

数理システムユーザーコンファレンス2013

# 資産運用におけるRNUOPTの活用 (ロバストポートフォリオ最適化)

南 聖治

りそな銀行  
アセットマネジメント部  
投資技術開発グループ  
チーフクオンツアナリスト

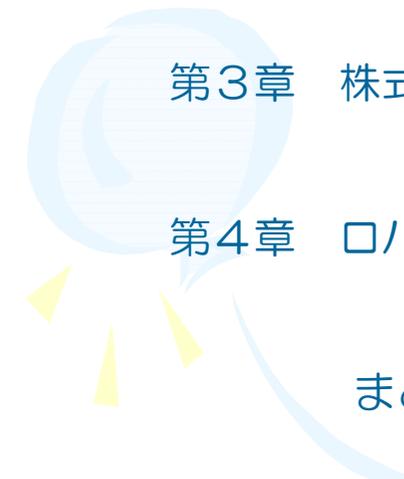
2013年11月22日



# 目次

第1章 りそな銀行における資産運用業務（企業年金） P.3 ~ P.7

第2章 資産運用における最適化問題 P.8 ~P.14



第3章 株式ポートフォリオにおける最適化問題 P.15~P.23

第4章 ロバストポートフォリオ最適化（RNUOPTの活用例） P.24~P.30

まとめ P.31



参考文献 P.32



# 第1章りそな銀行における資産運用業務

(企業年金)

# りそな銀行の概況

【2013(平成25)年4月1日現在】

- 商号：株式会社りそな銀行
- 代表者：社長 東 和浩
- 本店所在地：大阪市中央区備後町2丁目2番1号
- 資本金：2,799億円
- 有人店舗数：337ヶ店
- 従業員数：9,756名 ※2013年3月末現在
- 設立：1918(大正7)年5月15日
- 営業開始：2003(平成15)年3月3日(注)

(注)株式会社大和銀行と株式会社あさひ銀行(いずれも当時)の合併・再編により株式会社りそな銀行として営業を開始しています。

受託残高 (2013年3月末現在)	信託財産(元本)		23兆3,773億円
	企業年金の 受託残高 (時価)	年金信託	4兆4,000億円
		年金特金	8,000億円
		投資一任	900億円
長期格付	Moody's		A2
	S&P		A
	R&I		A+
	JCR		A+

## りそなグループの有人店舗数

合計:593  
【うちりそな銀行:337】



◎ りそな銀行は、わが国最大級の店舗網とお客さま基盤を持つフルラインアップの信託併営銀行です。

# りそなの資産運用業務の評価①

## 《R&Iファンド大賞2013の受賞》

りそな銀行の国内株式ファンドが、格付投資情報センター（R&I）の「R&Iファンド大賞2013」の2部門で受賞いたしました。



### ■ 受賞ファンド

確定給付年金／国内株式コア部門	市場型 / 株式口A
確定給付年金／国内株式バリュー部門	割安株(クオンツ) / 株式口V

### ■ R&Iファンド大賞2013の概要

※詳細については、R&I社のホームページをご覧ください。(http://www.r-i.co.jp/jpn/ie/itr/fund\_award/)

「投資信託」、「投資信託／総合部門」は確定拠出年金専用ファンドを除く国内籍公募追加型株式投信、「確定拠出年金」は確定拠出年金向けに利用される国内籍公募追加型株式投信、「確定給付企業年金」は『R & Iユニバースデータサービス』に登録されているファンド、を対象にしており、いずれも基本的にR&Iによる分類をベースとしている。選考は、「投資信託」、「確定拠出年金」、「確定給付年金」では2011、2012、2013年それぞれの3月末時点における1年間の運用実績データを用いた定量評価がいずれも上位75%に入っているファンドに関して、2013年3月末における3年間の定量評価によるランキングに基づいて表彰している。定量評価は、「投資信託」、「確定拠出年金」では“シャープ・レシオ”を採用、表彰対象は設定から3年以上かつ償還予定日まで1年以上の期間を有し、残高が10億円以上かつカテゴリー内で上位75%以上の条件を満たすファンドとしている。「確定給付年金」では定量評価に“インフォメーション・レシオ”を採用、定量評価がプラスのファンドを表彰対象としている。なお、「投資信託」、「確定拠出年金」では上位1ファンドを「最優秀ファンド賞」、次位2ファンド程度を「優秀ファンド賞」として表彰している。「確定給付年金」では受賞区分を設けていない。「投資信託／総合部門」では、2013年3月末において残高10億円以上のファンドを3本以上設定する運用会社を表彰対象とし、各ファンドの3年間における“シャープ・レシオ”の残高加重平均値によるランキングに基づき、上位1社を「最優秀賞」、次位1社を「優秀賞」として表彰している。

「R&Iファンド大賞」は、過去のデータに基づいたものであり、将来のパフォーマンスを保証するものではありません。当大賞は、投資の参考となる情報を提供することのみを目的としており、投資家に当該ファンドの購入、売却、保有を推奨するものではありません。また、R&Iの顧客に対して提供している定性評価情報とは関係ありません。当大賞は、信頼すべき情報に基づいてR&Iが算出したものであり、その正確性及び完全性は必ずしも保証されていません。当大賞は、信用格付業ではなく、金融商品取引業等に関する内閣府令第299条第1項第28号に規定されるその他業務(信用格付業以外の業務であり、かつ、関連業務以外の業務)です。当外業務に関しては、信用格付行為に不当な影響を及ぼさないための措置が法令上要請されています。当大賞に関する著作権その他の権利は、R&Iに帰属します。R&Iの許諾無く、これらの情報を使用(複製、改変、送信、頒布、切除を含む)することを禁じます。「投資信託／総合部門」の各カテゴリーについては、受賞運用会社の該当ファンドの平均的な運用実績を評価したもので、必ずしも受賞運用会社の全ての個別ファンドそれぞれについて運用実績が優れていることを示すものではありません。投信の基準価額等はQUICK調べ。

