 生物科学

――― 情報科学

――― 人間科学

脳の宇宙誌

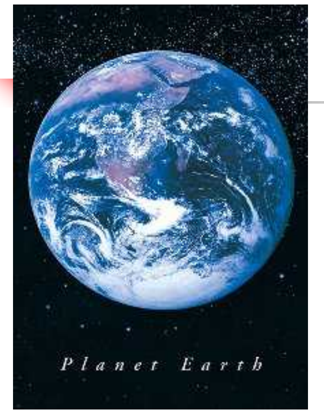
ビッグバン：エネルギー・物質ー天体ー分子（秩序）
（137億年）　物理学、化学　エネルギーとエントロピー

生　命：自己を複製し次世代に伝える物質の一形態
（36億年）　生命科学　遺伝、分子機構、自己保存

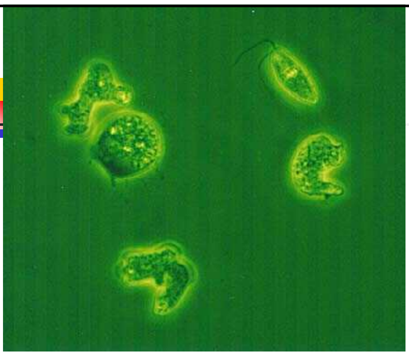
脳・神経系：環境の情報を利用、記憶、学習、判断、行動
（5億年）　神経科学

人　間：心を持ち社会に生きる生命；文化と社会
（20万年）　脳科学、情報科学、人間科学

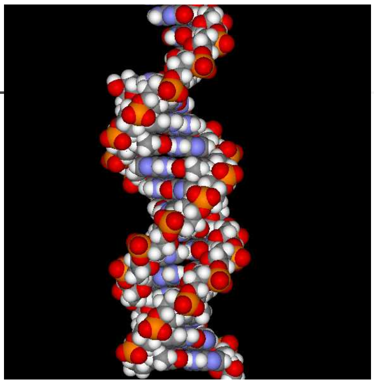
ビッグバン：エネルギー・物質ー天体ー分子（秩序）
（150億年）　物理学、化学　エネルギーと
エントロピー



46億年前：
地球の誕生



生　命：自己を複製し次世代に伝える物質の一形態
（36億年）　生命科学　遺伝、分子機構、自己保存



DNA

多細胞生物
脳・神経系：環境の情報を利用、記憶、学習、判断、行動
（6億年）　神経科学

類人猿、そして人間
人　間：心を持ち社会に生きる生命；文化と社会
（20万年）　脳科学、情報科学、人間科学

心の理論
ロボットに意識はあるか

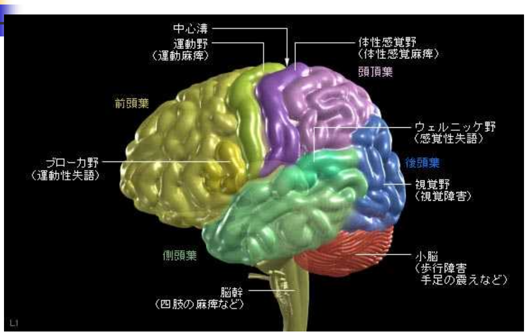
人と共感するロボット

ロボットに心が持てるか？
ーー心の理論

脳神話

グルタミン
脳を鍛える、テレビ脳
モーツァルト
右脳人間
脳臨界期

脳：大脳、海馬、小脳、脳幹



脳の働き：

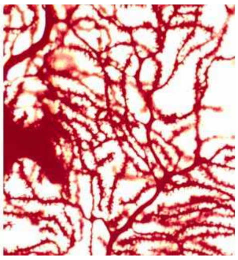
反射、認知、思考、行動
記憶、情動、心

脳　分子機械ー情報機械

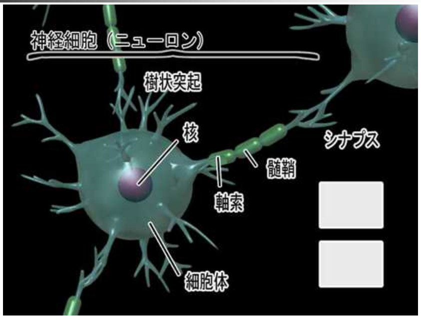
分子機械	*分子*	10^{-9} m
	細胞	10^{-5} m
情報機械	*回路モジュール*	10^{-3} m
	システム	10^{-2} m
	個体	10^{0} m
人間・社会	*社会*	10 □ 10^{7} m

