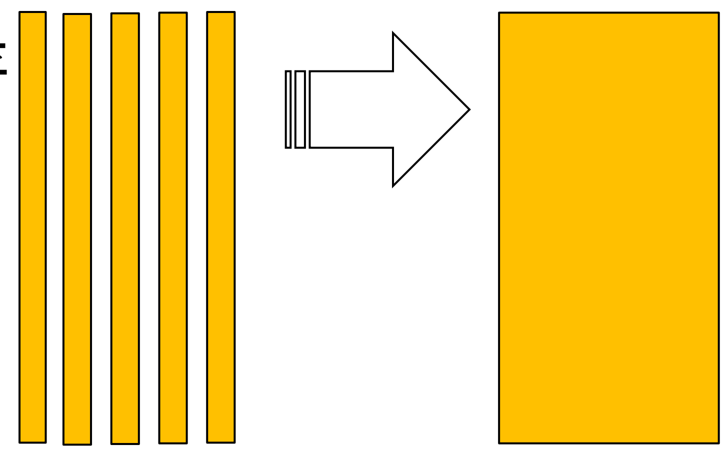
設備計画問題とラグランジュ緩和法

田辺隆人
nuopt-info@msi.co.jp
（株）数理システム

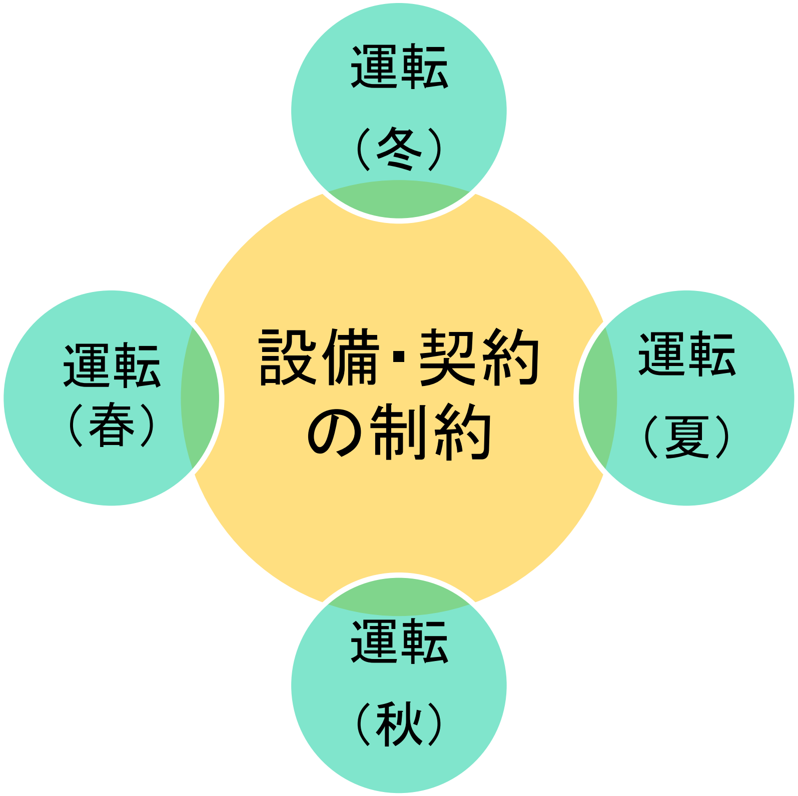
「設備計画問題」の起源

- 一つの契約にすべて（人，季節，負荷状況）が縛られる
  - 携帯電話の割引契約
  - 独立発電業者常時バックアップ電力契約
  - ガス割引契約
- 設備投資に複数のサービスが依存
  - ネットワーク設備投資
  - プラント運転機器導入
- 車両の総合台数に制限
  - 車両繰り問題
- 効果の平準化・物理的制約
  - 設備保守計画問題
  - プロジェクトスケジューリング
  - 食品運搬配車計画問題



部分問題が結合しているケースが多い

設備計画問題の典型的な構造

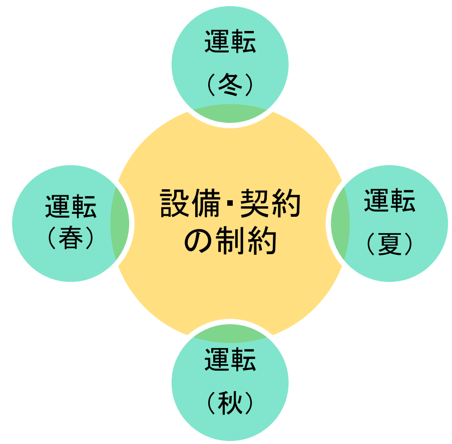


ラグランジュ緩和

問題P:

最小化　$f(x)$

制約　$g(x) \geq 0$

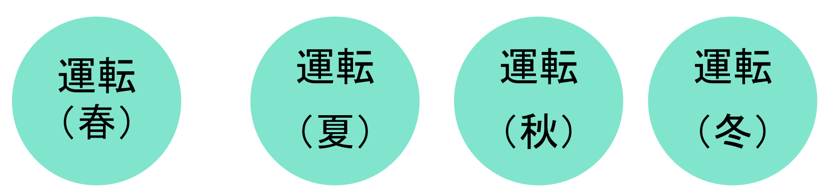


問題Pの下界を与える.

問題L(λ):

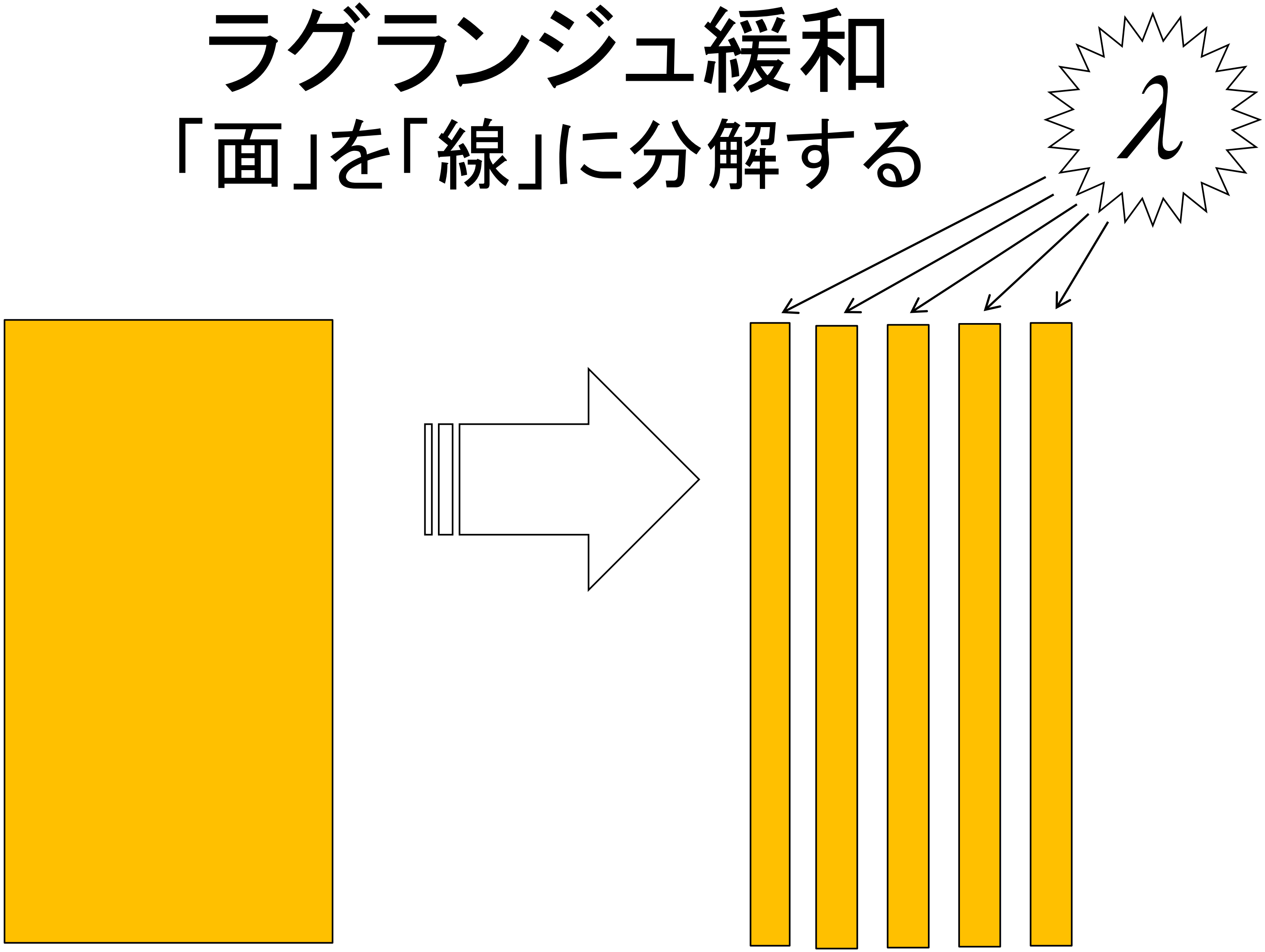
最小化　$f(x) - \lambda \cdot g(x)$

$\lambda \cdot$



ラグランジュ緩和

「面」を「線」に分解する



L(λ)ならば分離可能⇒計算コストの節減

「面」の問題の一般形

問題 P

k :季節

最小化 $f^0(z) + \sum_{k \in K} f^k(x^k, \bar{x}^k, y^k)$

制約 $h^k(x^k, \bar{x}^k, y^k) = 0, \ k \in K$

k で独立
運転計画
の制約

$g^0(z) + \sum_{k \in K} g^k(y^k) \geq 0$

k にまたがる
設備の制約

$g_z(z) = 0$

ラグランジュ緩和問題

ヨコの制約を緩和

問題　$L(\lambda)$

最小化

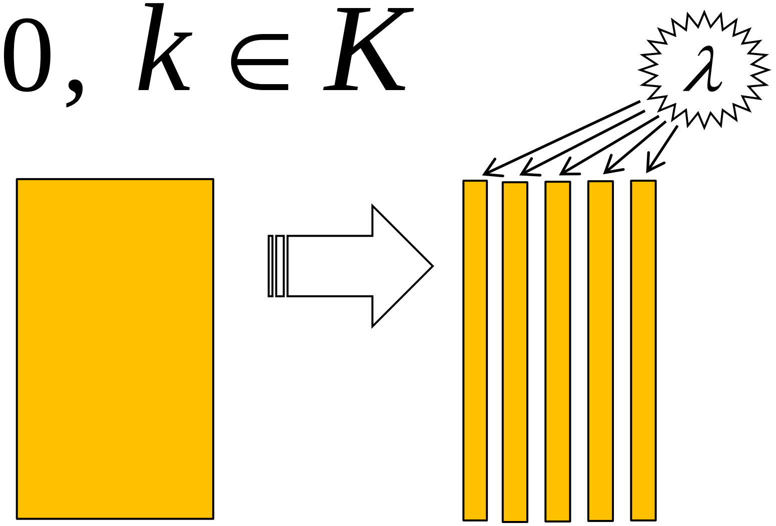
$$f^0(z) - \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot g_j^0(z) + \sum_{k \in K} \left[f^k(x^k, \overline{x}^k, y^k) - \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot g_j^k(y^k) \right]$$

制約

$$h^k(x^k, \overline{x}^k, y^k) = 0,\ k \in K$$

$$g_z(z) = 0$$

分離が可能！



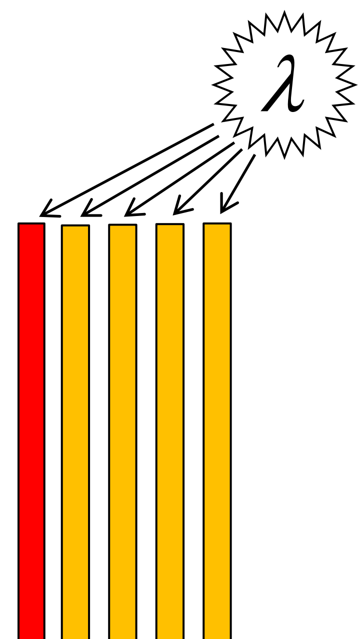
分離された問題⇒「タテ」の問題

他の部分問題からの寄与

問題 O^0

最小化 $f^0(z) - \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot g_j^0(z)$

制約 $g_z(z) = 0$



機器選定・契約設定
配管導入 etc. に帰着

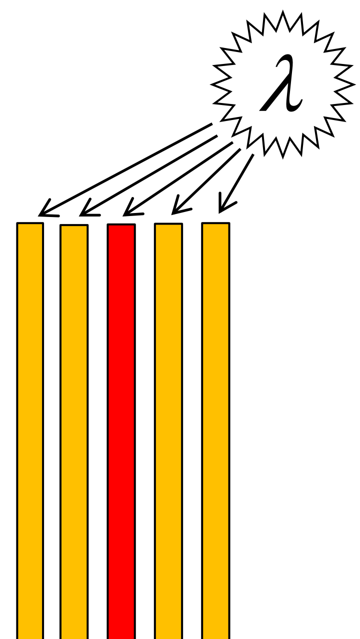
分離された問題⇒「タテ」の問題

他の部分問題からの寄与

問題 O^k

最小化 $f^k(x^k, \bar{x}^k, y^k) - \sum_{j \in J} \lambda_j \cdot g_j^k(y^k)$

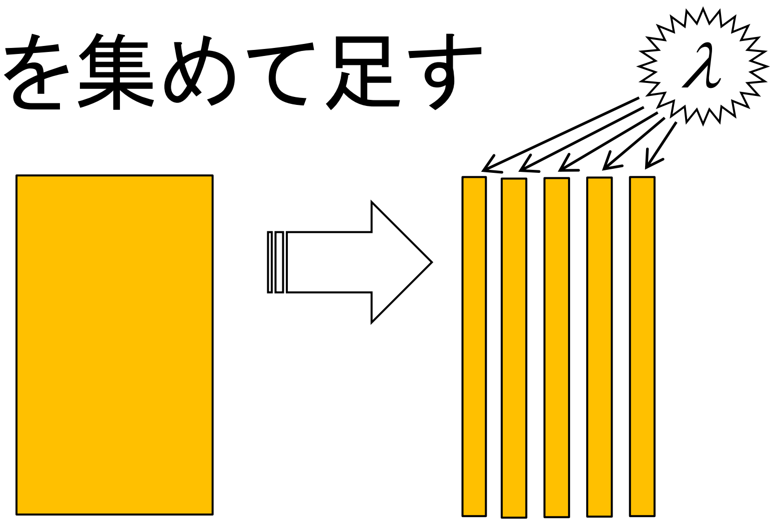
制約 $h^k(x^k, \bar{x}^k, y^k) = 0$



季節kの
運転計画問題に帰着

$L(\lambda)$ の解取得

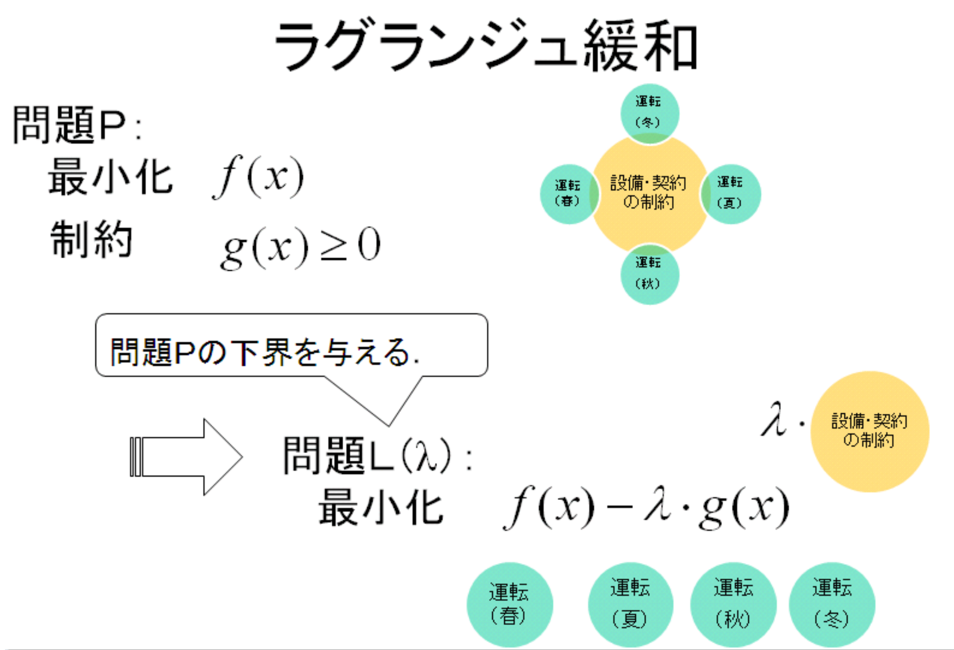
- 「タテ」の問題の解を独立に求める
  運転計画×36インスタンス＋設備計画
- 「タテ」の問題の解を集めて足す