# りそなの資産運用業務の評価②

## 《マーサーMPA(JAPAN)アワード2013の受賞》

りそな銀行の国内株式ファンドが、マーサージャパンの「マーサーMPA (JAPAN) アワード2013」の2部門で受賞いたしました。

### ■ 受賞ファンド

国内株式コア部門 (3年)	市場型 / 株式口A
国内株式バリュー部門 (3年)	割安株(リサーチ) / 株式口F
	割安株(リサーチα) / 株式口L



### ■ マーサーMPAアワードとは

※詳細については、マーサージャパンのホームページをご覧ください。(http://www.mercer.co.jp/press-releases/1537435)

マーサーMPAアワードとは、マーサージャパンが日本における企業年金あるいは機関投資家向けのコンサルティング・サービスを提供するために、収集・管理している円ベースの運用リターンの中から、優れた結果を達成した運用戦略を讃えるものです。賞の名前は、マーサーで運用リターンを分析するソフトウェアの名前(MPA = Manager Performance Analytics)をとったものです。

### ■ マーサーMPAアワードの評価方法について

企業年金運用における主要なカテゴリー毎に5年あるいは3年で、トータル・リターンと代表的なインデックスに対するインフォメーション・レシオをそれぞれ基準化した数字を合計して、カテゴリー内の上位10%あるいは上位3位のファンドの多いほうを選定しています(なお、国内株小型、国内債券と外国債券はトータル・リターンのみ)。

国内株式(大型)は、総合部門以外にサブカテゴリーとして、スタイル別の3部門(コア部門、バリュー部門、そして、グロース部門)も表彰対象としています。

マーサーMPAアワードは過去の定量結果だけによる表彰であり、マーサーがマーサーの顧客に運用商品を推薦する場合に利用する定性評価とは何の関係もないものです。運用商品のリターン・データは運用報酬控除前であり、顧客が利用する際には、運用報酬の違いを考慮する必要がありますので、表彰対象と同じ期間に表彰された運用商品を使っても、表彰と同一の結果を得られるわけではありません。また、表彰に利用した評価基準が適切な方法であると保証するものではありませんし、表彰のために使ったデータや計算が正しいものと保証するものでもありません。マーサーはこのアワードを受けた運用会社について何の保証をするものでも責任を持つわけではありません。過去の実績は将来のリターンを保証するものではありません。

# りそなの企業年金受託管理体制

りそな銀行は、年金制度の設計、数理計算、資産運用、管理事務に専門の職員を多数擁しています。退職金・年金についてのご相談から資産運用、制度運営に至るまで、各分野の専門スタッフが豊富な経験にもとづきお客さまのさまざまなニーズにお応えいたします。

## 《制度設計・資産運用のスペシャリスト》

### 年金制度設計のスペシャリスト

制度設計部門では、多様な制度設計に対応できる年金数理システムおよび業界屈指のアクチュアリー・年金数理人を擁しており、質の高い年金制度の設計および年金財政検証サービスを実現しています。

アクチュアリー

年金数理人

### 資産運用のスペシャリスト

企業の財務分析、相場動向の分析、産業や経済の調査・分析などを行う資産運用および証券分析の専門家を多数擁しています。

ポートフォリオマネージャー  
ファンドマネージャー  
アナリスト など

### 制度管理部門の充実

年金管理システムを駆使することで、加入者、年金受給者の膨大なデータの管理をおこなっています。加入者の方一人一人のご加入から給付終了にいたるまで、実に50～60年間の履歴管理などの事務管理をおこなっています。



## 第2章 資産運用における最適化問題



## 第2章のながれ

教科書でよく紹介される平均分散法と実務的な複数の資産クラスを用いた資産運用の関係をご説明し、ポイントとなる最適化問題についてご紹介いたします。

# (教科書) 効率的フロンティア

期待リターンが5%である4資産からなるポートフォリオの中でリスクが最も低いポートフォリオは？

最小化

$$U(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w}$$

↑  
リスク最小化

制約条件

リターン = 定数

$$\mathbf{R}^T \mathbf{w} = 5\% \quad \text{or} \quad 4\%$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

変数

$$\mathbf{w}$$

投資比率

$$\mathbf{w} = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4)^T$$

リターン

$$\mathbf{r} = (r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4)^T$$

定数ベクトル

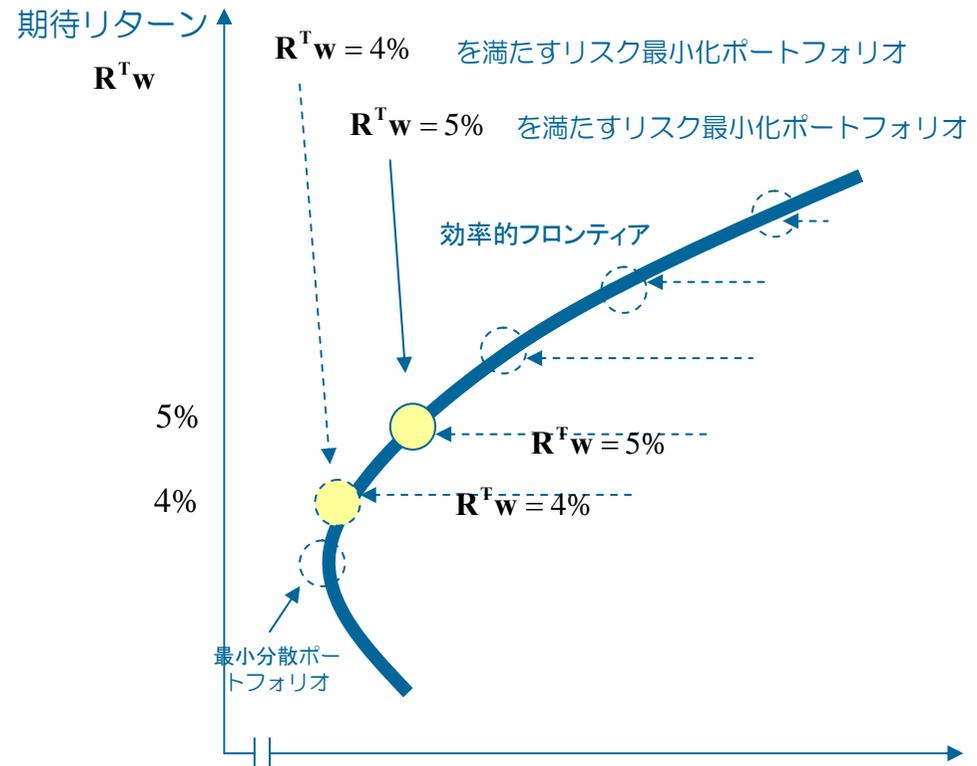
$$\mathbf{e} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$$