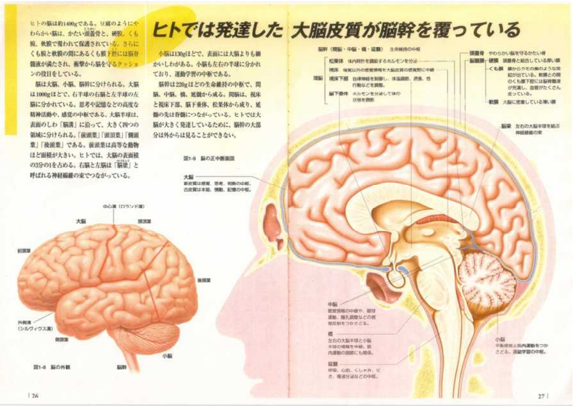
ミクロ世界の探検—

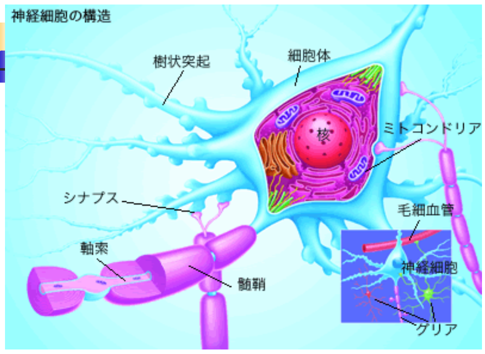
ニューロン： 大きさ、数、シナプス結合、結合の配線

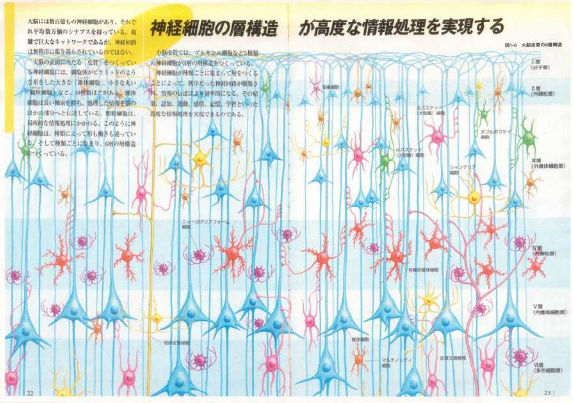


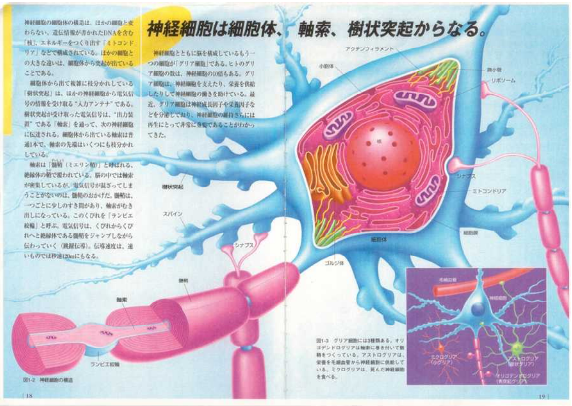
ニューロン内部
細胞、核、遺伝子











脳研究

- *脳を知る領域* ・・・・人間とは何か
  人間から社会へ
- *脳を守る領域* ・・・・脳疾患・老化
  精神障害
- *脳を創る領域* ・・・・脳の理解
  脳型情報技術
- *脳を育む領域* ・・・・教育・学習