下界は低コストで取得可能

良い下界値を求めたい

L(λ)の解（下界値）$\theta(\lambda)$
を最大化するようなλが欲しい



簡単なサンプル

問題P:

最小化　$2x+y+z$

制約　$x+y+z \geq 5$

$x-y-2z \geq 3$

$5 \geq x, y, z \geq 0$

緩和

問題 $L(\lambda)$

最小化 $2x+y+z-\lambda_1(x+y+z-5)$

$-\lambda_2(x-y-2z-3)$

制約　$5 \geq x, y, z \geq 0$

$L(\lambda)$ の目的関数の最小値 $\theta(\lambda)$ の最大化

$\theta(\lambda)$について．．

- $\theta(\lambda)$ は定義より凸関数である．

$$\theta(t\lambda+(1-t)\lambda')=\min_x\{f(x)-(t\lambda+(1-t)\lambda')\cdot g(x)\}$$
$$=\min_x\{t(f(x)-\lambda\cdot g(x))+(1-t)(f(x)-\lambda'\cdot g(x))\}$$
$$\geq t\cdot\min_x(f(x)-\lambda\cdot g(x))+(1-t)\cdot\min_x(f(x)-\lambda'\cdot g(x))$$
$$=t\cdot\theta(\lambda)+(1-t)\cdot\theta(\lambda')$$

$-g(x)$に進むと $\theta(\lambda)$ が増大するかもしれない

- $-\theta(\lambda)$ の劣勾配は $g(x)$ である

$$-\theta(\lambda)\geq -f(x)+\lambda\cdot g(x)$$

$$\because \theta(\lambda)\leq f(x)-\lambda\cdot g(x),\ x\in\Omega$$

簡単なサンプル（λの探索）

- 劣勾配を利用．．

C	D	E
λ1	λ2	obj
0.2	0.1	1.30E+00
g1	g2	
−5.00	−3.00	

$$\theta(\lambda_1,\lambda_2) \le 2x + y + z - \lambda_1(x + y + z - 5) - \lambda_2(x - y - 2z - 3)$$

g1,g2 を頼りに
λ_1,λ_2 を更新して $\theta(\lambda_1,\lambda_2)$を大きく．．

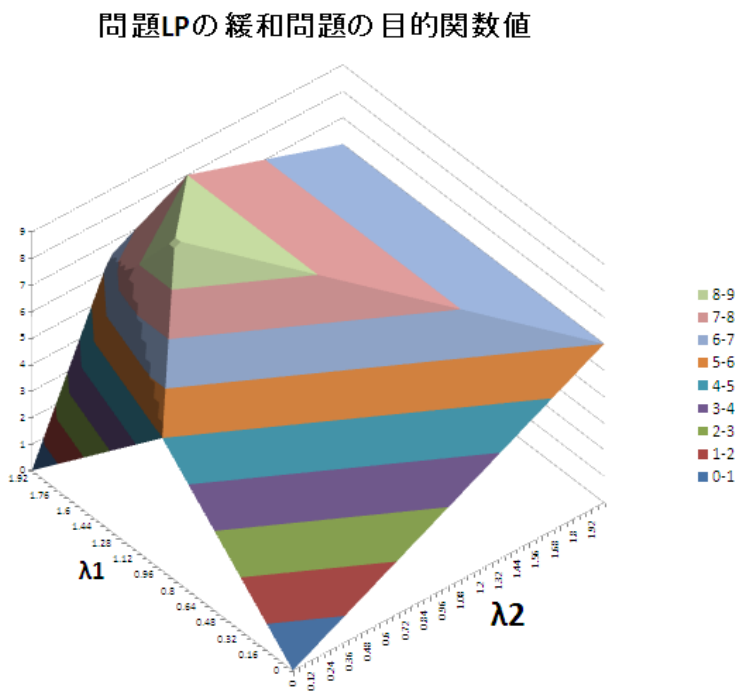
簡単なサンプル

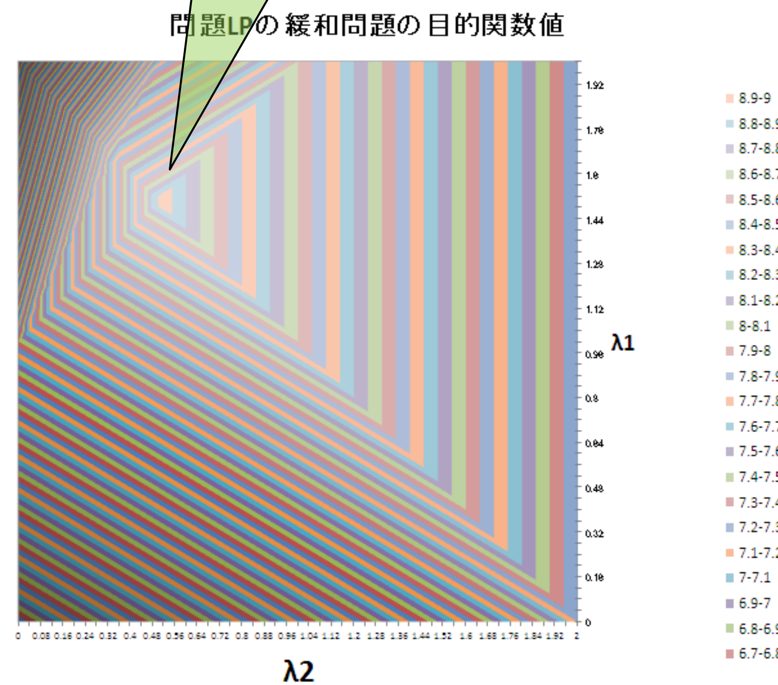
正解は

$$\lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 0.5$$

$$\theta \le 0x + 0y + 0.5z + 9$$

- $\theta(\lambda_1, \lambda_2)$ 全体の把握（不連続だが凸）





微分不可能な
凸関数 $\theta(\lambda)$ の最小化

- 劣勾配法
- 切除平面法
  - Kellyの方法
  - ACCPM

$$\theta(\lambda) \le f(x) - \lambda \cdot g(x), \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Downarrow$$