期待リターン

$$\mathbf{R} \equiv E(\mathbf{r})$$

分散共分散行列

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv V(\mathbf{r})$$



「効率的フロンティア」上のポートフォリオへの投資が最適な手法。

リスク  
 $\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{w}}$

# (教科書) 平均分散法

～4資産への投資比率の決定～

**最適化問題 (平均分散法)**

最大化

$$U(\mathbf{w}) = \underbrace{\mathbf{R}^T \mathbf{w}}_{\substack{\uparrow \\ \text{リターン} \\ \text{(平均)}}} - \lambda \times \underbrace{(\mathbf{w}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{w})}_{\substack{\uparrow \\ \text{リスク} \\ \text{(分散)}}$$

制約条件

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1$$
$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

変数

$$\mathbf{w}$$

投資比率  $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4)^T$

リターン  $\mathbf{r} = (r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4)^T$

定数ベクトル  $\mathbf{e} = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$

期待リターン  $\mathbf{R} \equiv E(\mathbf{r})$

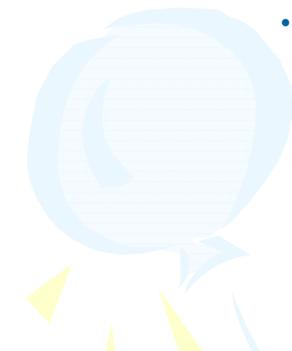
分散共分散行列  $\mathbf{\Omega} \equiv V(\mathbf{r})$

リスク回避度  
(スカラー定数)  $\lambda$

リスク回避度を用いた効用関数を定義し、2次計画問題 (QP) により、効率的フロンティア上の特定のポートフォリオを選びます。



# 資産運用の投資比率決定の手順



## STEP1 資産配分問題（アセットアロケーション）

- ・資産クラス（国内株式、国内債券、外国株式、外国債券）への資金配分

中長期的な視点　：SAA（ストラテジックアセットアロケーション）  
短期的な視点　　：TAA（タクティカルアセットアロケーション）  
（負債サイドも考慮：ALM（Asset Liability Management））



## STEP2 特定資産内でのポートフォリオ構築問題 （銘柄保有ウエイトの決定）

- ・株式ポートフォリオの構築　（主に国内株式・外国株式）

# 資産配分問題と 配分された資産内でのポートフォリオ構築問題の関係

## 資産配分問題

最大化

$$U(\mathbf{w}) = \mathbf{R}^T \mathbf{w} - \lambda \times (\mathbf{w}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{w})$$

制約条件

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

各資産への投資比率  $\mathbf{w} = (w_{\text{国内株式}} \quad w_{\text{国内債券}} \quad w_{\text{外国株式}} \quad w_{\text{外国債券}})^T$

各資産のリターン  $\mathbf{r} = (r_{\text{国内株式}} \quad r_{\text{国内債券}} \quad r_{\text{外国株式}} \quad r_{\text{外国債券}})^T$