脳を創る領域の戦略

ー神経科学と情報科学の融合

脳の情報処理原理

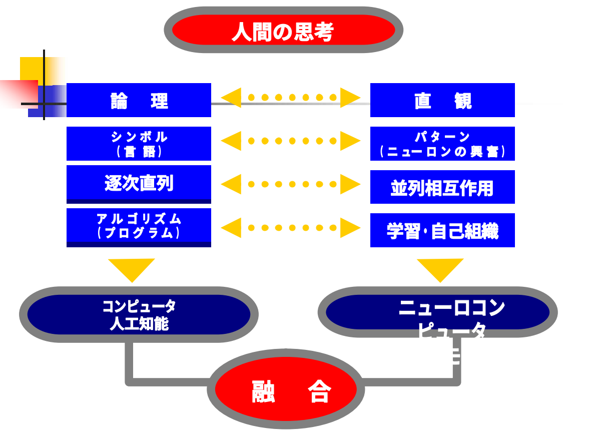
↕

脳型の情報モデル

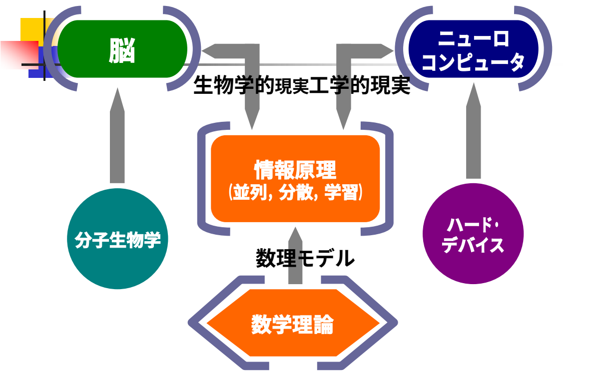
モデル・理論・技術

システムバイオロジー，ニューロインフォーマティックス

脳の数理情報科学



脳の情報原理解明への道



脳の情報原理

分散表現ーーーー記号表現

協調・競合の時空間パターンダイナミックス
ーーーー論理による推論

学習・自己組織化・記憶　ーーープログラム

意思・感情・意識　ーーー？

心、意識とは何か

脳とコンピュータ
　プログラムを管理するプログラム
社会的存在としての人間
　コミュニケーション：意図、状態

言語と意識の発生
並列計算システムと意識

脳と機械の直結
brain-machine interface

脳の状態の読み取り：

計算、決定、意識、心、行動

機械の操作：義足、タイプ、制御

脳への直接入力

脳の操作ーー幸福？

脳を読む

脳の指令で機械を動かす

ニューロ経済学

ニューロ商品学

脳への入力

脳を創る領域

理論による解明

計算論的神経科学

作る事によって知る

情報システムの創造

脳型情報論

システム・デバイス

<u>**脳の情報数理科学**</u>

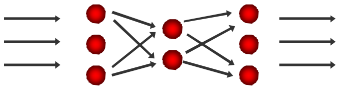
脳型情報数理科学の確立

脳の計算原理　—　コンピュータ

ロボット工学・人工知能との融合

脳理論・脳モデルとは

認知モデルパーセプトロン



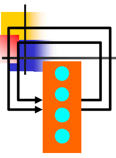
分散表現

学習・情報幾何

次元の呪

$$y = \sum v_i \varphi(w_i \cdot x)$$

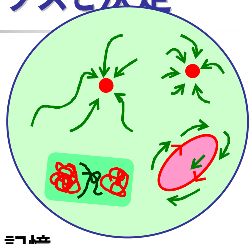
ダイナミックスと決定



$\boldsymbol{x}$:

$$x_{t+1} = f(x_t;\theta)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x;\theta)$$



アトラクター

安定点

安定軌道

カオス

記憶

決定

近似

実数計算論へ

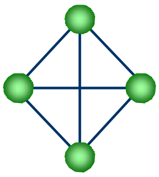
パルス計算

記憶モデル

- ダイナミックス
- 多重・想起

$$\dot{x} = f(Wx)$$

- コンピュータ



記憶と学習

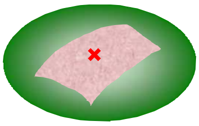
海馬の働き：HM
学習機械

思考・決定のモデル

- ニューロダイナミクス

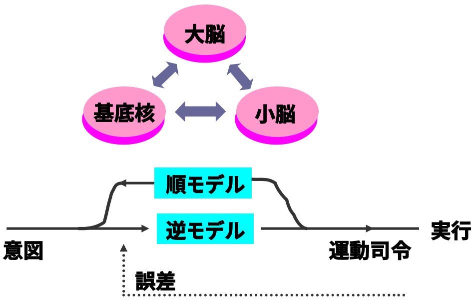
$$\dot{x} = f(Wx, s)$$

- 多安定・カオス
- 探索・巡回セールスマン問題
- 最適計画

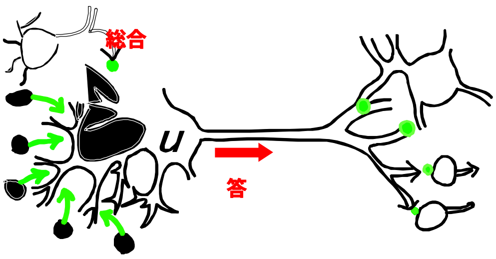


運動制御機構

強化学習

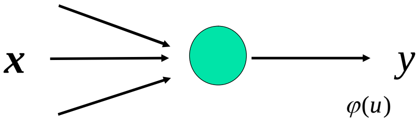


神経細胞のモデル



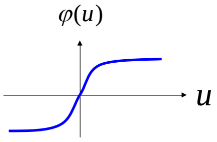
ニューロンの数理モデル

$$y = \varphi\left(\sum w_i x_i - h\right) = \varphi(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x})$$