$$\theta(\lambda) \le f(x^1) - \lambda \cdot g(x^1)$$

$$\theta(\lambda) \le f(x^2) - \lambda \cdot g(x^2)$$

…

下界値の最大化問題
の緩和問題

問題　Q

$x^1, x^2, ..$ は given

最大化　w

制約

$$w \le f(x^1) - \lambda \cdot g(x^1)$$

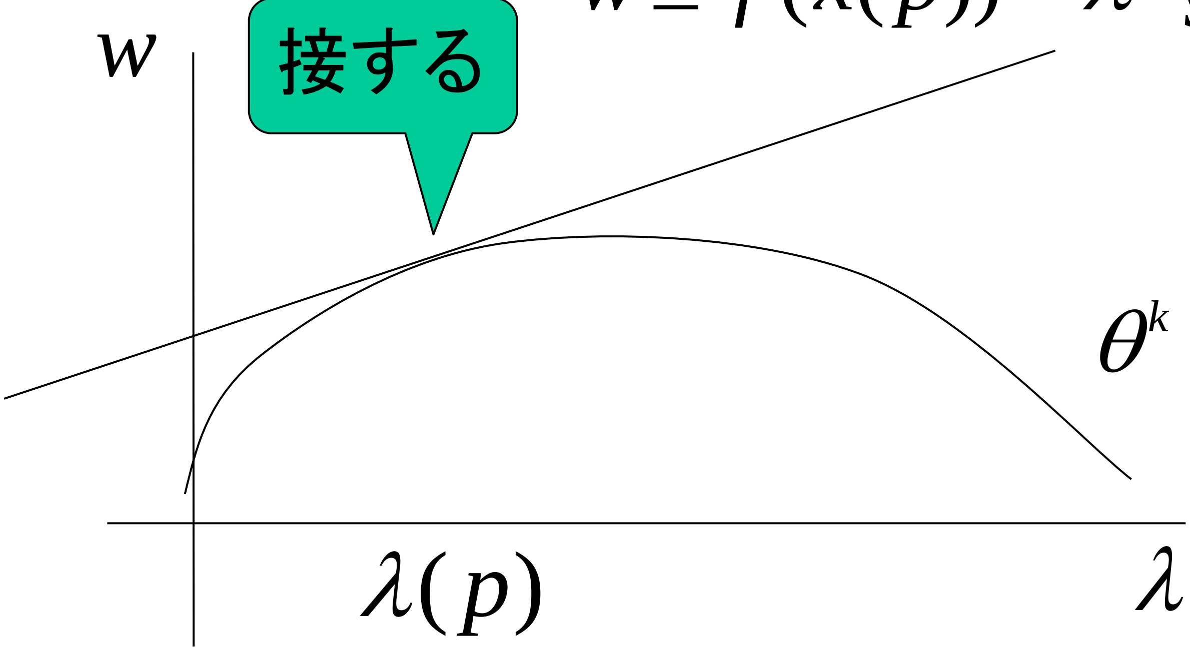
$$w \le f(x^2) - \lambda \cdot g(x^2)$$

$$\cdots$$

切除平面の形

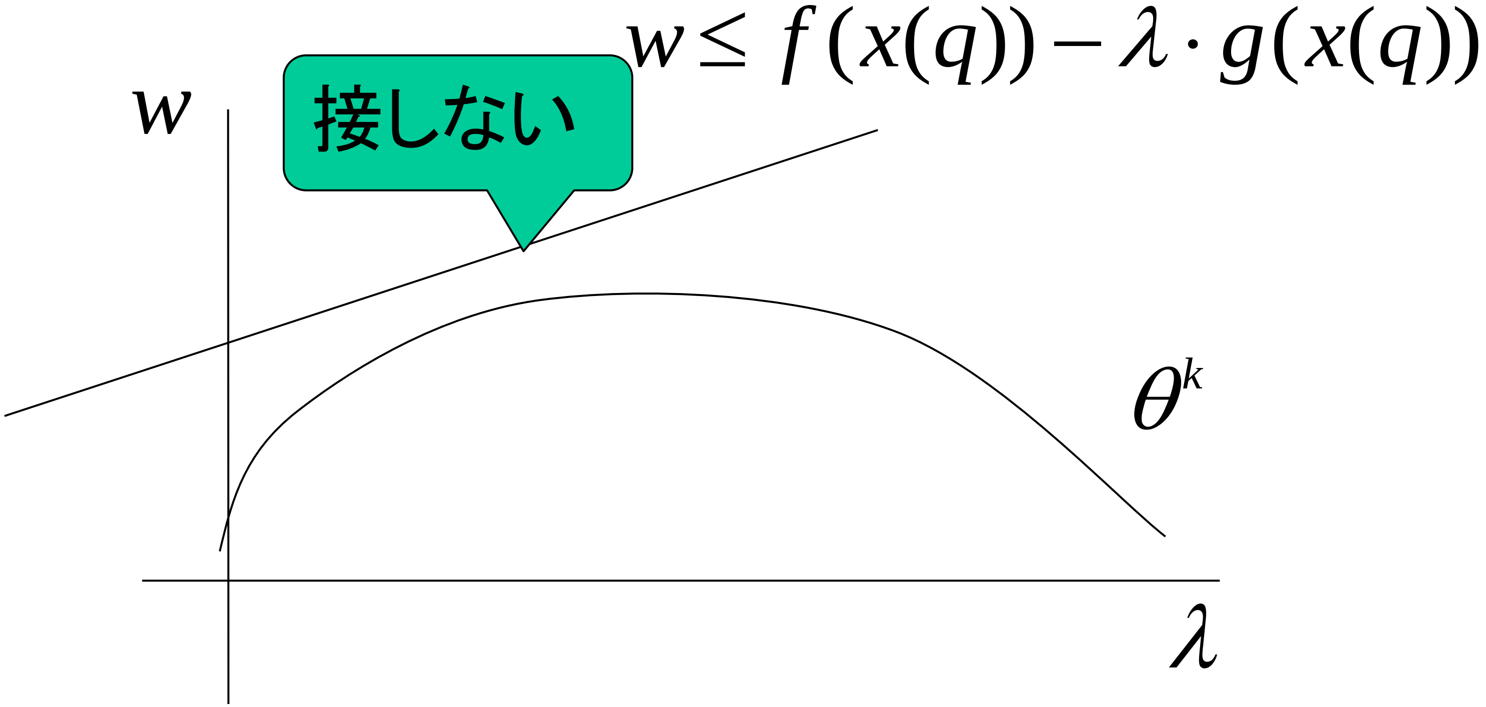
$\lambda(p)$ についての部分問題の最適解 $x(p)$ から生成

$$w \le f(x(p)) - \lambda \cdot g(x(p))$$

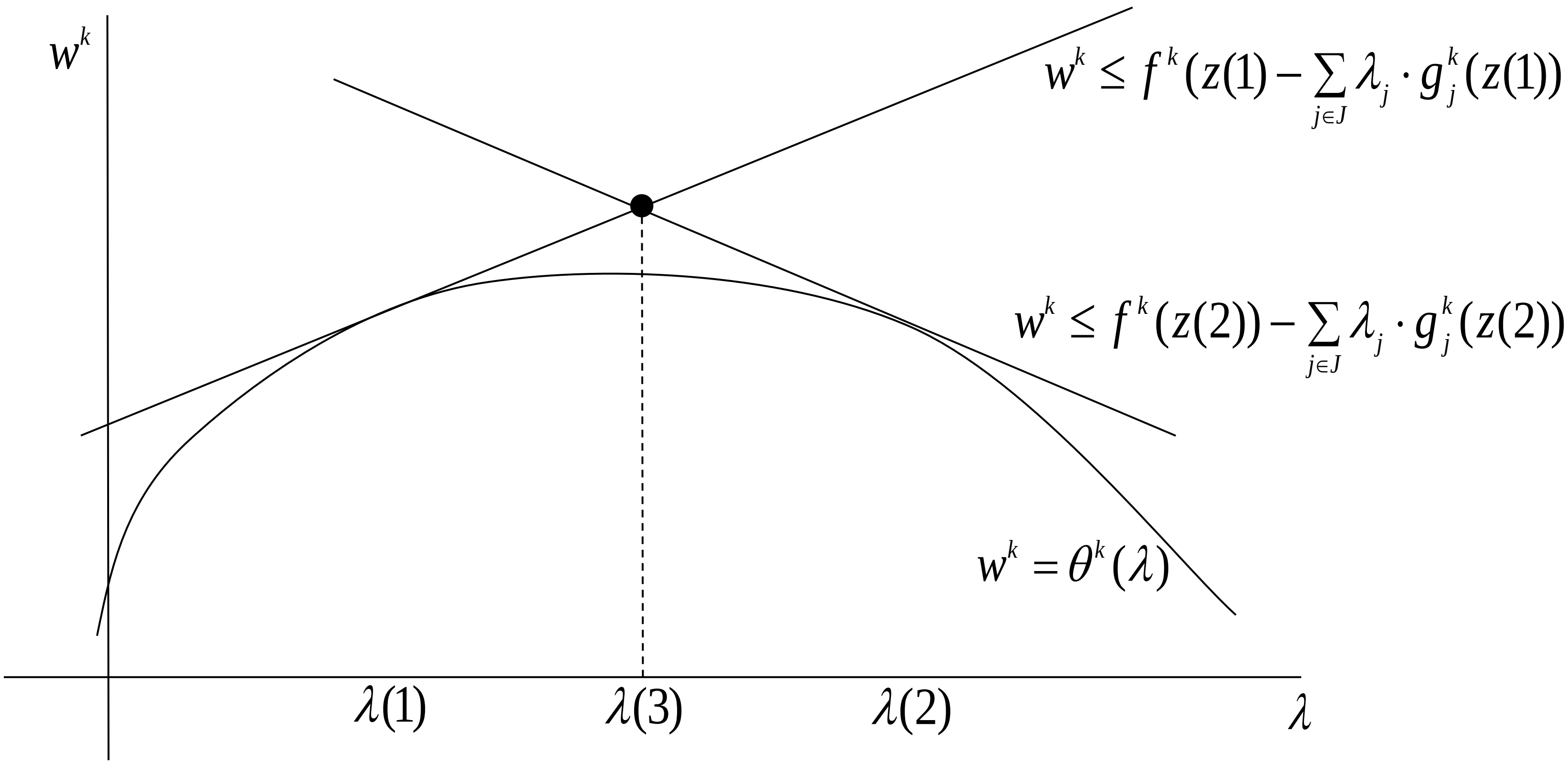


切除平面の形

適当な実行可能解 $x(q)$ から生成

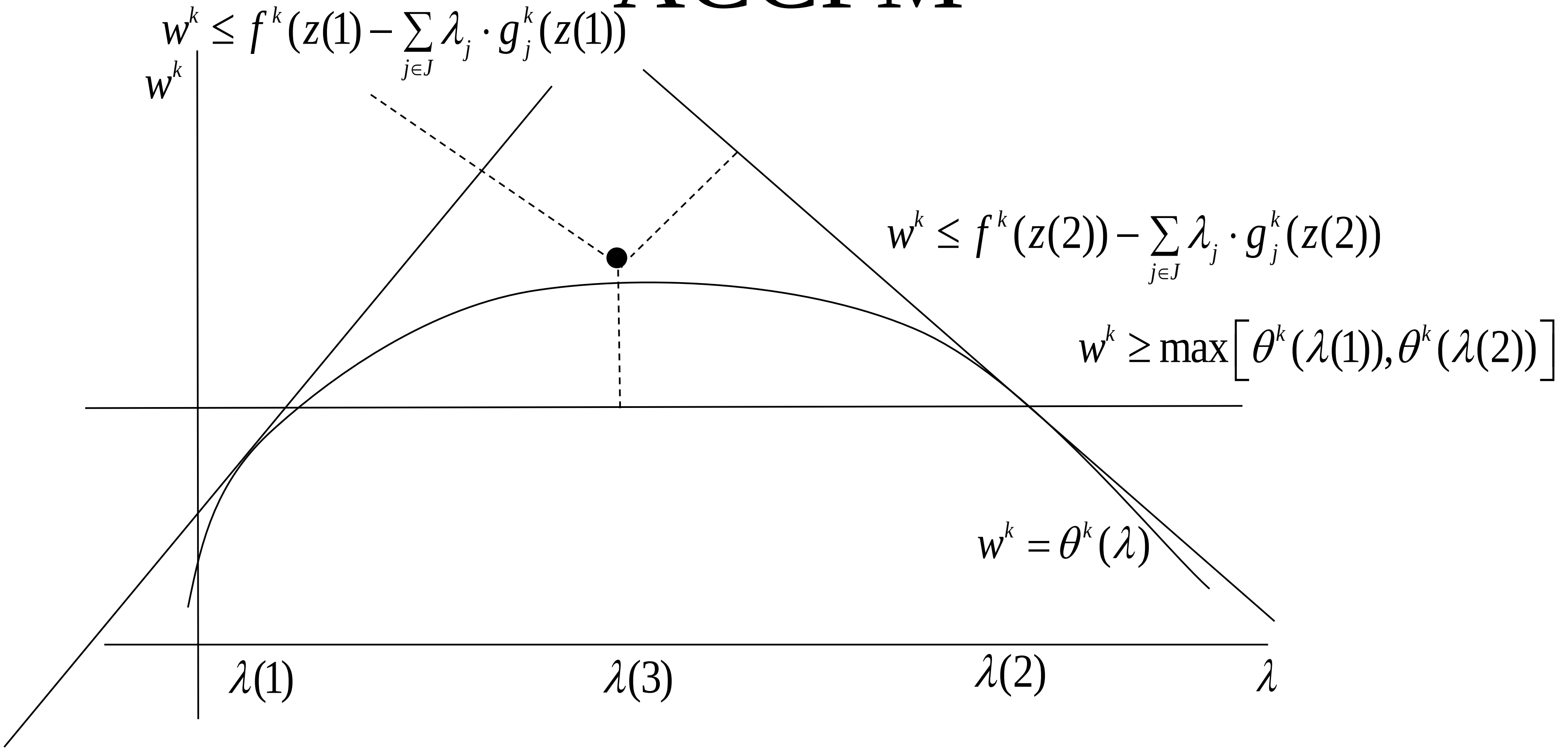


切除平面の列の発生法
Kelly's cutting plane



問題 Q の解から得る

切除平面の列の発生法 ACCPM

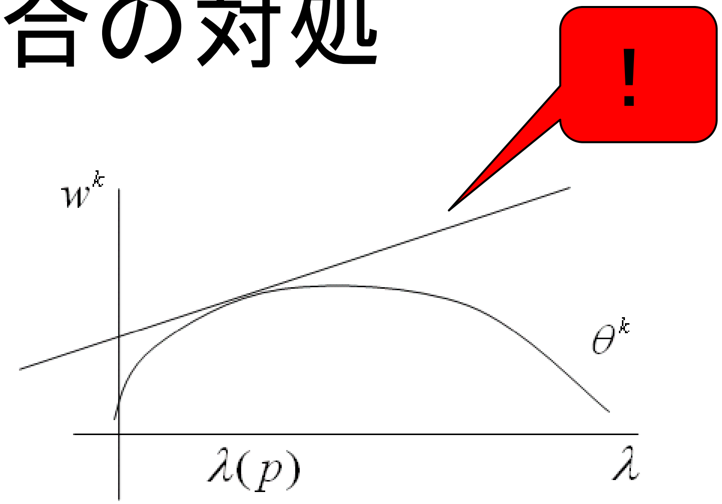


切除平面群のanalytic center から得る

Open　Question

- Kelly’s Cutting Plane か ACCPM か
- 良い実行可能解を
  早く得るための一般的な方法
- λが有界にならない場合の対処
  - 目的関数に付加項

$$\mu \cdot \left| \lambda - \lambda_{ref} \right|$$



ここまでの話の展開

- 「面」の問題を「線」に分離
  ⇒ L(λ)は分離して解ける
  ⇒ 下界は求められる
  ⇒ 下界を最大化するλが欲しい
  ⇒ θ(λ)の構造に適した切除平面法

「面」の問題の実行可能解は？
切除平面⇔部分問題の実行可能解
だから．．

実行可能解の取得

切除平面の「素」を組み合わせよう！

問題 P'

最大化 $f^0(z)+\sum_{k\in K}\sum_{p\in P} f^k(x^k(p),\bar{x}^k(p),y^k(p))\cdot u_k^p$

制約 $\sum_{p\in P} u_p^k = 1 \quad ,k\in K$

$$\boxed{g^0(z)+\sum_{k\in K}\sum_{p\in P} g^k(y^k(p))\cdot u_p^k \geq 0}$$

$$g_z(z)=0$$

ヨコの制約

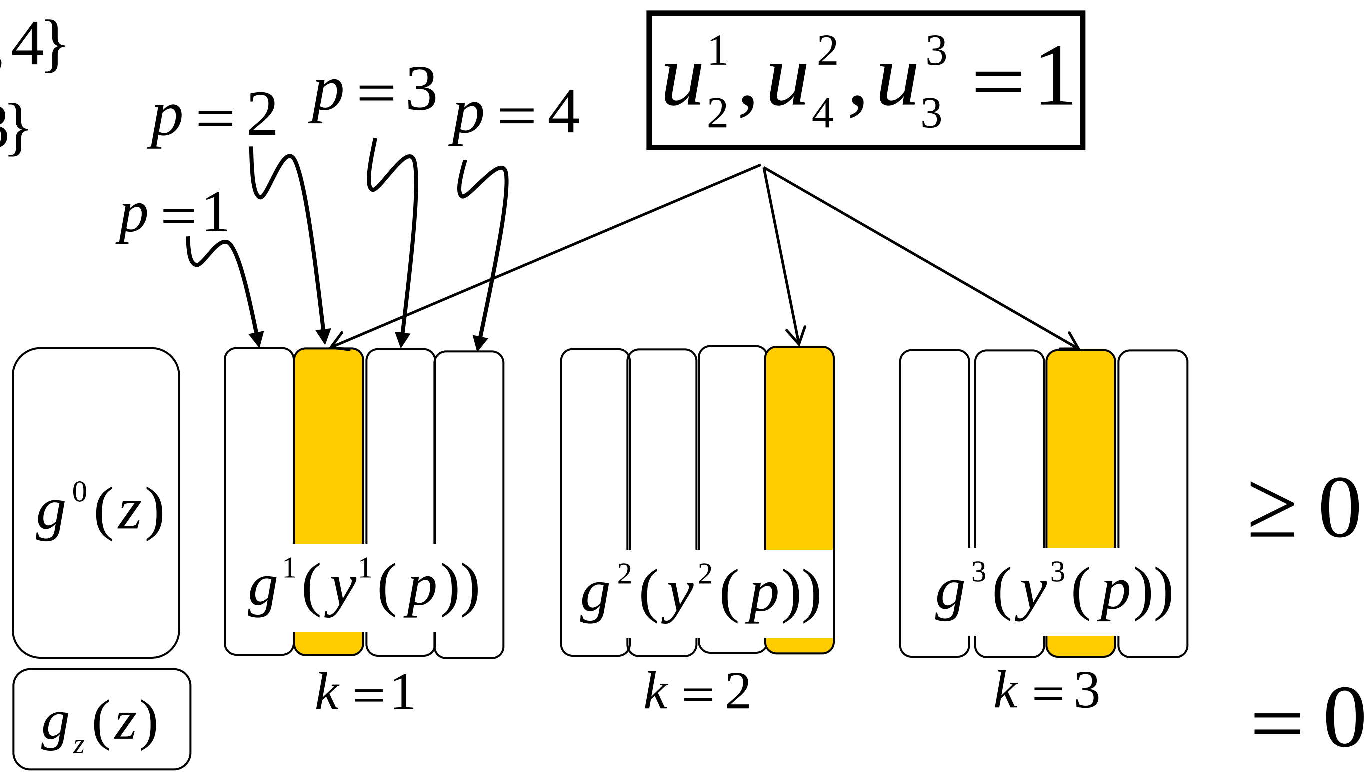
離散計画問題（割り当て問題の一種）

実行可能解の取得

- 各部分問題に列挙された解を割り当て

$P = \{1, 2, 3, 4\}$

$K = \{1, 2, 3\}$

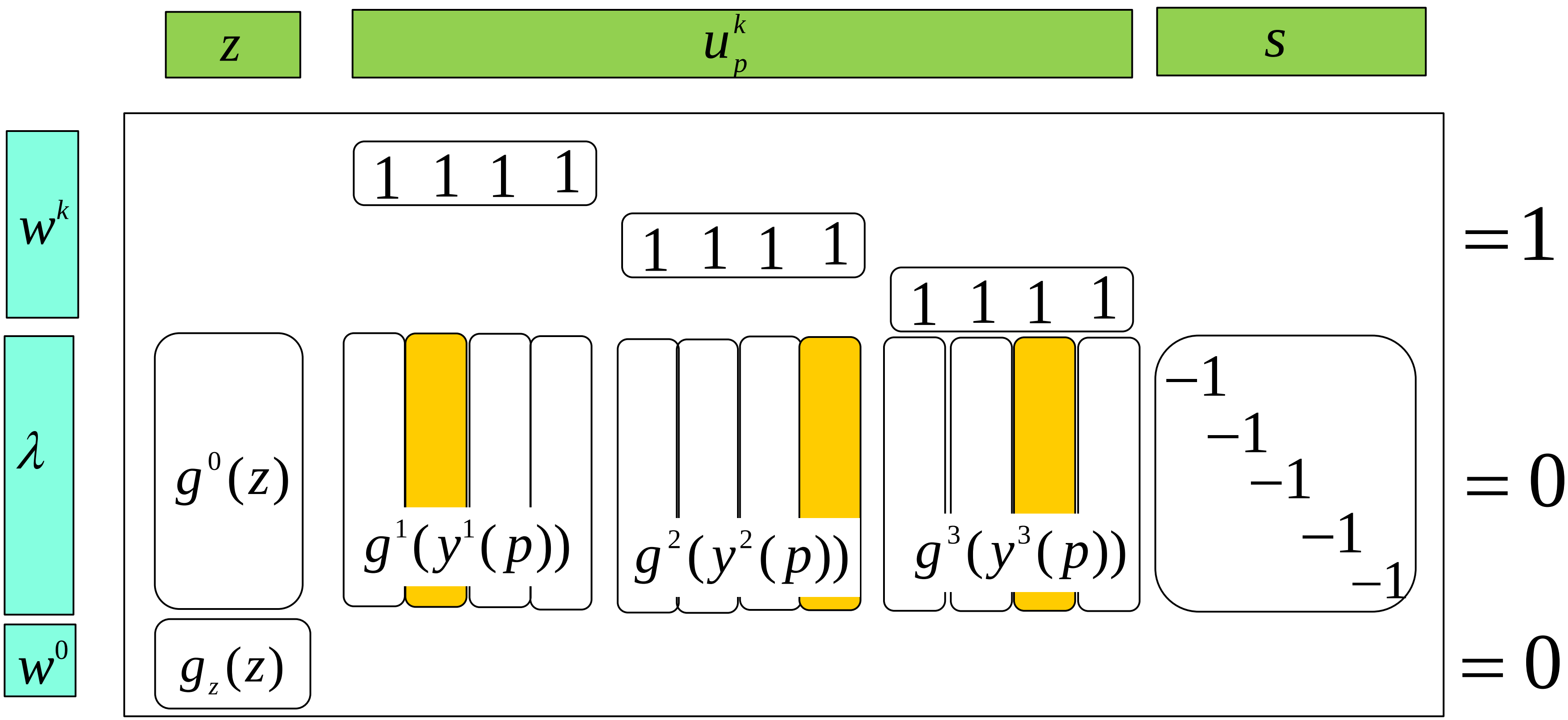


列生成法との関係

Kellyの方法はプライシング法に対応

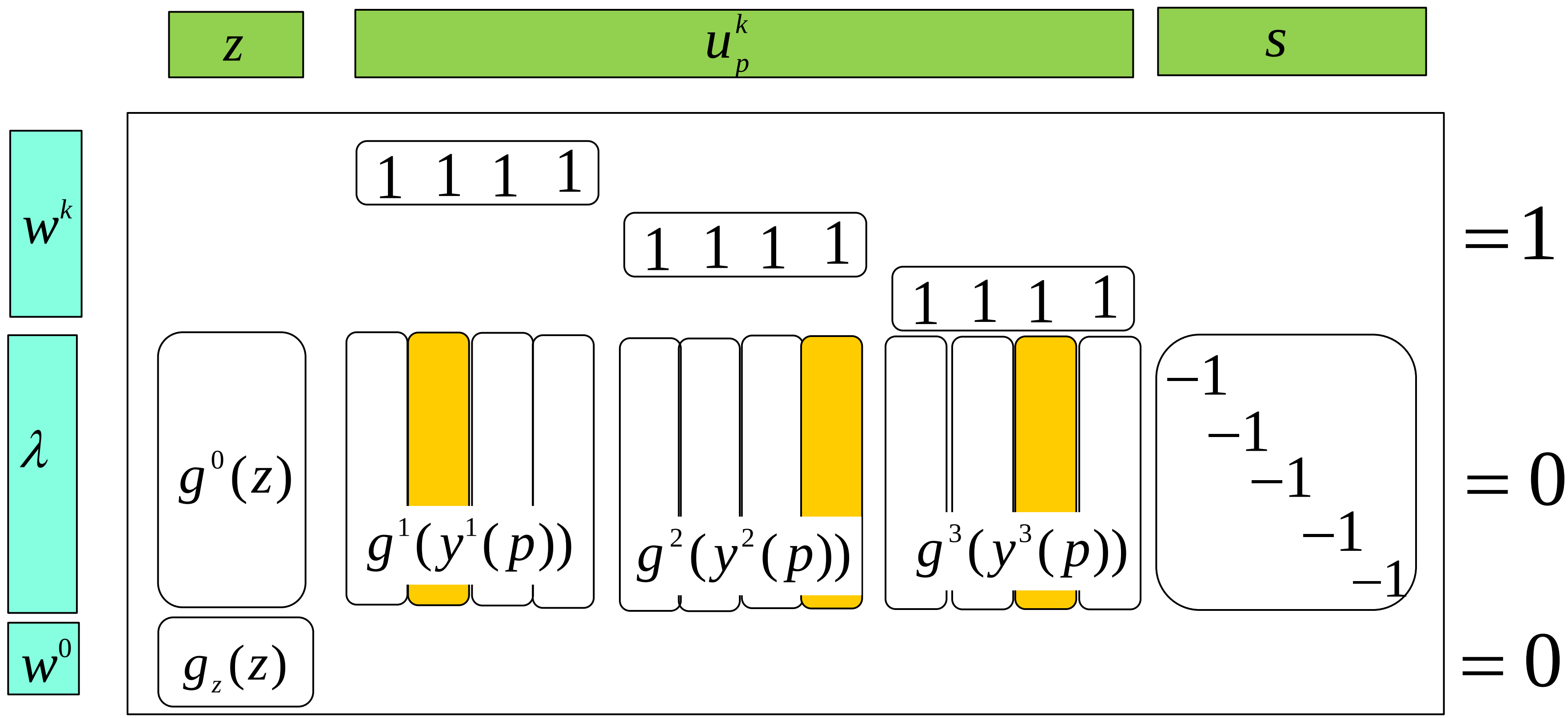
- 問題 Q と P' の緩和問題は互いに双対問題
- 問題 O^k（切除平面の生成）