定数ベクトル  $\mathbf{e} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^T$

各資産の期待リターン  $\mathbf{R} \equiv E(\mathbf{r})$

分散共分散行列  $\mathbf{\Omega} \equiv V(\mathbf{r})$

## 特定資産内でのポートフォリオ構築問題

$R_{\text{国内株式}} (\equiv E(r_{\text{国内株式}}))$ : TOPIXの期待リターン

資産配分問題において国内株式資産の期待リターンは市場平均 (TOPIX) での期待リターンを利用。

→ 特定資産 (ex.国内株式) におけるポートフォリオ構築にあたっては  
TOPIXリターン (=ベンチマーク) 以上の成果が目標となる

# ベンチマークと 株式ポートフォリオの例

注目するポイント

## 1. アクティブ運用（TOPIXベンチマーク）

（例） バリュー型クオンツ運用（割安銘柄選択型）

## 2. パッシブ運用（TOPIXベンチマーク）

- ・ 完全法  
TOPIX 全銘柄保有
- ・ 準完全法  
何からの手法により部分的に保有銘柄

## 3. その他（ベンチマークなし）

- ・ 最小分散ポートフォリオ、低ボラティリティ戦略  
（最近ではスマートベータという用語も...）
- ・ ベンチマークなしのアクティブ運用

アクティブリスク  
（対TOPIXでのリスク）

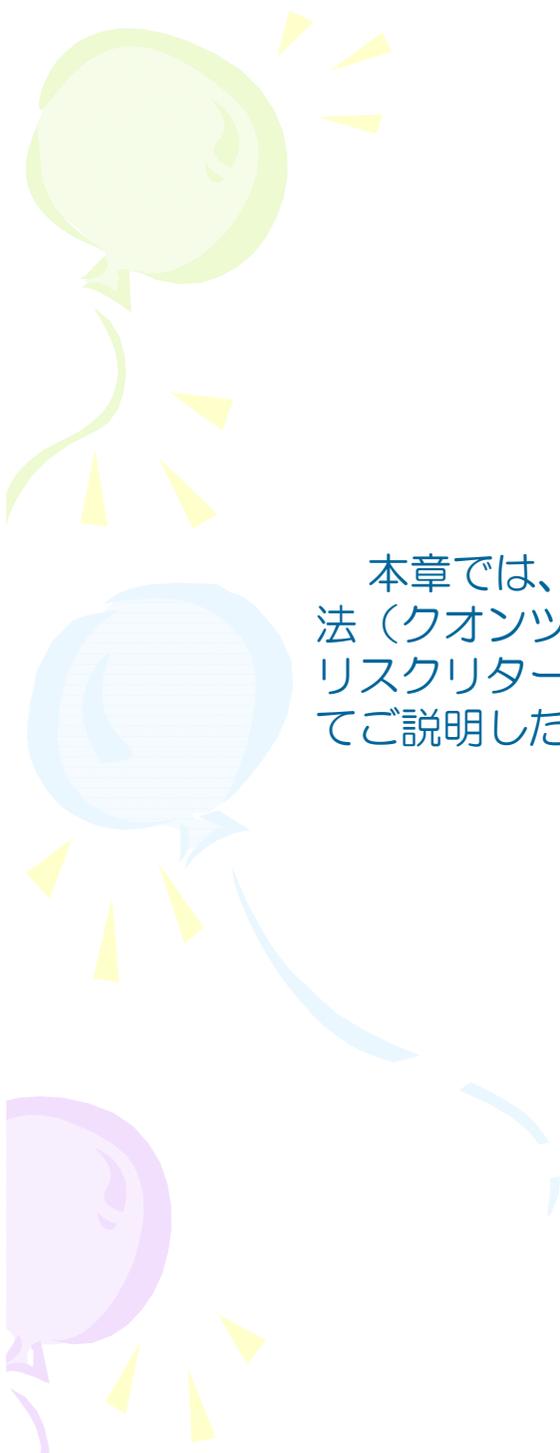
アクティブリターン  
（対TOPIXリターン）

絶対リスク

絶対リターン



## 第3章 株式ポートフォリオにおける 最適化問題



## 第3章のながれ

本章では、最適化問題が頻繁に利用される株式ポートフォリオの構築手法（クオンツ運用）をご紹介します。重要な概念である、アクティブリスクリターン平面や株式リターンの説明要因（ファクター）などについてご説明した後、ポートフォリオ構築プロセス例をご紹介します。

# アクティブリターンと アクティブリスク

## 個別銘柄

アクティブリターン  $a_i = r_i - r_{TOPIX}$

対TOPIXリターン

## ポートフォリオ

アクティブリターン  $a_P = r_P - r_{TOPIX}$

対TOPIXリターン

アクティブリターン

$E(a_P)$

対TOPIXリターンの期待値

アクティブリスク

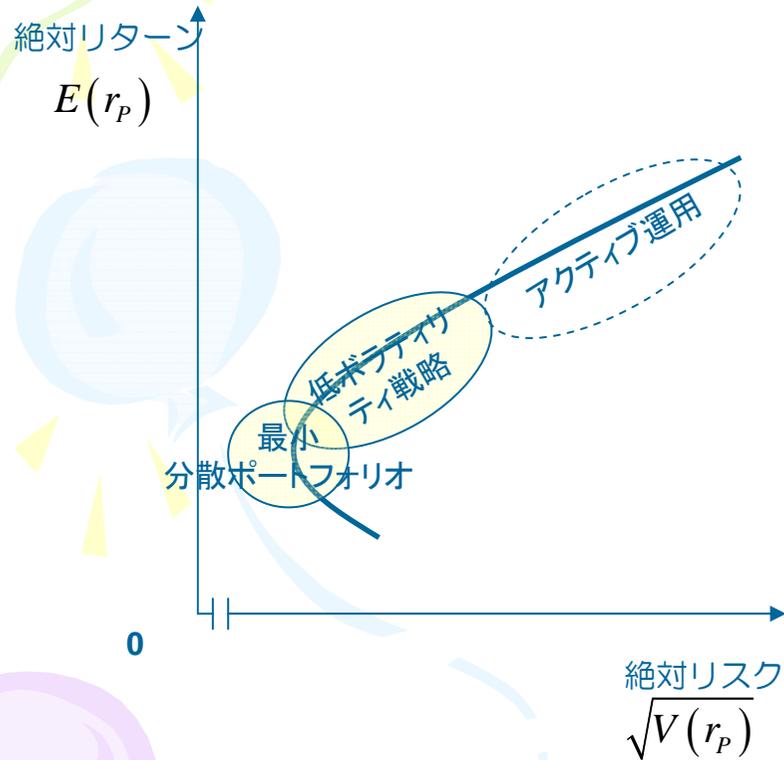
$TE \equiv \sqrt{V(a_P)}$

対TOPIXリターンの標準偏差

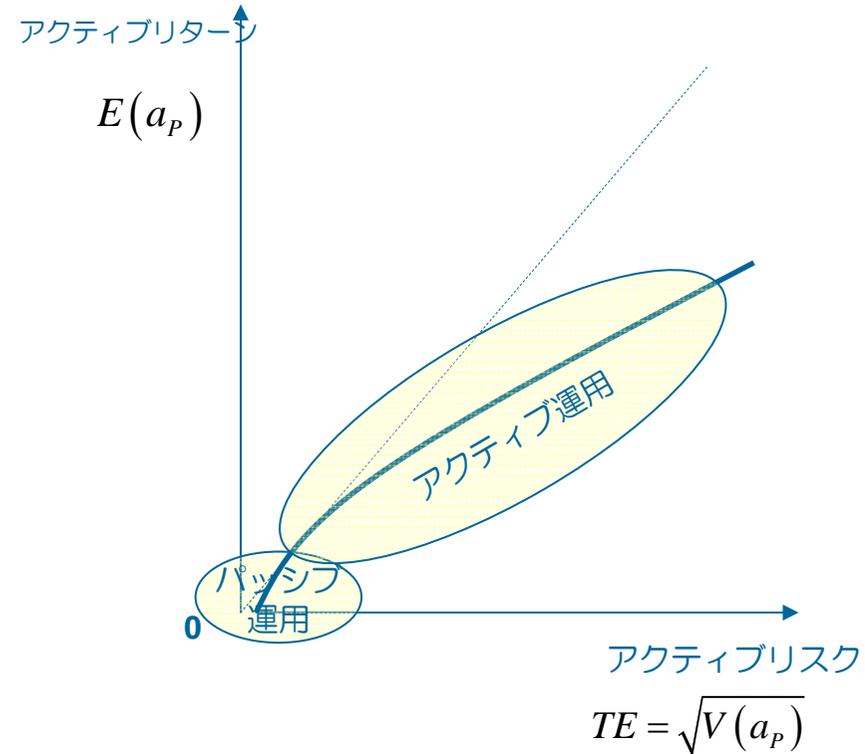
ポートフォリオリターンのベンチマークリターンから乖離するリスクをアクティブリスク (=Tracking Error) と呼びます。