多数決素子

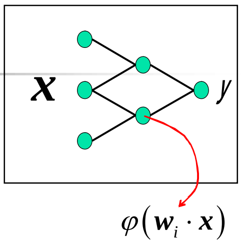
興奮·抑制



多層パーセプトロン

$$y = \sum v_i \varphi(\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{x}) + n$$

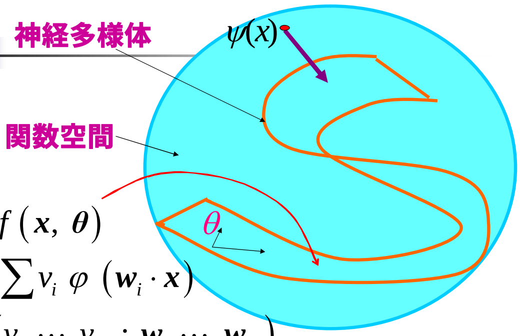
$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$



$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum v_i \varphi(\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{x})$$

$$\theta = (w_1, \ldots, w_m; v_1, \ldots, v_m)$$

Multilayer Perceptron



$$y = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \sum v_i \, \varphi(\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{\theta} = (v_1 \cdots, v_m \; ; \; \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_m)$$

万能関数近似系

$$\psi(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{i=1}^{N} \mathrm{v}_i a_i(\boldsymbol{x})$$

$$\psi(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{i=1}^{m} v_i \varphi_i(\boldsymbol{x})$$

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{x})$$

次元の呪い

$$\sum v_i a_i(\boldsymbol{x}) \cdots \quad N \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{d}{2}}$$

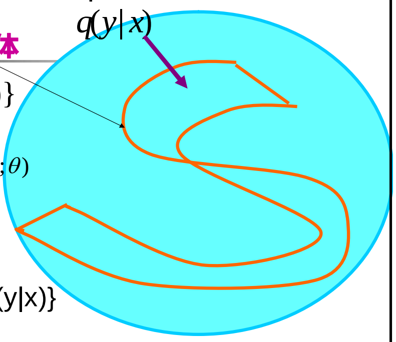
固定基底系

$$\sum v_i \, \varphi(\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{x}) \cdots \quad N \approx c(d) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}$$

可変基底系

学習

Multilayer Perceptron



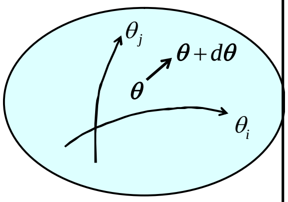
$$M = \{p(y \mid x; \theta)\}$$

$$p(y, x; \theta) = q(x) \, p(y \mid x; \theta)$$

リーマン多様体

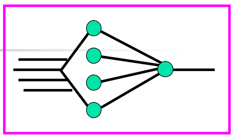
$$g_{ij}(\theta) = E[\frac{\partial \log p(y \mid x;\theta)\partial \log p(y \mid x;\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}]$$

$$ds^2 = |d\boldsymbol{\theta}|^2$$
$$= \sum g_{ij}(\boldsymbol{\theta})\, d\theta_i d\theta_j$$
$$= d\boldsymbol{\theta}^T G(\boldsymbol{\theta})\, d\boldsymbol{\theta}$$

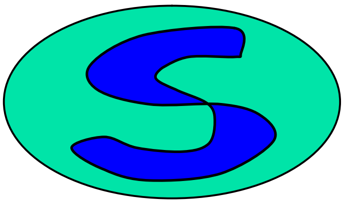


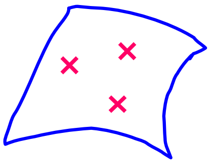
神経多様体

- 計量構造
- 位相構造



$\boldsymbol{\theta}$



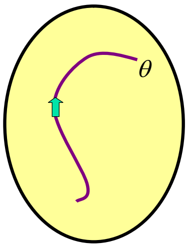


Backpropagation ---勾配学習法

例題 : $(y_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots (y_t, \boldsymbol{x}_t)$ −−training set

$$E(y,x;\theta) = \frac{1}{2}\left|y - f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})\right|^2$$
$$= -\log p(y,\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_t = -\eta_t \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$
$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}) = \sum v_i \varphi(\boldsymbol{w}_i \cdot \boldsymbol{x})$$