⇒プライシング（列生成）

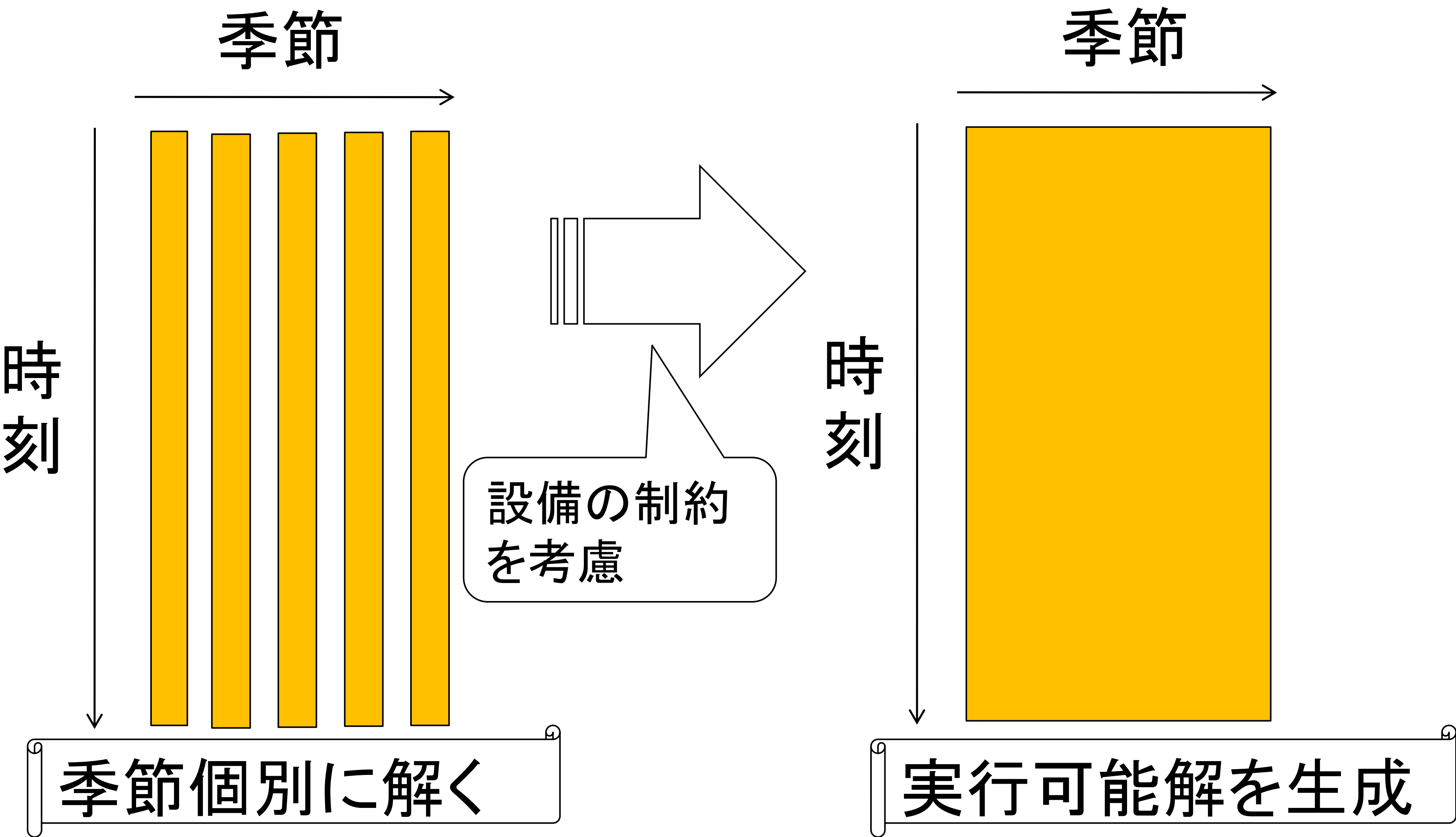


列生成法との関係

- 問題 Q の代用として P' の緩和問題を解いてもよい
- 問題 Q が非有界⇒ P' の緩和問題が実行不可能



プラント設備計画



解法全体の枠組み

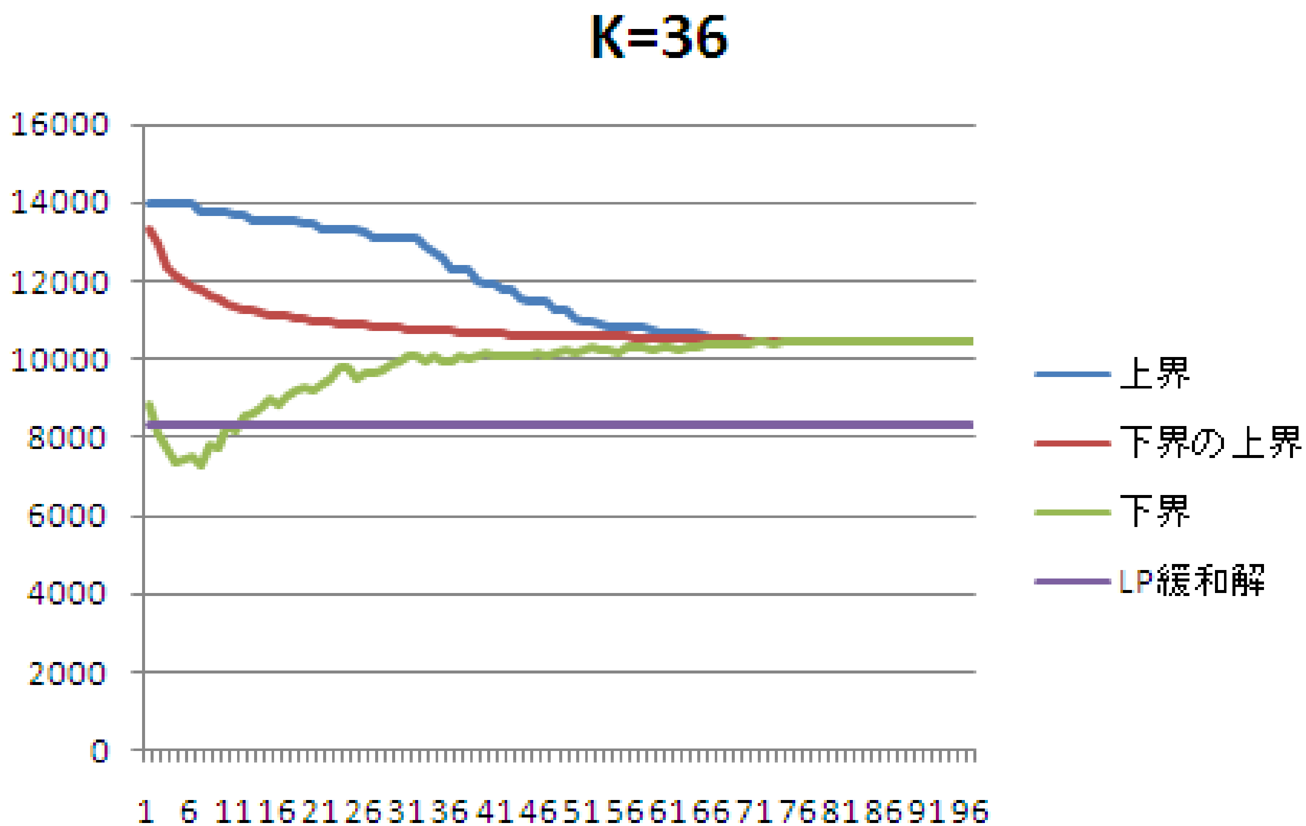
0. 初期実行可能解 $x_{s,t}^{k}(1)$ ， $y_{s,t}^{k}(1)$ を得る
   $j \leftarrow 1$ に
1. $j \leftarrow j+1$ に
2. 問題 (Q) を解いて $\lambda_e^k(j)$ を求める
3. $\lambda_e^k(j)$ から問題 (O^k) を解き，それを用いて下界値を更新
4. 問題 (P') を解いて実行可能解を算出し，上界値を更新
5. 上下界値のギャップが所定以下ならば終了.
   さもなければ 1. へ

LP

MILP

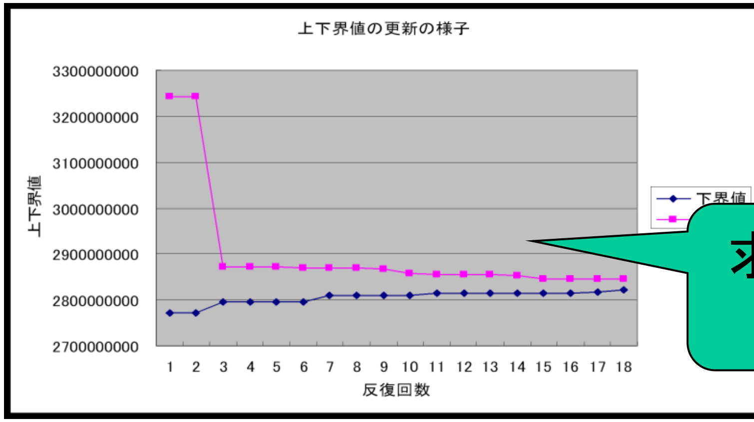
IP（近似解法）も適用可能

プラント設備計画問題(1)



プラント設備計画問題（2）

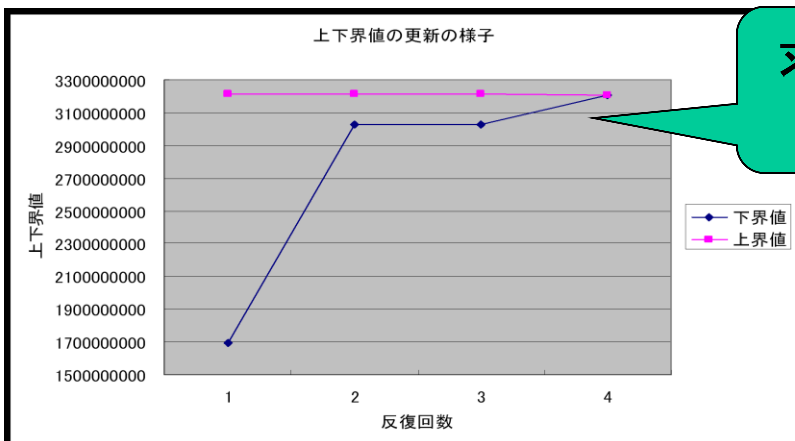
- ケース1
  - 原問題の変数：約 99000（整数変数：約 900）



上下界値のギャップが 1% 以内になった時点で反復終了

求解時間：約 5400 秒
反復回数：18 回

- ケース2
  - 原問題の変数：約 97000（整数変数：約 12500）



求解時間：約 4100 秒
反復回数：4 回

実装上のポイント

- **初期実行可能解の取得方法**
- **問題 Q の定式化，解法**

  Kelly/ACCPM？

  ペナルティ項追加？

  単体法？内点法？

  問題 P' の双対変数を取るべき？
- **問題 O^k の解法**

  特化した解法？

  並列化？
- **問題 P' の解法**

  厳密解法/ヒューリスティクス/メタヒューリスティクス

本スキームのメリット

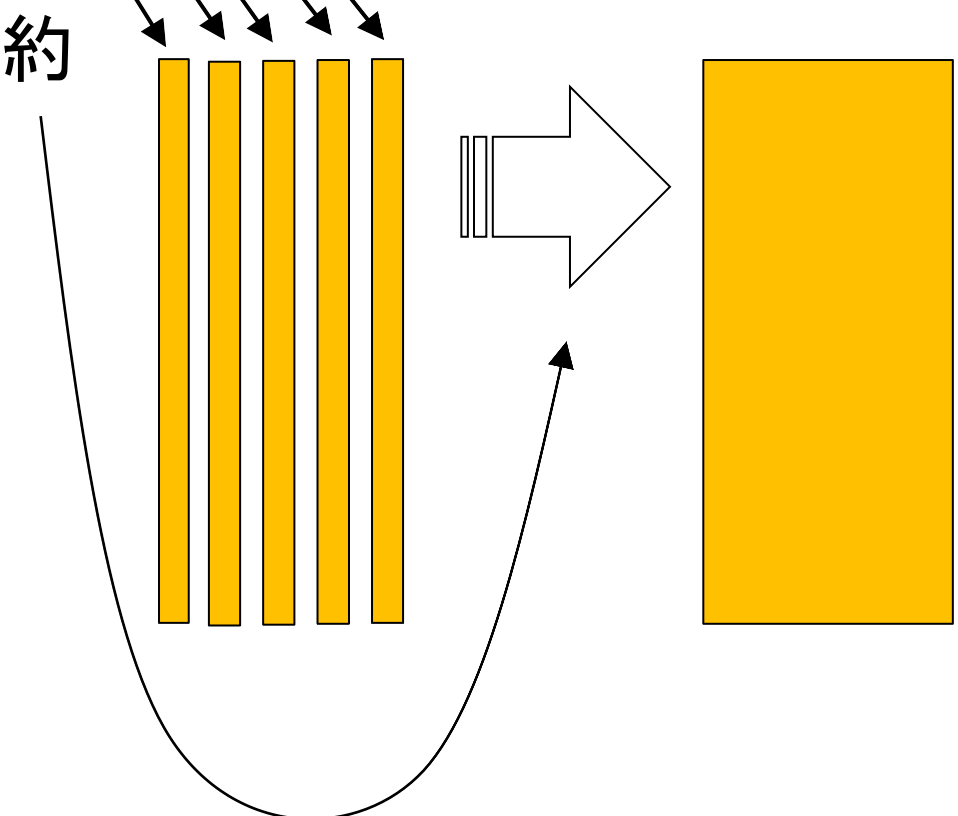
- 大規模問題を分割して扱える
  - 並列化
  - 部分問題に特殊な工夫が可
- 上界・下界を見ながら停止できる
- 部分問題を独立して細密化可能
- 汎用メタヒューリスティクスアルゴリズムの利用余地あり