# 2種類の効率的フロンティア

## 絶対リスク・絶対リターン平面



## アクティブリスク・アクティブリターン平面



(注)アクティブリスク・リターン平面の詳細な議論は 小林・南 (2008) をご参照

最適化問題は絶対リスク・絶対リターン平面上で考える場合と、  
アクティブリスク・アクティブリターン平面上で考える場合が存在します。

# 個別銘柄の株式リターンの説明要因 (ファクター)

## 1. 3ファクター

(注) 3ファクターモデルの詳細部分についてはFama and French (1993) をご参照

$$r_i = f_{\text{市場感応度}} b_{\text{市場感応度}, i} + f_{\text{企業規模}} b_{\text{企業規模}, i} + f_{BPR} b_{BPR, i} + \varepsilon_i$$

個別銘柄の  
リターン  
(対安全資産金利)

ファクターローディング (エクスポージャー、スコア)  
銘柄固有の数値

ファクター (リターン)  
市場共通の数値

## 2. その他

- ・ 4ファクターモデル  
3ファクターにモメンタムファクターを追加 (Carhart(1997))
- ・ 業種ダミー  
東証33業種分類など

株式のリターンの説明要因は「ファクター」と呼ばれ、代表的なファクターとして①市場感応度、②企業規模、③BPR (割安指標) などが知られております。

# アルファモデルとリスクモデル

## 1. アルファモデル (ファンド毎に異なる)

(目的) アクティブ運用における銘柄の期待収益率の算出

ファクター例:

EPR (Earnings Price Ratio)  
(= 1年の企業利益/時価総額)  
↑  
アルファファクター

$$E(r_i) = E(f_{EPR}) \times b_{EPR,i}$$

EPRのファクター  
リターンの期待値

EPRのスコア

## 2. リスクモデル (ファンド共通)

(目的) ポートフォリオのリスクの測定

(例1) ファンダメンタルモデル (マルチファクターモデル)

ファクター例: 市場ベータ、BPR、企業規模、東証33業種ダミー

(例2) 統計モデル

リターンの分散共分散行列の主成分1、2、3、...

リスクファクター

リターンを説明する要因 (ファクター) を  
個別銘柄の期待リターンを推定する目的では「アルファファクター」  
ポートフォリオのリスクを推定する目的では「リスクファクター」  
と実務家は呼びます。

# 株式のポートフォリオ構築 (絶対リスク・絶対リターン)

## 2次計画問題(QP)

変数 保有ウエイト

$$\mathbf{w} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \cdots \quad w_n)^T$$

最大化

$$\begin{aligned} U(\mathbf{w}) &= E(r_p(\mathbf{w})) - \lambda \times V(r_p(\mathbf{w})) \\ &= E(\mathbf{r}^T \mathbf{w}) - \lambda \times V(\mathbf{r}^T \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{R}^T \mathbf{w} - \lambda \times (\mathbf{w}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{w}) \end{aligned}$$

制約条件

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1 \quad \text{フルインベストメント条件}$$

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0} \quad \text{空売り禁止}$$

$$\mathbf{w} \leq (+5\%) \mathbf{e} \quad \text{保有ウエイト上限}$$

回転率制約

...

定数  $\mathbf{e} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1)^T$

リスク回避度  $\lambda$   
(スカラー係数)

アルファモデル (EPRの例)

$$\mathbf{R} = E(\mathbf{r}) = E(f_{EPR}) \times \mathbf{b}_{EPR}$$

$$\mathbf{r} \equiv (r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad \cdots \quad r_n)^T$$

$$\mathbf{b}_{EPR} \equiv (b_{EPR,1} \quad b_{EPR,2} \quad b_{EPR,3} \quad \cdots \quad b_{EPR,n})^T$$

リスクモデル (ファンダメンタルモデルの例)

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{B}^T \mathbf{\Omega}_f \mathbf{B} + \mathbf{\Omega}_{spc}$$

$$\mathbf{B} \equiv (\mathbf{b}_{\text{市場感応度}} \quad \mathbf{b}_{\text{企業規模}} \quad \mathbf{b}_{BPR} \quad \cdots)^T$$

$$\mathbf{F} \equiv (f_{\text{市場感応度}} \quad f_{\text{企業規模}} \quad f_{BPR} \quad \cdots)^T$$

$$\mathbf{\Omega}_f \equiv V(\mathbf{F})$$

$$\mathbf{\Omega}_{spc} \equiv \text{diag}(\varepsilon_i)$$

(注)入力データ削減による  
計算高速化テクニック等は  
枇々木、田辺(2005)を  
ご参照

アルファモデルによる個別銘柄の期待収益率とマルチファクター型の  
リスクモデルを用いて、2次計画問題(QP)による最適解を  
最適化エンジン(オプティマイザー)により計算することが多い。

# 株式のポートフォリオ構築 (アクティブリスク・アクティブリターン)

## 2次計画問題(QP)

変数

超過ウエイト=保有ウエイト-TOPIXウエイト

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n)^T$$

最大化

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= E(a_p(\mathbf{x})) - \lambda \times V(a_p(\mathbf{x})) \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{x} - \lambda \times (\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x}) \end{aligned}$$

制約条件

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{topix} + \mathbf{x}$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1$$

フルインベストメント条件

$$\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$$

空売り禁止

$$(-5\%)\mathbf{e} \leq \mathbf{x} \leq (+5\%)\mathbf{e}$$

超過ウエイト制約

回転率制約

...

定数

$$\mathbf{e} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)^T$$

リスク回避度  $\lambda$

(スカラー係数)

保有ウエイト  $\mathbf{w} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \dots \quad w_n)^T$

TOPIX  
ウエイト  $\mathbf{w}_{topix} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad \dots \quad w_n)^T$

$$\mathbf{e} = (1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1)^T$$

(注) アクティブリスク・リターン平面の詳細な議論は 小林・南 (2008) をご参照

アクティブリスク・アクティブリターン平面でも同様に2次計画問題(QP)で解くことができます。



# ポートフォリオシミュレーションのイメージ

クオンツ分析の例 (ポートフォリオシミュレーション) .....