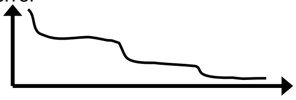
Backprop の問題点

- 収束が遅い---plateau---saddle
- 多数の局所解

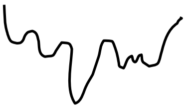
$$\Delta\theta_t = -\eta_t \nabla l(x_t, y_t; \theta_t)$$

MLP の欠点

slow convergence : Plateaus



local minima



➡ Boosting and Bagging

MLP の情報幾何

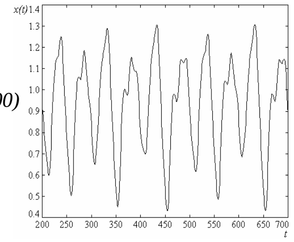
Natural Gradient Learning :
S. Amari ; H.Y. Park

$$\Delta\boldsymbol{\theta} = -\eta G^{-1}(\boldsymbol{\theta})\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\theta}}$$

$$G_{t+1}^{-1} = (1+\varepsilon)G_t^{-1} - \varepsilon G_t^{-1}\nabla f \nabla f^T G_t^{-1}$$

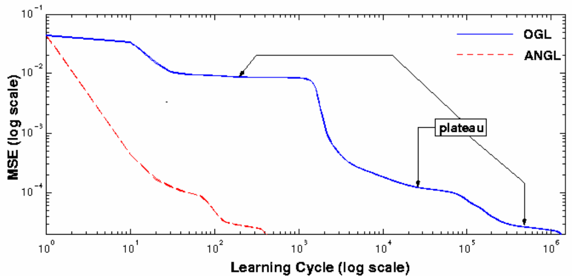
Computational Experiments

- *Mackey-Glass time series prediction*
  - *generation of time series* $x(t+1) = (1-b)x(t) + a\frac{x(t-\tau)}{1+x(t-\tau)^{10}}$
  - *input : 4 previous values ;*
    x(t-18),x(t-12),x(t-6),x(t)
  - *output : 1 future value ; x(t+6)*
  - *learning data : 500 (t=200,…,700)*
  - *test data : 500 (t=5000,…,5500)*
  - *Network Structure*
    4 inputs -- 10 hidden – 1 output



Computational Experiments

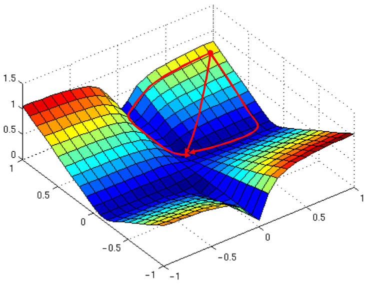
Learning Curves of Mackey-Glass



OGL : Ordinary Gradient Descent (Backpropagation)
ANGL : Adaptive Natural Gradient Descent

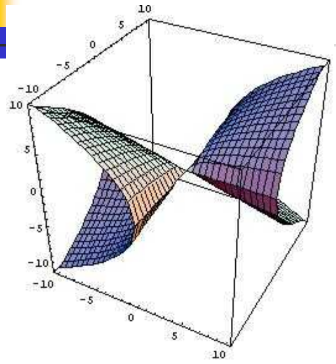
パーセプトロンの幾何学

Which path is faster?