実務的な応用範囲

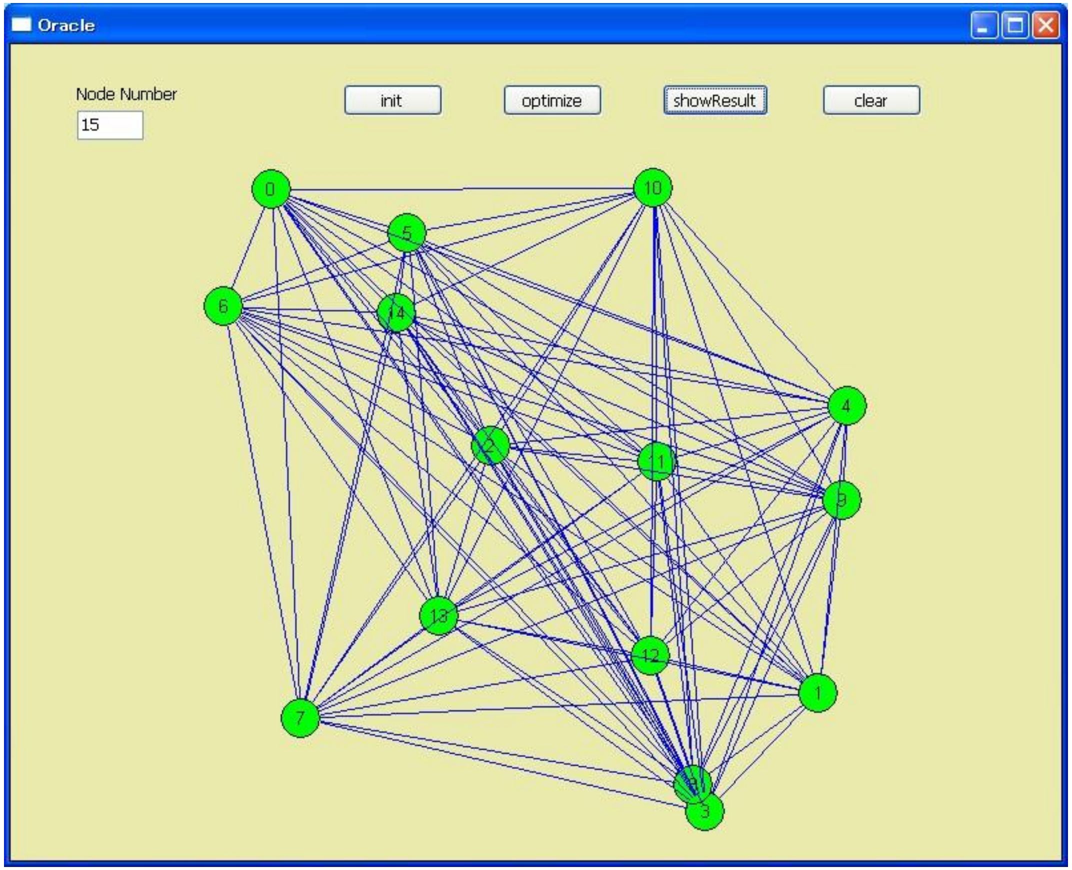
- プラント設備計画
- 年間契約電力決定問題
- ネットワーク設計
- 保守スケジューリング
- プロジェクトスケジューリング

ネットワーク設備投資問題

- 部分問題
  - グラフ上のSDペア（品種）間の経路設定
- 展開の原因となる制約
  - リンクの容量制約
  - 設備（リンク）が共通
- 目的関数
  - リンク敷設コスト
  - 通信従量コスト



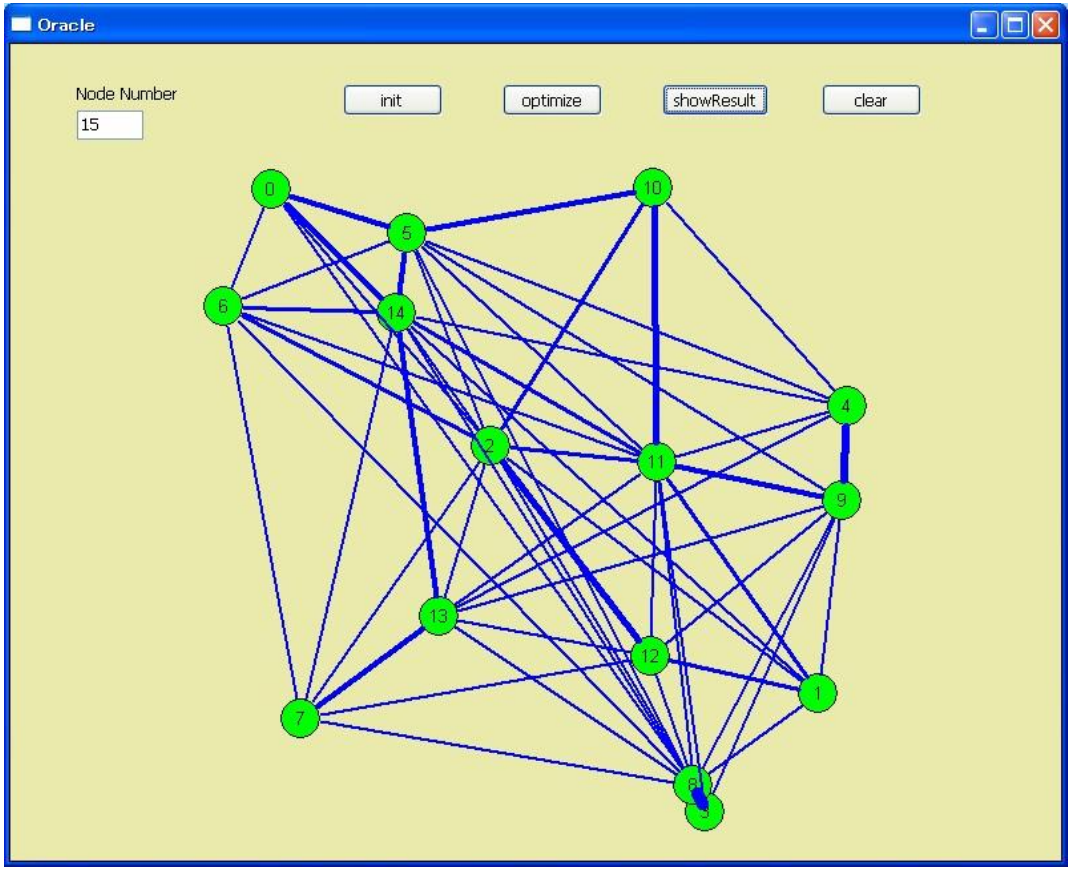
実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



目的関数値:

46318.5

実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



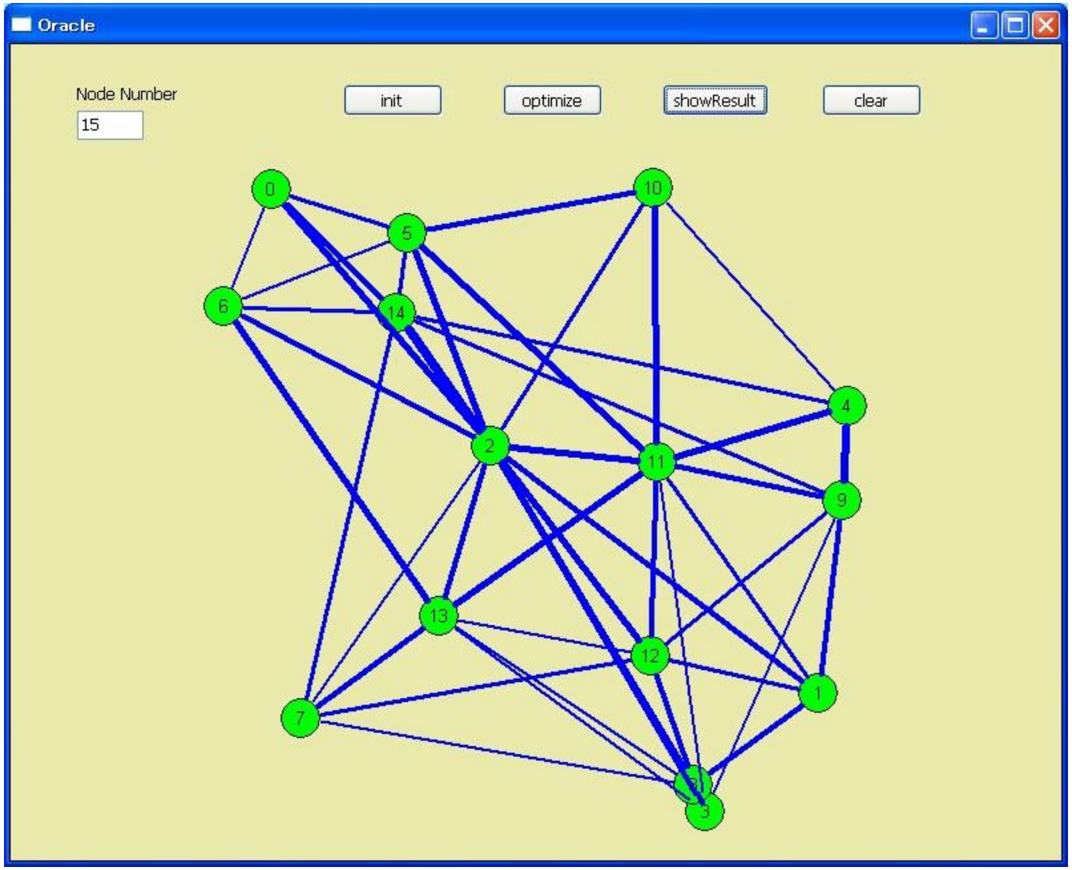
目的関数値:

37737.0

下界値:

33902.1

実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



目的関数値:

36007.4

下界値:

34228.6

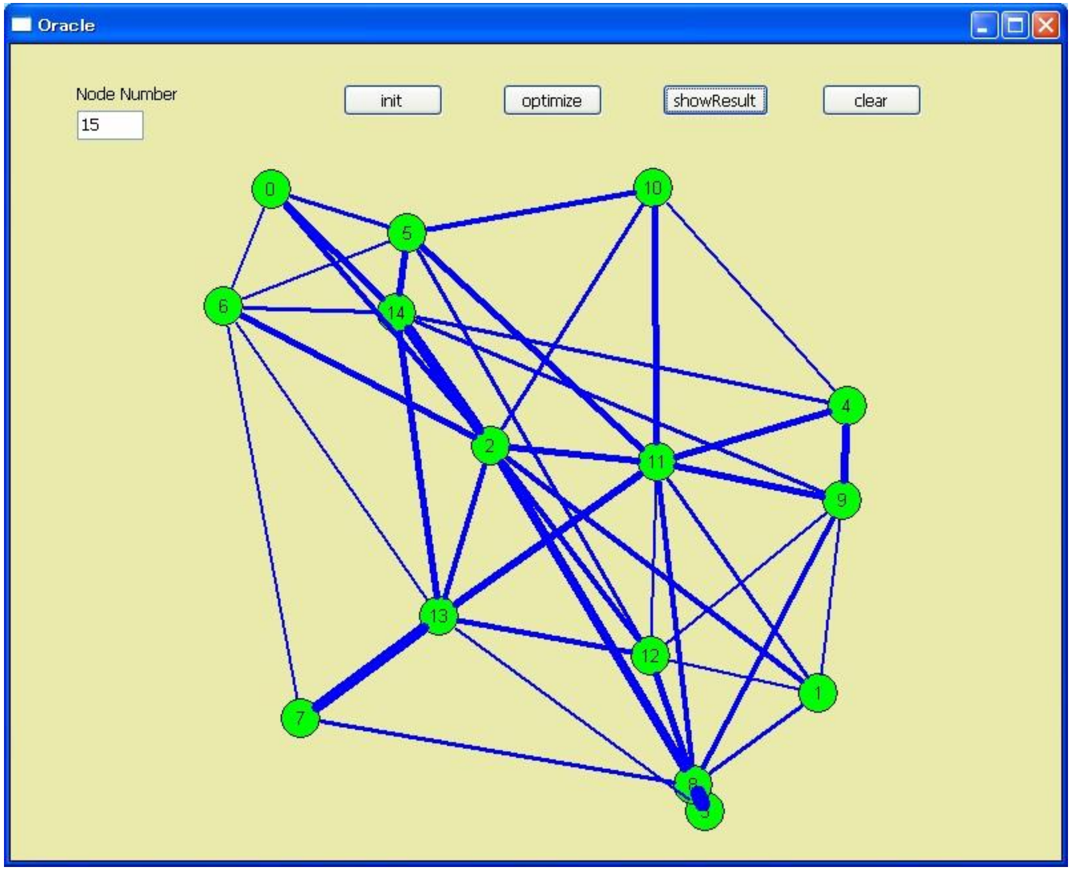
実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題

目的関数値:

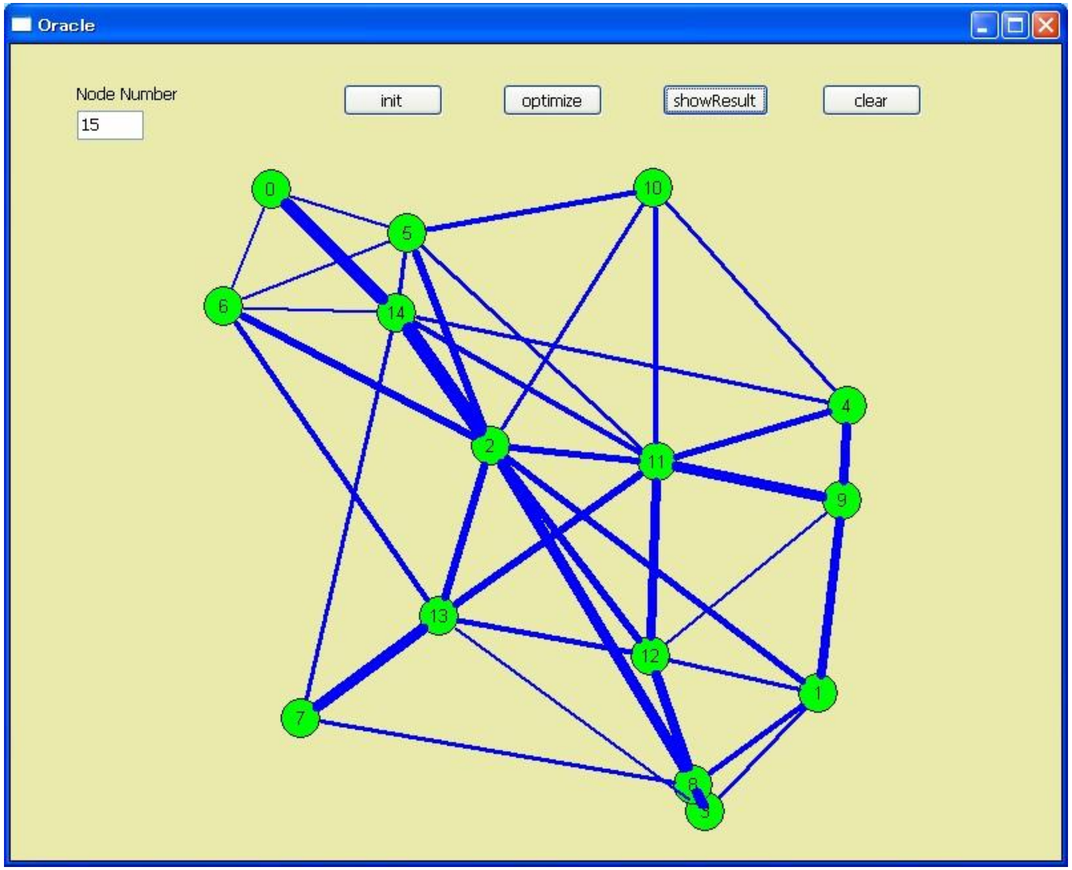
35684.1

下界値:

34367.5



実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



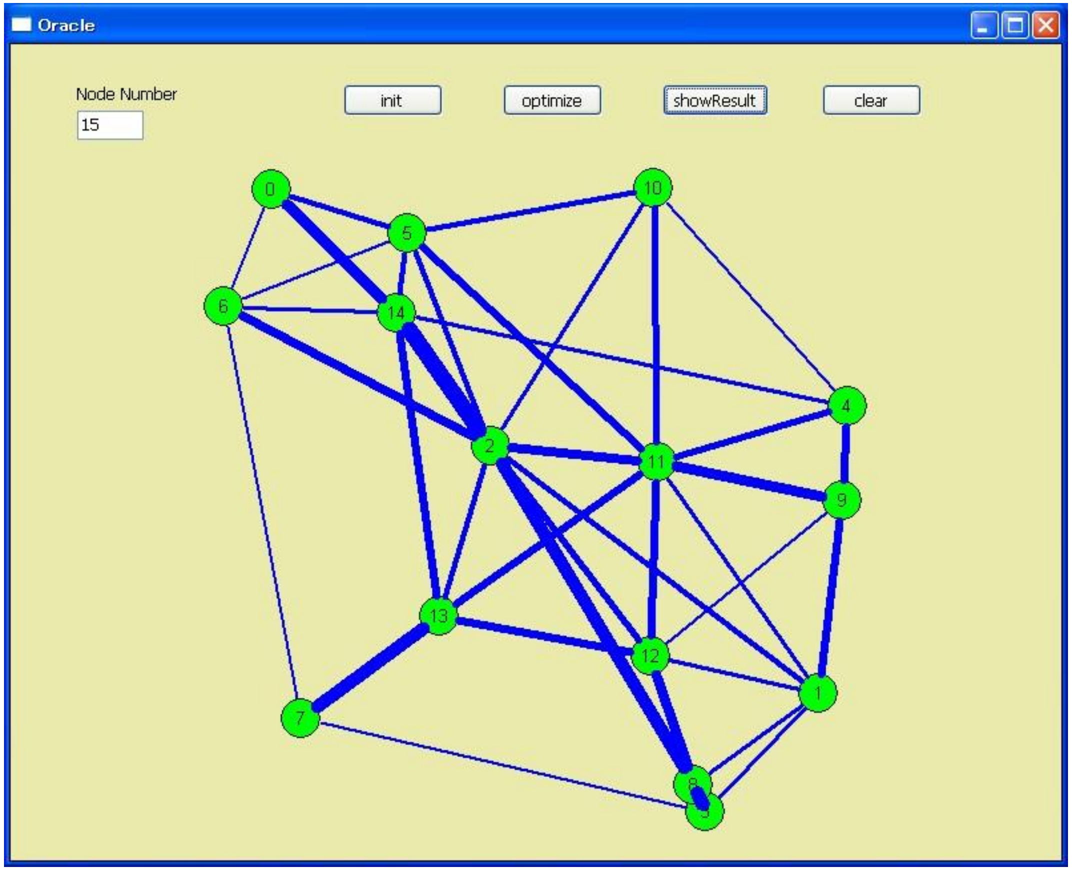
目的関数値:

35216.1

下界値:

34483.7

実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



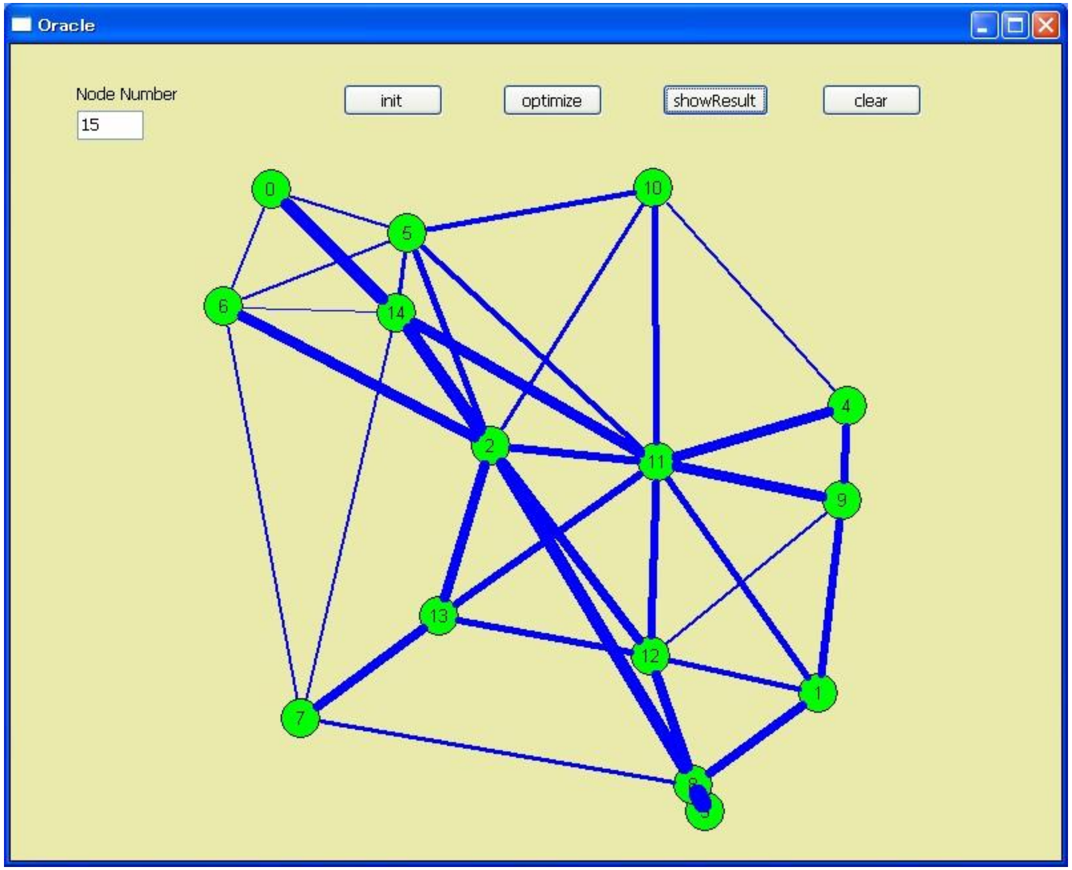
目的関数値:

35080.0

下界値:

34535.0

実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



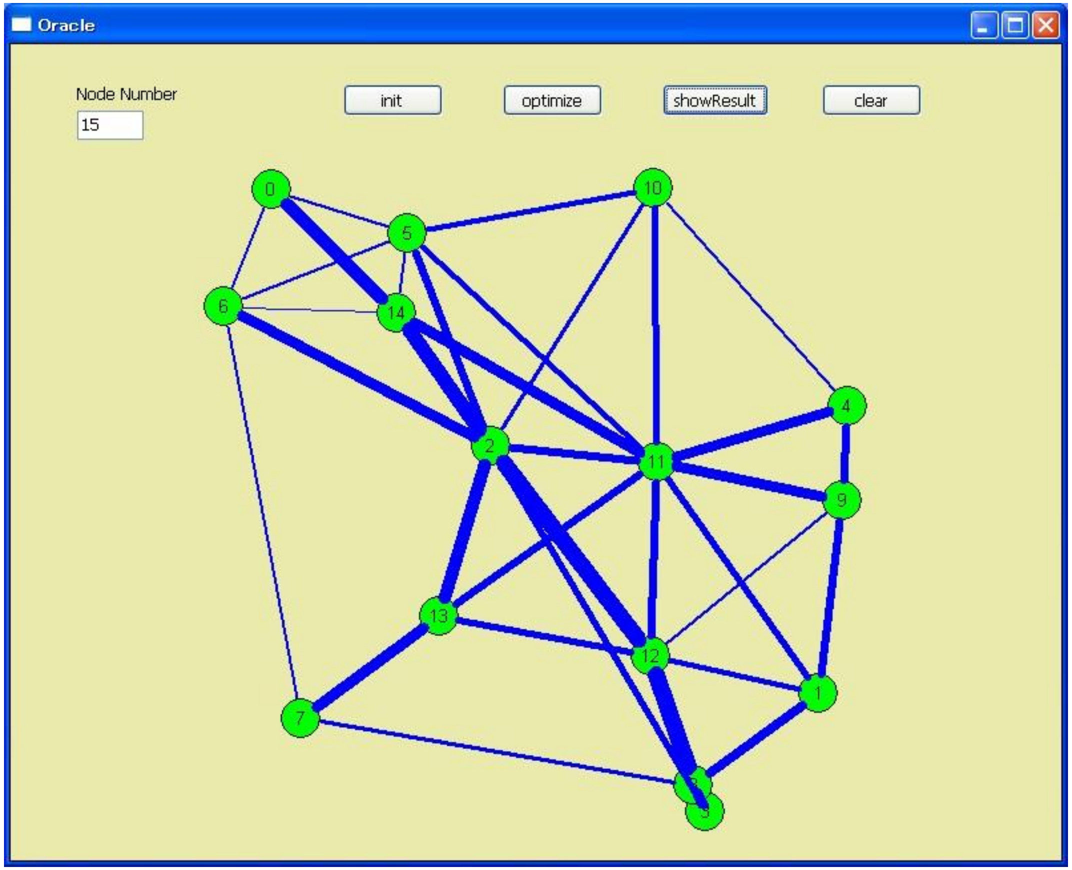
目的関数値:

34912.2

下界値:

34574.7

実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



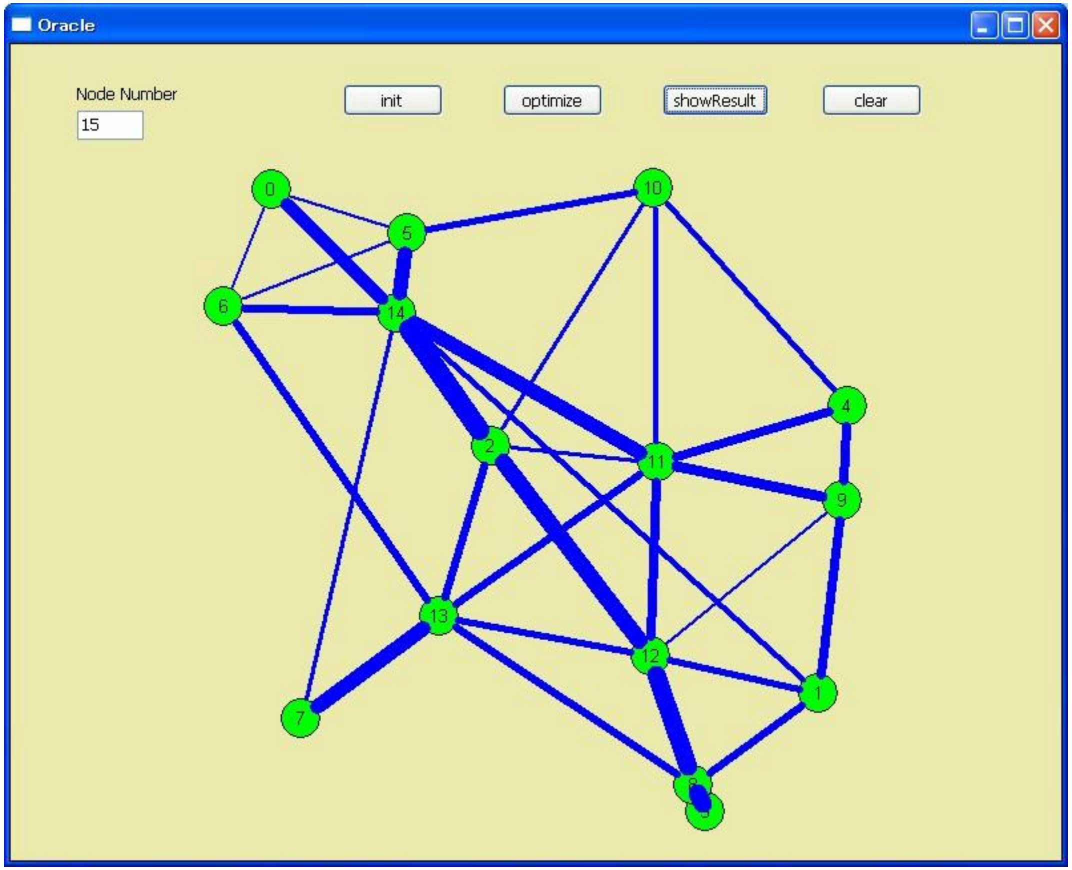
目的関数値:

34916.7

下界値:

34620.3

実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



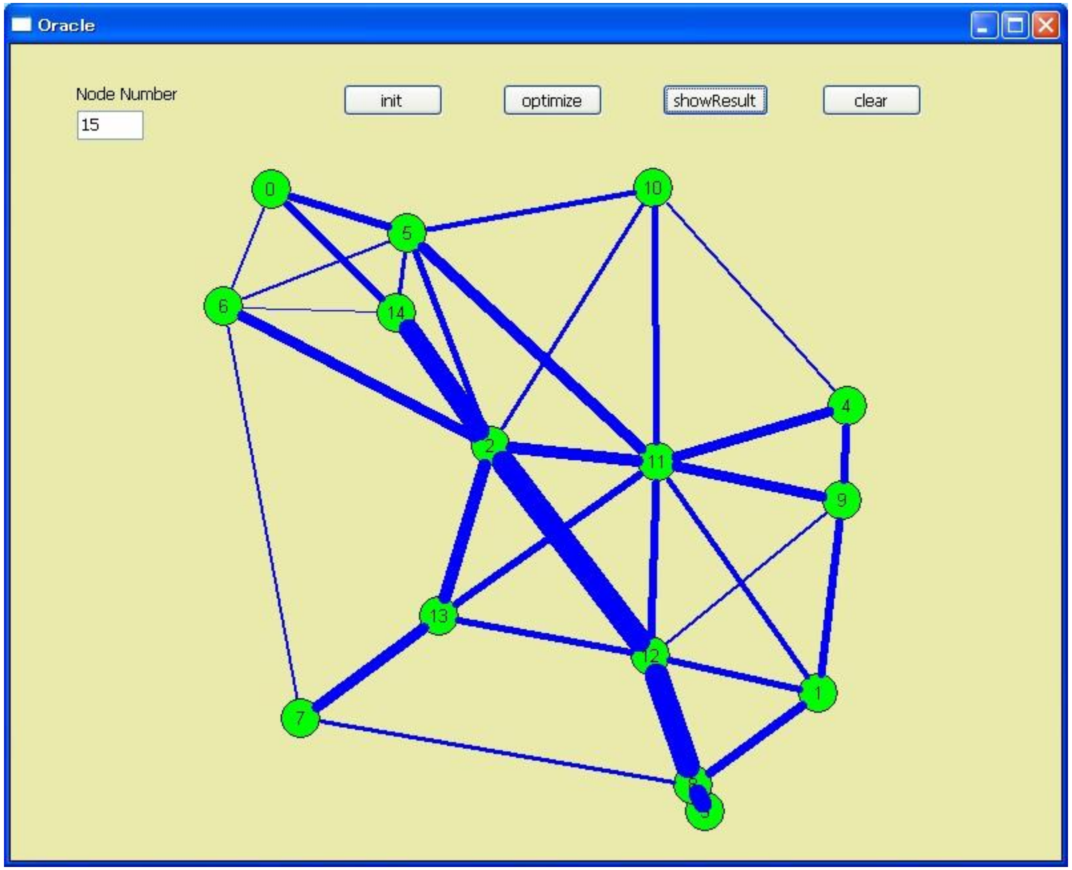
目的関数値:

34868.3

下界値:

34620.7

実行可能解の更新の様子
ネットワーク設備投資問題



目的関数値:

34770.8

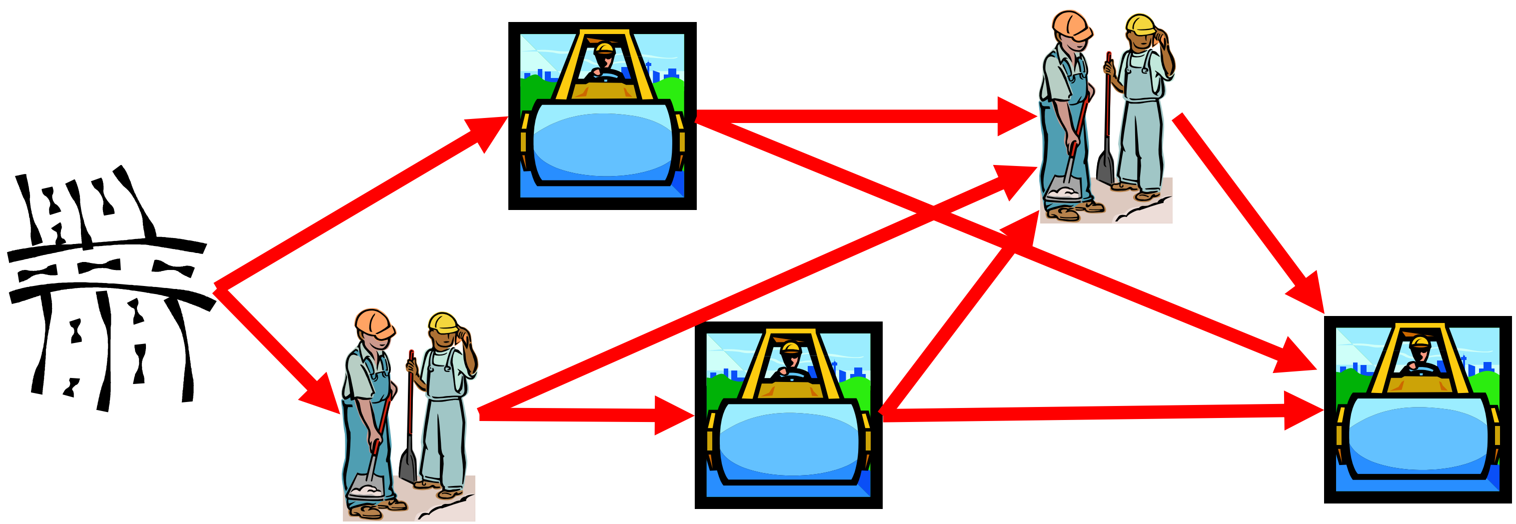
下界値:

34670.9

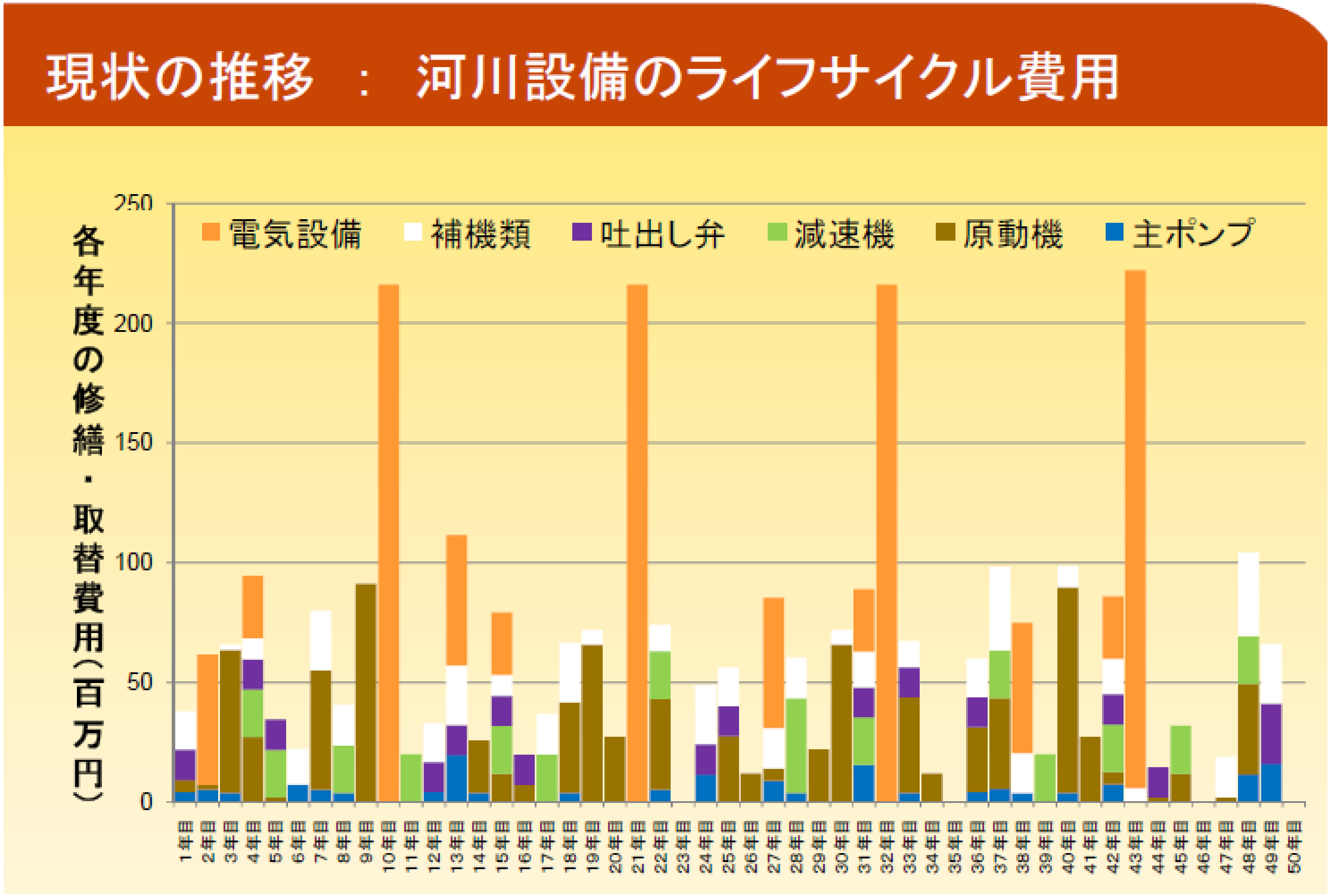
保守計画策定
設備費問題

- 高度成長期の土木構造物が一斉に老朽化した．予算の範囲に収めるための保守計画の作成は人手では不可能な規模(200～2000施設)になった．．．

適用事例：道路･水門･ポンプ･橋梁･公園･･

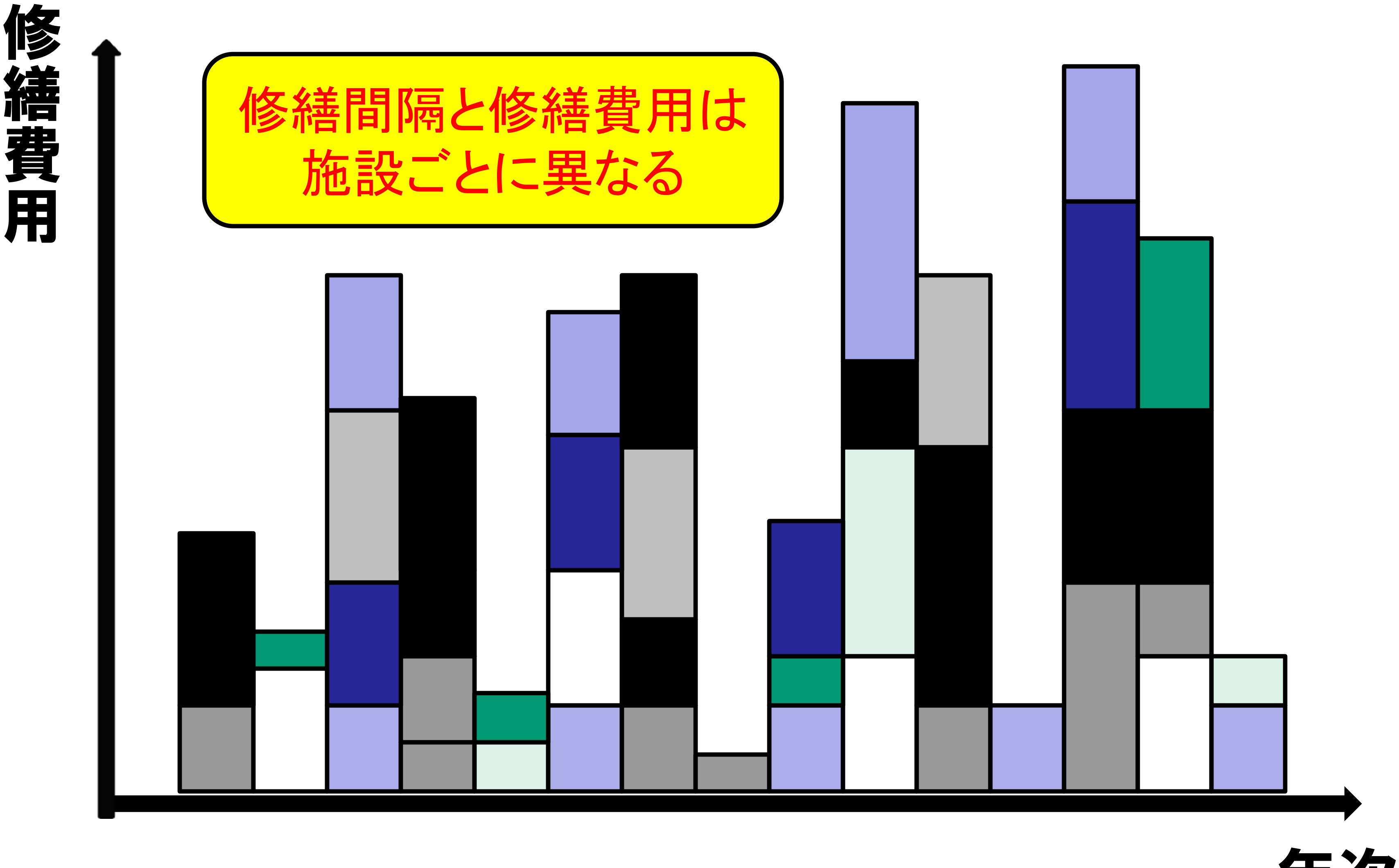


保守計画策定
平準化前

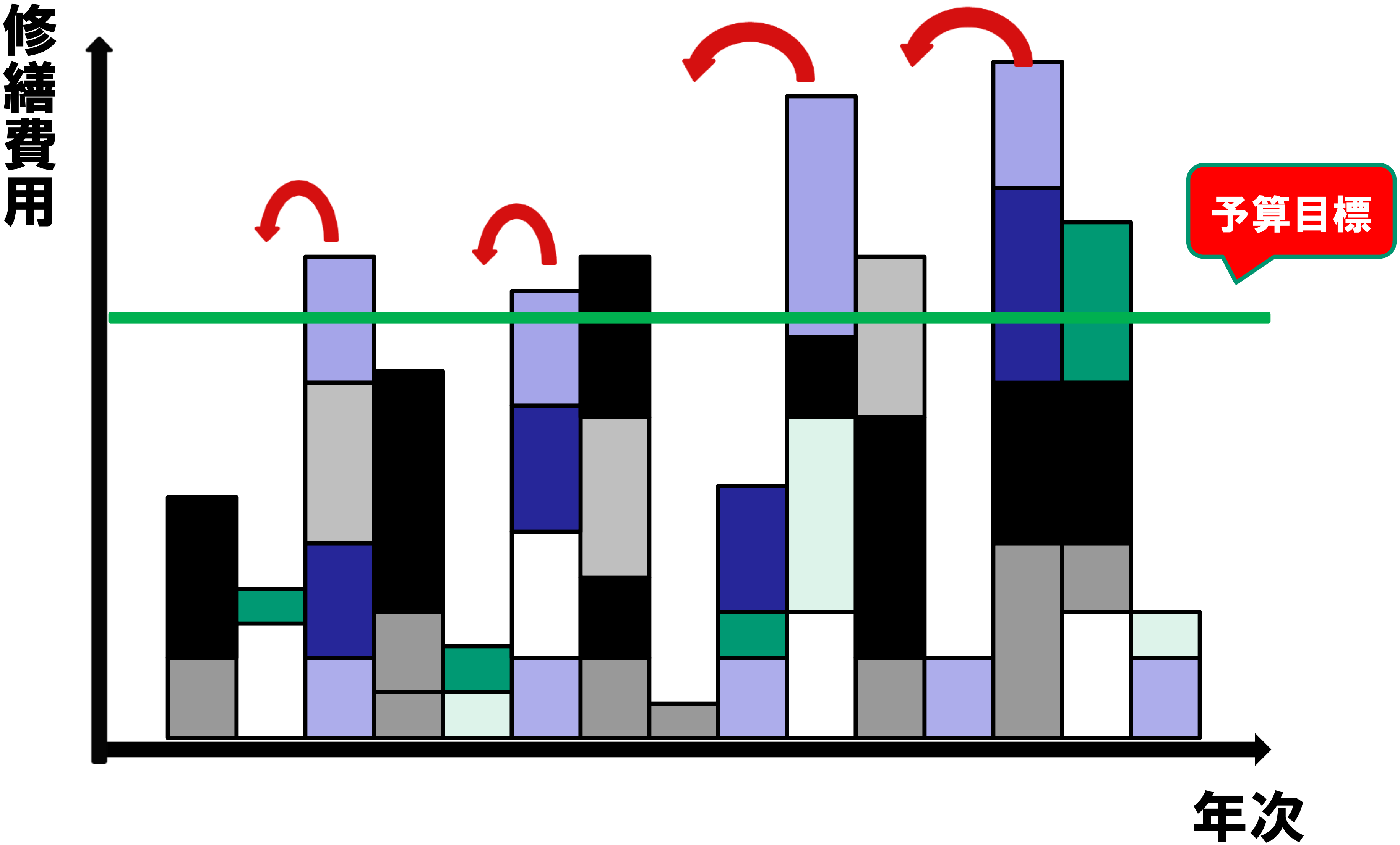


現状の推移　：　河川設備のライフサイクル費用
電気設備
補機類
吐出し弁
減速機
原動機
主ポンプ
各年度の修繕・取替費用（百万円）
250
200
150
100
50
0
1年目 2年目 3年目 4年目 5年目 6年目 7年目 8年目 9年目 10年目 11年目 12年目 13年目 14年目 15年目 16年目 17年目 18年目 19年目 20年目 21年目 22年目 23年目 24年目 25年目 26年目 27年目 28年目 29年目 30年目 31年目 32年目 33年目 34年目 35年目 36年目 37年目 38年目 39年目 40年目 41年目 42年目 43年目 44年目 45年目 46年目 47年目 48年目 49年目 50年目