クオンツアナリストはシミュレーションを繰り返すことによりアルファモデル等の研究開発を実施しています。

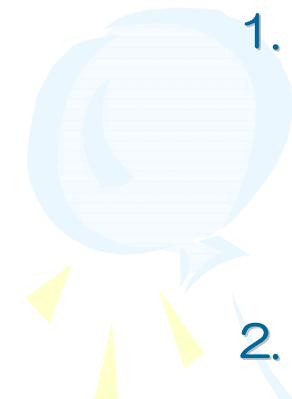


## 第4章 ロバストポートフォリオ最適化 (RNUOPTの活用例)



## 第4章のながれ

2次計画問題による最適化はよく用いられる手法ですが、発展的なポートフォリオ構築手法としてロバストポートフォリオ最適化が知られています。



### 1. ロバストポートフォリオ最適化問題

ロバストポートフォリオ最適化問題は半正定値計画問題として表現することができます。本章では、分散共分散行列に不確実性が存在する場合のロバスト最適化手法例をご紹介します。



### 2. RNUOPTによる先端研究例のご紹介

資産運用の分野では利用可能な過去データは限定的（60ヶ月など）であります。そのため、最適化ポートフォリオ構築にあたっては、サンプリングエラーがポートフォリオ構築上の問題になることが知られています。（南[2013]など）本章ではサンプリングエラーの問題を克服する研究例をご紹介します。

# ロバストポートフォリオ最適化問題の概要 (先行研究)

## ロバストポートフォリオ最適化問題

変数  $\mathbf{w} = (w_1 \ w_2 \ w_3 \ \dots \ w_n)^T$

$\Omega$   $n \times n$ 行列

最大化

$$\max_{\mathbf{w}} \left\{ \mathbf{R}^T \mathbf{w} - \lambda \times \left( \max_{\Omega} \left( \mathbf{w}^T \Omega \mathbf{w} \right) \right) \right\}$$

制約条件

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 1$$

$$\Omega \succ 0 \quad \text{半正定値制約}$$

$$\underline{\Omega} \leq \Omega \leq \overline{\Omega} \quad \text{各要素別に上限値、下限値}$$

分散共分散行列に不確実性が存在するケース

$\mathbf{w}, \Omega$  に関する3次式  
しかし、1次式に問題を変換可能  
→J.Fabozzi et al.(2007)

各要素に上下限の制約 ( $\underline{\Omega} \leq \Omega \leq \overline{\Omega}$ )  
がある分散共分散行列の中で、ポートフォリオのリスクが最大となる分散共分散行列  $\Omega$  を考える。

制約条件の中に  
不等式制約が存在します。

(注)Rに不確実性を追加した場合の定式化はR.Tutuncu and M.Koenig(2004)参照

制約条件に半正定値条件が存在します。一方で、不等式制約が存在するため、半正定置計画問題の等式標準形とはなっていません。

# 半正定置計画問題の等式標準形 とモデリング言語の役割

## 半正定値計画問題 (SDP) の等式標準形

変数  $\mathbf{Y}$  (行列)

最大化

$$\max_{\mathbf{Y}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{Y}$$

制約条件

↑  
行列の各要素毎の積の合計値

$$\mathbf{D}_i \cdot \mathbf{Y} = g_i, (i = 1, 2, 3, \dots, J)$$

等式制約

$$\mathbf{Y} \succ 0$$

半正定値制約

等式標準形に不等式制約は存在しません。  
しかし、不等式制約はモデリング言語により等式制約と  
半正定値制約の組合せに変換することができます。

(\*)ソルバーが等式標準形のみに対応していない場合には上記のような変換が必要になります。

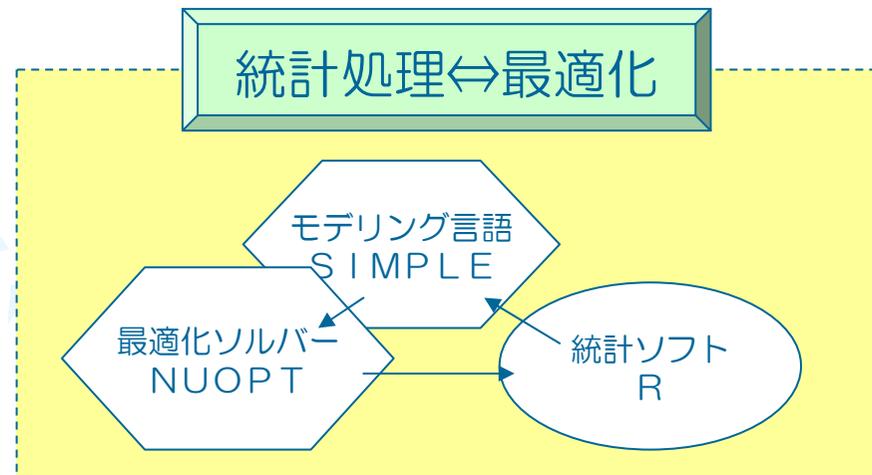
# RNUOPT活用のメリット

## 1. 統計ソフトRとの連携

資産運用問題では分散共分散行列の計算など各種統計計算処理が必須。  
業界で利用頻度の高い統計ソフトR上から簡単に最適化ソルバーが利用可能。

## 2. モデリング言語との連携

RNUOPTは実績のあるNUOPTのエンジンを搭載しており、NUOPTのモデリング言語(SIMPLE)を内包している。そのため、モデリング言語と最適化ソルバーが一体化して機能するためユーザーの問題設定が比較的容易。



# 最適化ポートフォリオ計算における サンプリング誤差の補正 (研究例)

## 線形半正定値計画問題 (Linear-SDP)

変数

$\Omega$

(分散共分散行列)

分散共分散行列の  
推定値

$\hat{P}_j$

$\hat{\Omega}$  のj番目の  
固有ベクトル  
(定数)