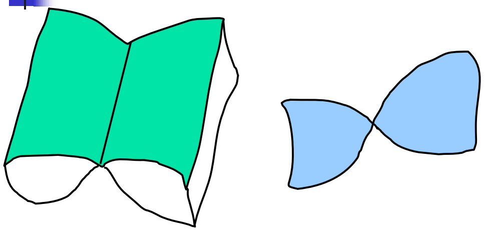


An Error surface of Simple MLP

MLP の特異点---example

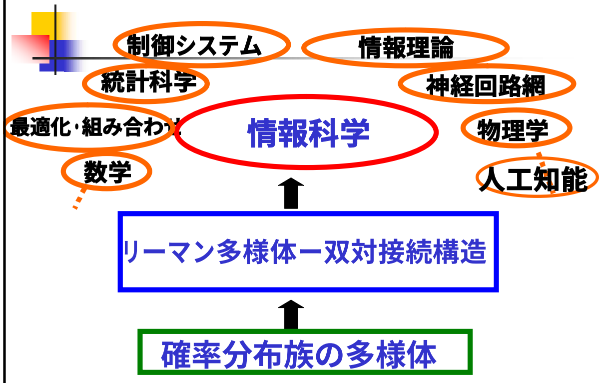


singularities—特異点



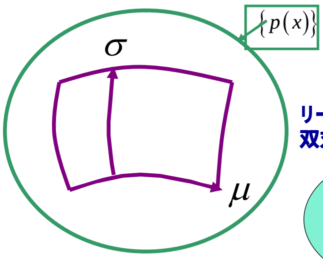
微分幾何—代数幾何

情報幾何



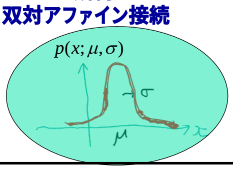
情報幾何とは？

$S=\{p(x;\mu,\sigma)\}$ $\qquad p(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$



$S=\{p(x;\theta)\}$

リーマン幾何
双対アファイン接続



アファイン接続
affine connection

共変微分

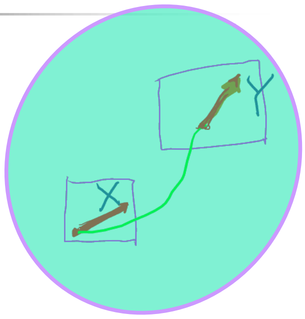
$\Pi_c X = Y$

測地線 $\Pi\dot{X}=\dot{X}$ $\quad X=X(t)$

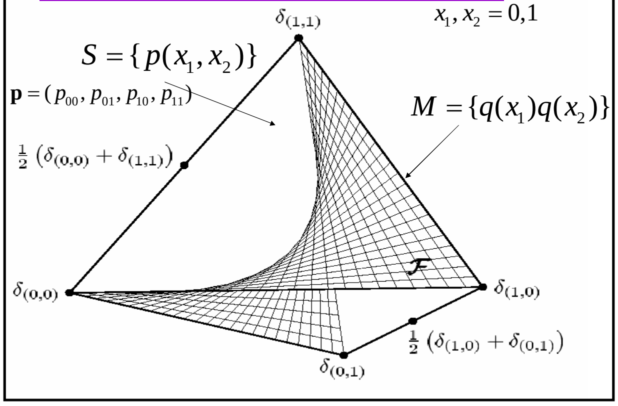
$s=\int\sqrt{\sum g_{ij}(\theta)d\theta^i d\theta^j}$

minimal distance

straight line



独立な確率分布のつくる空間



ニューロンの発火

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots\cdots \quad x_n$

$$p(\mathbf{x})=p(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

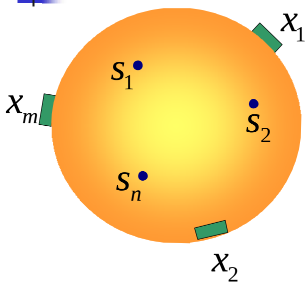
$\eta_i=E[x_i]$ ----firing rate： **発火率**

$v_{ij}=Cov[x_i,x_j]$ ----covariance： **相関**

higher-order correlations： **高次相関**

orthogonal decomposition： **直交分解**

信号の混合と分解



生体情報解析

カクテルパーティ効果

移動体通信

画像解析

ガウス雑音

$$\mathbf{x}_t=A\mathbf{s}_t+\mathbf{n}_t$$

推定関数法

空間混合

$$\begin{cases} x_1 = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n \\ x_2 = a_1' s_1 + \cdots + a_n' s_n \end{cases}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\mathbf{x} = A\mathbf{s}$$

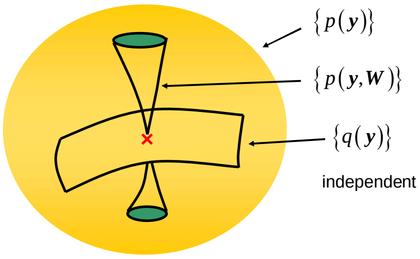
時間混合

$$x(t) = a_1 s(t) + a_2 s(t-1) + \cdots + a_n s(t-n)$$

$$\mathbf{x}(t) = \int A(t-\tau)\mathbf{s}(\tau)\,d\tau$$

Information Geometry of ICA
---Independent Component Analysis

$$\mathbf{x} = A\mathbf{s} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = W\mathbf{x}$$



研究人生

- 10代：暗中模索
- 20代：無我夢中
- 30代：先鋭的創意
- 40代：実力十分
- 50代：円熟
- 60代：道楽
- 70代：？

私の時代

ーー幸運な時代?

これからの時代