最大化

$$f_j(\Omega) = \hat{P}_j^T \Omega \hat{P}_j$$

固有ベクトルの分散 (=固有値)

(最大値を  $v_j$  に対する分散 (=固有値) の  
サンプリング誤差上限と解釈する)

制約条件

$$\Omega \succ 0$$

半正定値制約

$$\underline{\Omega} \leq \Omega \leq \bar{\Omega}$$

不等式制約

標本分散共分散行列の固有ベクトルの分散 (=固有値)  
サンプリング誤差による補正

最適化ポートフォリオはリスクを小さくしようとするため、  
分散共分散行列の低固有値の影響を大きく受ける。

標本分散共分散行列はサンプリング誤差の影響で、  
低固有値が過小になる傾向が統計的に知られている。  
(Wishart分布の性質)

$\underline{\Omega} \leq \Omega \leq \bar{\Omega}$  の条件下で固有ベクトルの分散の  
サンプリング誤差がどの程度かをRNUOPTにて算出する。  
← 左記のSDP問題

分散共分散行列の低固有値をサンプリング誤差を勘案して  
補正した後、ポートフォリオ最適化問題 (QP) を  
RNUOPTにて計算する。

(注) 固有値補正の詳細についてはS.Minami(2013)をご参照

最適化ポートフォリオではサンプリングエラーが問題になることがあります。  
半正定値問題の活用により、固有値のサンプリングエラーを適切に処理することができます。

(注) 計算可能な資産数は計算する機器環境などに依存します。

# RNUOPTのコード例

(分散共分散行列の固有値のサンプリング誤差の計算)

## 線形半正定値計画問題とコード例(RNUOPT)

変数

$\Omega$

最大化

$$f_j(\Omega) = \hat{P}_j^T \Omega \hat{P}_j$$

( $\Omega$ の線形関数)

制約条件

$$\Omega \succ 0$$

半正定値制約

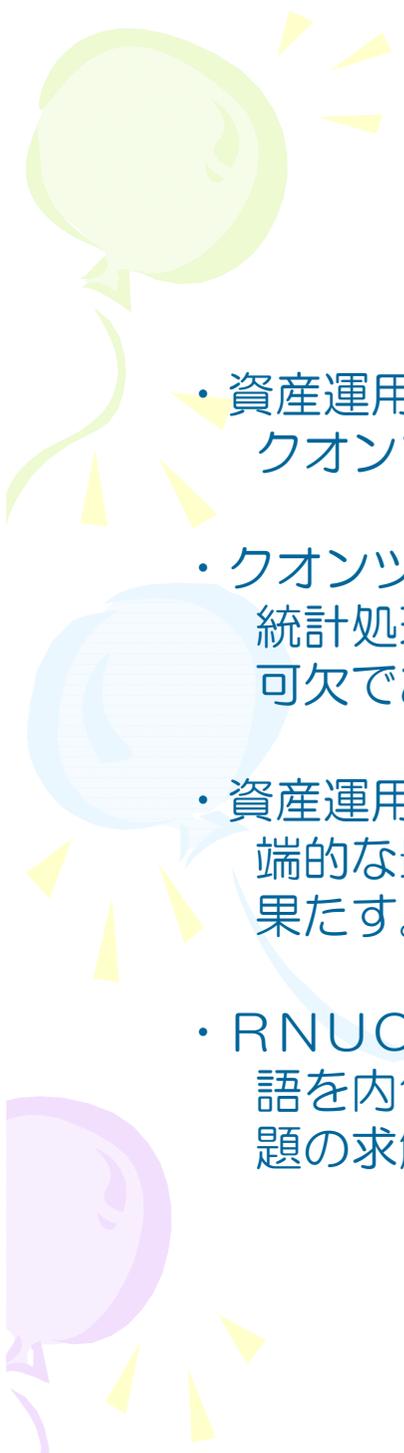
$$\underline{\Omega} \leq \Omega \leq \bar{\Omega}$$

線形不等式制約

$\underline{\Omega}$      $\bar{\Omega}$      $\hat{P}_j$

```
SdpOpt <- function(OmegaL, OmegaU, P){
  Asset <- Set()
  k <- Element(set = Asset)
  l <- Element(set = Asset)
  OmegaL <- Parameter(OmegaL, index = dprod(k, l))
  OmegaU <- Parameter(OmegaU, index = dprod(k, l))
  P <- Parameter(P, index = k)
  Omega <- Variable(index = dprod(k,l))
  SymOmega <- SymmetricMatrix(dprod(k, l))
  f <- Objective(type = maximize)
  f ~ Sum(P[k] * Omega[k,l] * P[l], k,l)
  SymOmega[k,l,k >= l] ~ Omega[k,l]
  SymOmega >= 0
  Omega[k, l,k<=l] >= OmegaL[k,l]
  Omega[k, l,k<=l] <= OmegaU[k,l]
  Omega[k,l,k<l] == Omega[l,k]
}
```

上下限不等式制約のある線形半正定値問題(lsdp)をモデリング言語SIMPLEのコードとして記述し、NUOPTの計算エンジンにて最適解を算出することにより固有値のサンプリング誤差を求めます。



## まとめ

- 資産運用では最適化問題が数多く存在し、年金運用などに従事するクオンツアナリストは最適化ソルバーを頻繁に利用している。
- クオンツ分析にあたり、マルチファクターモデルなどの計算に多様な統計処理が必須であり、統計パッケージと最適化ソルバーの利用が不可欠である。
- 資産運用におけるロバストポートフォリオ最適化（SDP）などの先端的な最適化計算の実現には、モデリング言語が非常に重要な役割を果たす。
- RNUOPTは統計パッケージと連携しており、また、モデリング言語を内包しているため、クオンツアナリストの多様な形式の最適化問題の求解による先端研究のニーズにも合致するものである。



## 参考文献

小林孝雄,南聖治 (2008),「日本株式市場におけるエンハンスストアクティブ戦略-アクティブ運用の分離定理と合成エンハンスストアクティブ戦略-」,証券アナリストジャーナル, 46, pp.19-41

枇々木規雄,田辺隆人 (2005),「ポートフォリオ最適化と数理計画法」,朝倉書店

南聖治(2013),「マルチファクターリスクモデルによる最適化ポートフォリオにおける推定リスクの過小評価バイアス」,JAFEE大会

Carhart, M. (1997), "On Persistence in Mutual Fund Performance," *Journal of Finance*, 52, pp.57-82

Fabozzi, J., N. Kolm, A. Pachamanova and M.Focardi (2007), "Robust Portfolio Optimization and Management," WILEY

Fama, E. and K.French (1993), "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds," *Journal of Financial Economics*, 33, pp.3-56.

Minami, S. (2013), "Robust Portfolio Optimization Under Sampling Error: Estimation of Sampling Error in Small Eigen Value by Semidefinite Programming," Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2292361>

Tutuncu, R. and M.Koenig (2004), "Robust Asset Allocation," *Annals of Operations Research*,132, pp.157-187

## MEMO

- また、本資料に記載された情報、意見および予想等は、本資料を作成した時点の判断を反映しており、今後の金融情勢、社会情勢等の変化により、予告なしに内容が変更されることがありますのであらかじめご了承ください。

## ◆ご注意いただきたいこと（必ずご覧ください）◆

企業年金制度（厚生年金基金制度、確定給付企業年金制度、非適格退職年金制度など）にかかる年金信託契約等については以下の内容を十分にお読みください。

### ▶ 年金信託契約に関するリスク

- 年金信託契約では、お客さまの信託財産を各種の年金投資基金信託受益権等を通して、または直接に、投資対象である株式、公社債、外貨建て証券、不動産等に投資し、または貸付金として貸し付けるなどして運用します。これら投資対象は価格変動を伴うため、以下のような場合に元本の欠損が生じるおそれがあります。
  - ・ 株式相場、金利水準、為替相場、不動産相場、商品相場、その他金融商品市場における株価指数等の指標の変動に伴い、運用対象である有価証券等（投資信託、投資証券、預託証券、受益証券発行信託の受益証券等も含む。以下同じ。）の価格が変動する場合
  - ・ 有価証券等の発行者や保証会社等、または貸付金や貸付有価証券（現金担保の再運用を含む）の貸出・運用先の業務や財産状況の変化に伴い運用対象である有価証券等の価格が変動する場合
  - ・ 一般信用取引の取引相手となる証券会社の業務や財産の状況に変化が生じた場合
- 為替オーバーレイ運用および一般信用取引では、売り建てた通貨や株式の価格が予想とは反対に変化したときの損失が限定されていません。

### ▶ 年金信託契約のお客さまにご負担いただく費用

お客さまには、信託契約に基づき①および②の費用を、業務委託契約等に基づき③の費用をそれぞれの費用に係る消費税等と共にご負担いただきます。なお、これらの費用は信託財産の中からいただくか、またはお客さまにご請求します。（費用の詳細については弊社にお問い合わせください）

#### ① 信託契約期間中にご負担いただく費用

項目	内容
信託報酬 (信託財産の運用・管理にかかる費用)	信託財産に対して信託報酬率を乗じて計算します。信託報酬率は、お客さまからご提示いただく信託財産の運用指針、信託財産額等に応じて個別に決定するため記載することができません。
投資対象に係る手数料等	ヘッジファンド、ファンド・オブ・ヘッジファンズ等への投資にあたっては、当該ファンド等の組成費用、信託報酬等がかかる場合があります。また、投資事業有限責任組合や匿名組合等への出資にあたっては、組合等の監査費用、売買手数料、郵送費、振込手数料、弁護士費用等がかかる場合があります。 これらの手数料等は種類が多岐に亘り、また運用状況等により異なるため、事前に料率、上限額またはその計算方法の概要等を記載することができません。
信託事務の処理に要する手数料等	有価証券売買委託手数料、株式分割手数料、名義書換手数料、外国証券の取得管理費用、有価証券保管手数料、信託財産留保金その他費用が発生しますが、これらは信託財産の運用状況、保管状況等により異なるため、事前に料率、上限額またはその計算方法の概要等を記載することができません。

## ◆ご注意いただきたいこと（必ずご覧ください）◆

### ② 信託契約解除時にご負担いただく費用

項目	内容
早期解約手数料	契約締結の日から最長5年以内（契約種別により異なります）に契約の解除の申し出があった場合には、契約解除日における信託財産に対して、8.0%を上限とする料率を乗じて計算する早期解約手数料をご負担いただきます。

### ③ その他年金制度の運営等に関してご負担いただく費用

弊社がお客さまの年金制度の幹事受託機関として年金制度の管理や資金のとりまとめを担当する場合には、委託を受ける業務の内容に応じて手数料をご負担いただきます。この手数料は委託を受ける業務の内容により異なるため、事前に料率、上限額またはその計算方法の概要等を記載することができません。

#### ➤ 年金信託契約に関してご注意いただきたい事項

- 年金信託は、元本及び収益が保証されていない実績配当型の商品であり、損益はすべてお客さま等に帰属します。また、本商品は預金保険の適用は受けません。
- 弊社は正当な事由があるときは、お客さまに対する1ヶ月前の予告により受託者の任を辞することができます。また、信託目的の達成または信託事務の遂行が著しく困難になった場合には、お客さまへの通知により信託契約は終了します。
- 新株予約権、取得請求権等が付された上場有価証券等ならびにオプション等一部の派生商品については権利行使期間に制限があります。また、貸株取引の対象株式は議決権行使に制限を受ける場合があります。
- 投資事業有限責任組合や匿名組合等に出資する場合、出資持分の譲渡や担保差入れは当該組合等の運営者（無限責任組合員等）の事前の同意を要する等の制約を受けることがあります。
- ファンド・オブ・ヘッジファンズ等は解約通知をいただいてから資金化までに6ヶ月程度を要することがあります。
- 為替オーバーレイ運用および国内株式ならびに外国株式のエンハンスド・アクティブ運用では、為替オーバーレイの対象資産残高、および国内株式ならびに外国株式の投資元本を上回る取引を行うことがあります。

商号等：株式会社りそな銀行