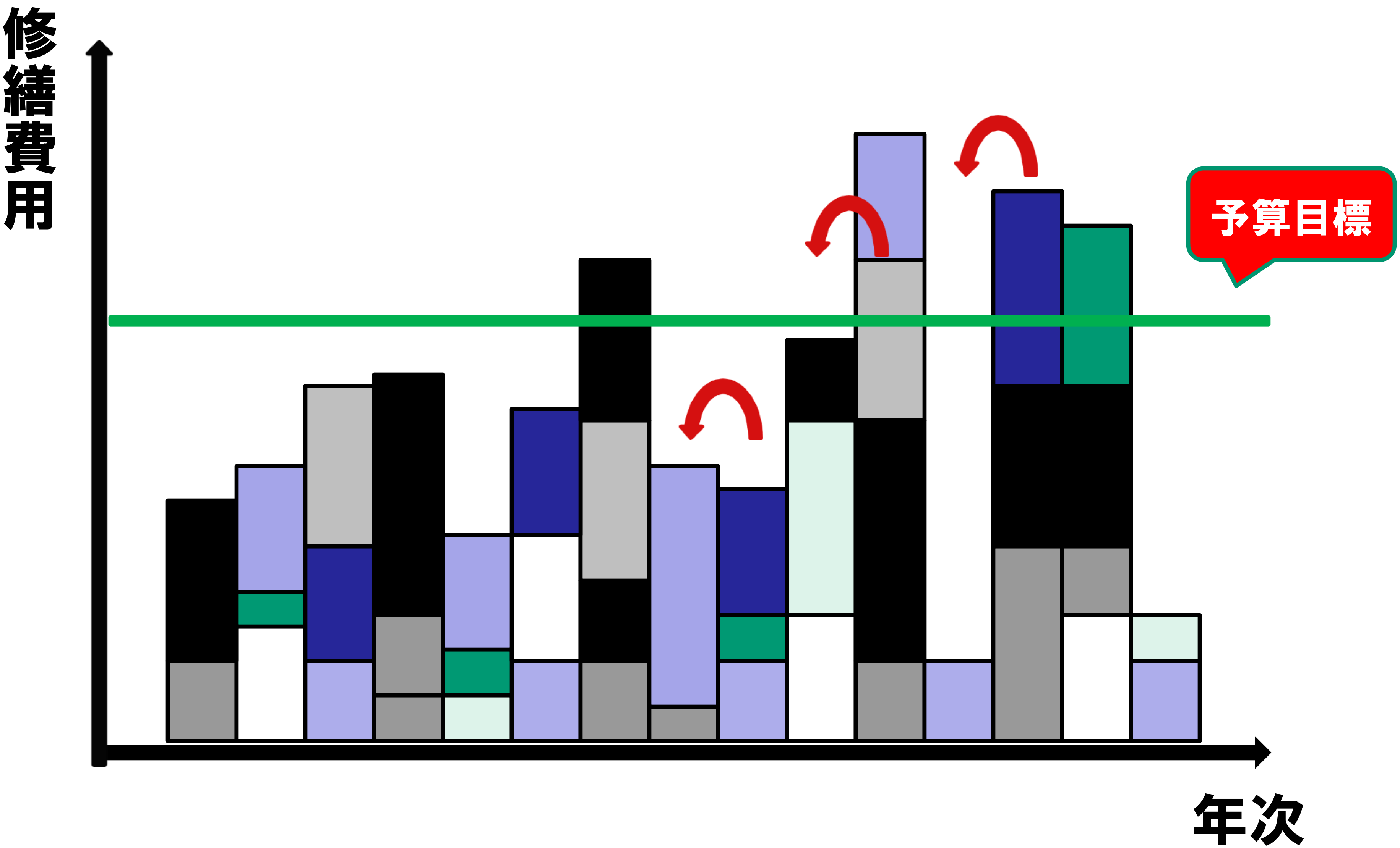
計画年次と修繕費用



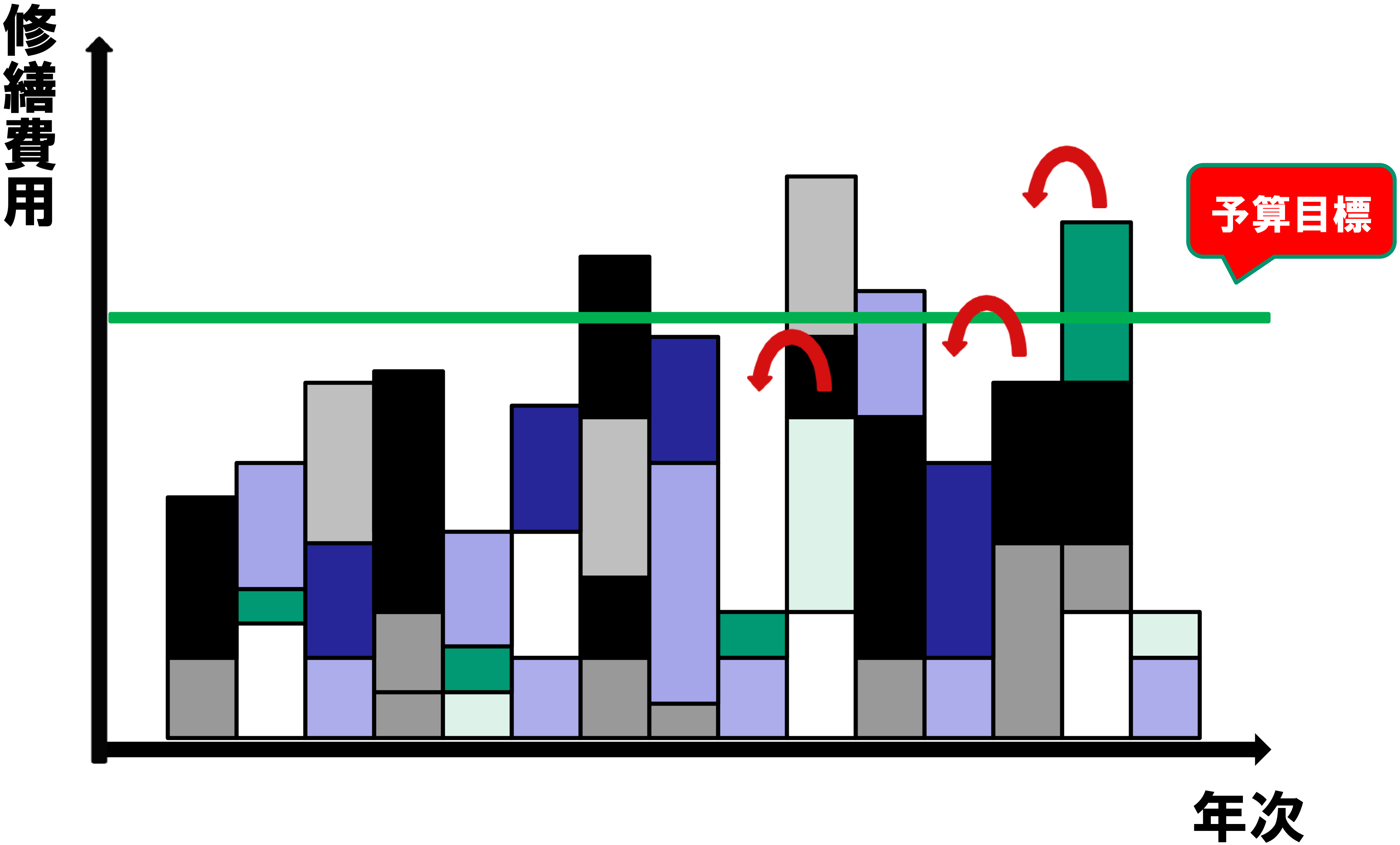
計画年次と修繕費用



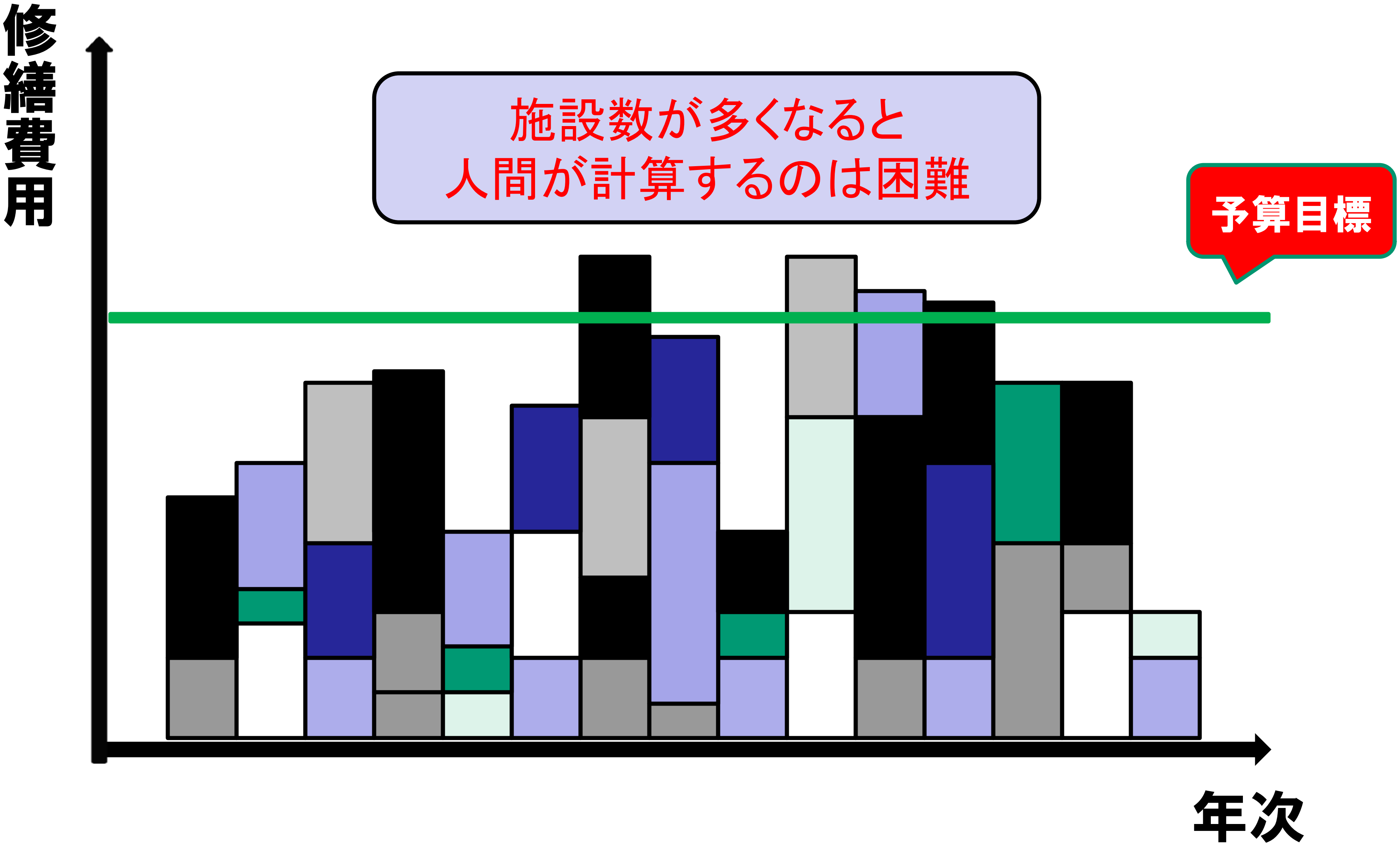
計画年次と修繕費用



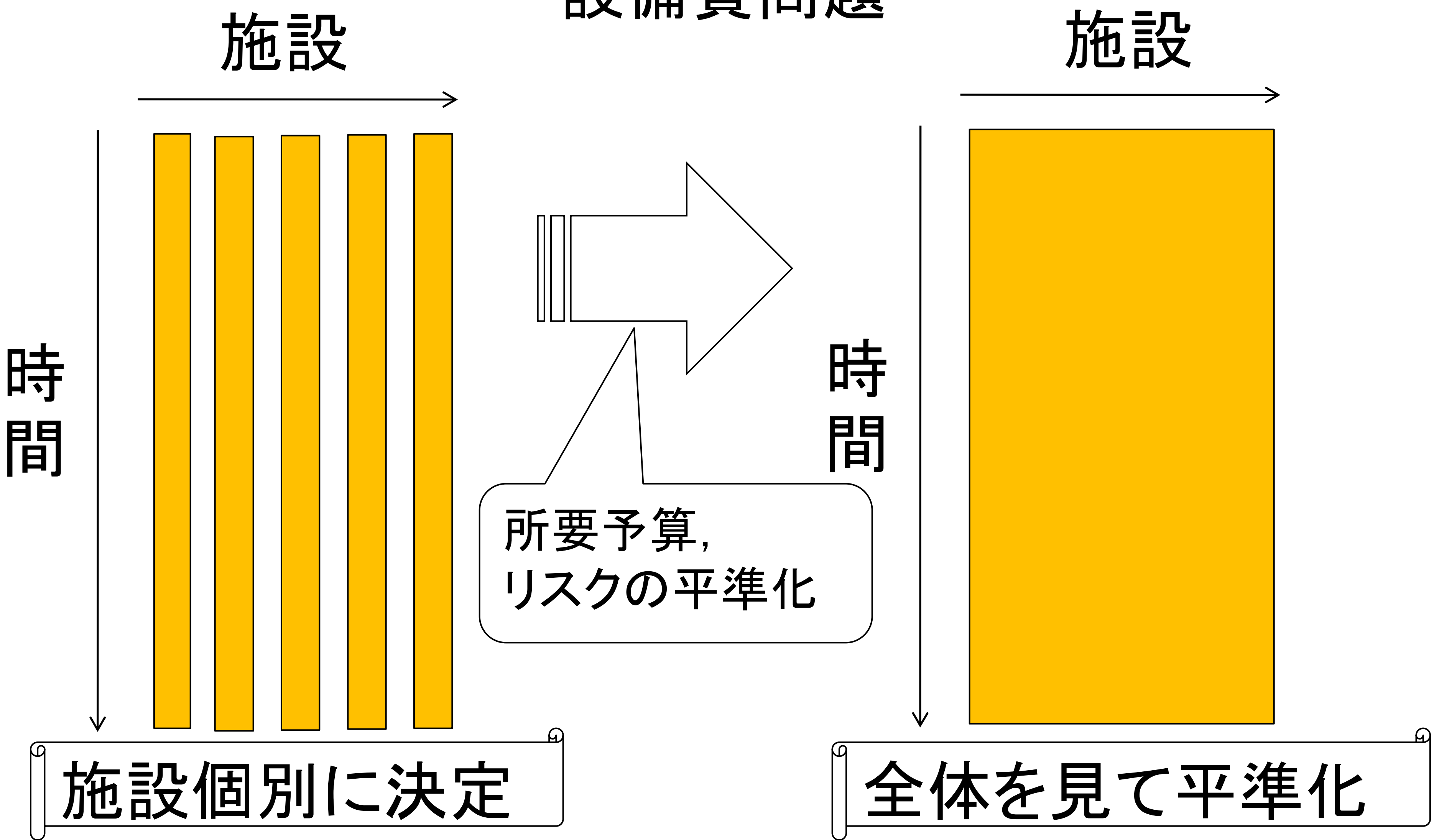
計画年次と修繕費用



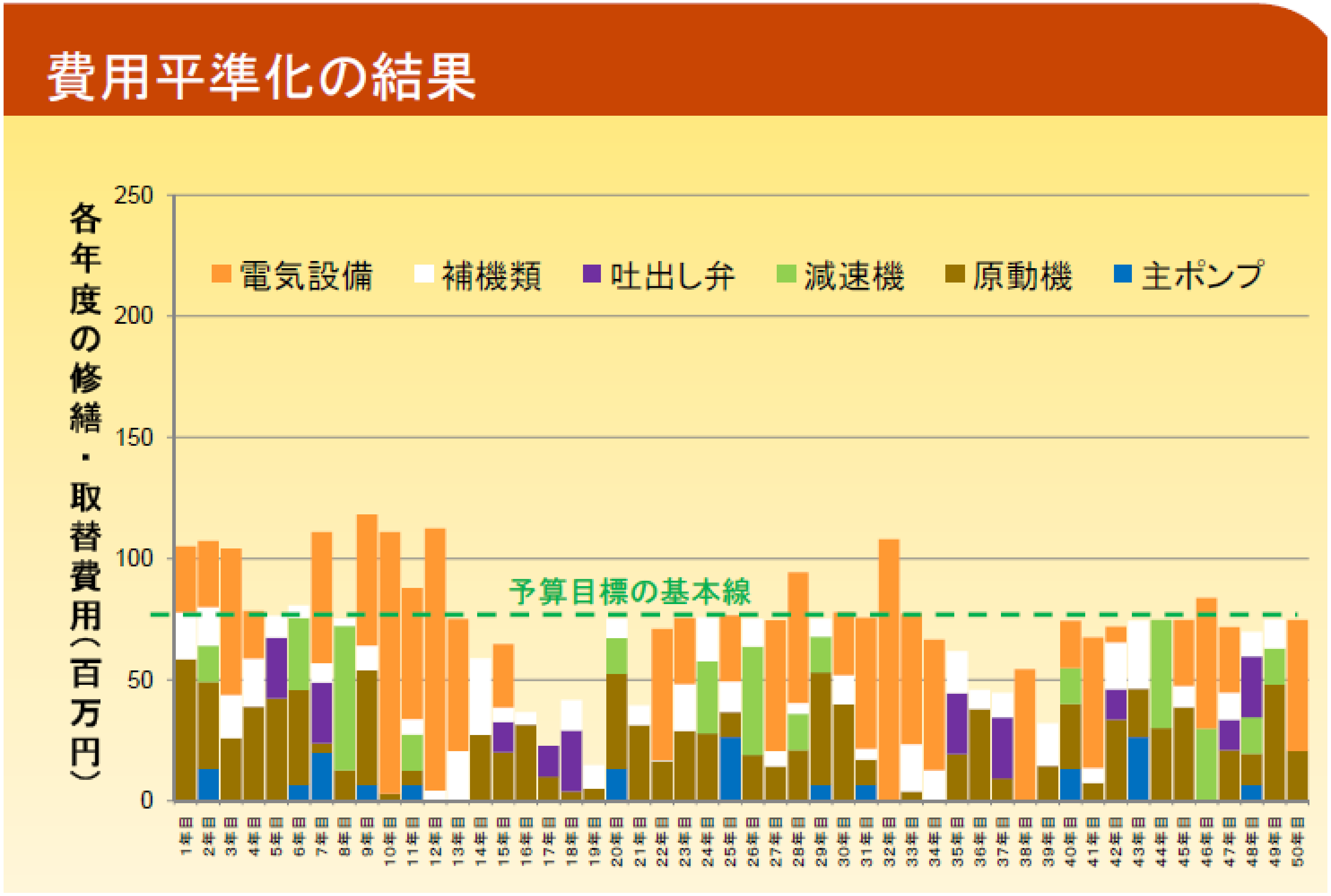
計画年次と修繕費用



保守計画策定
設備費問題



保守計画策定
平準化後



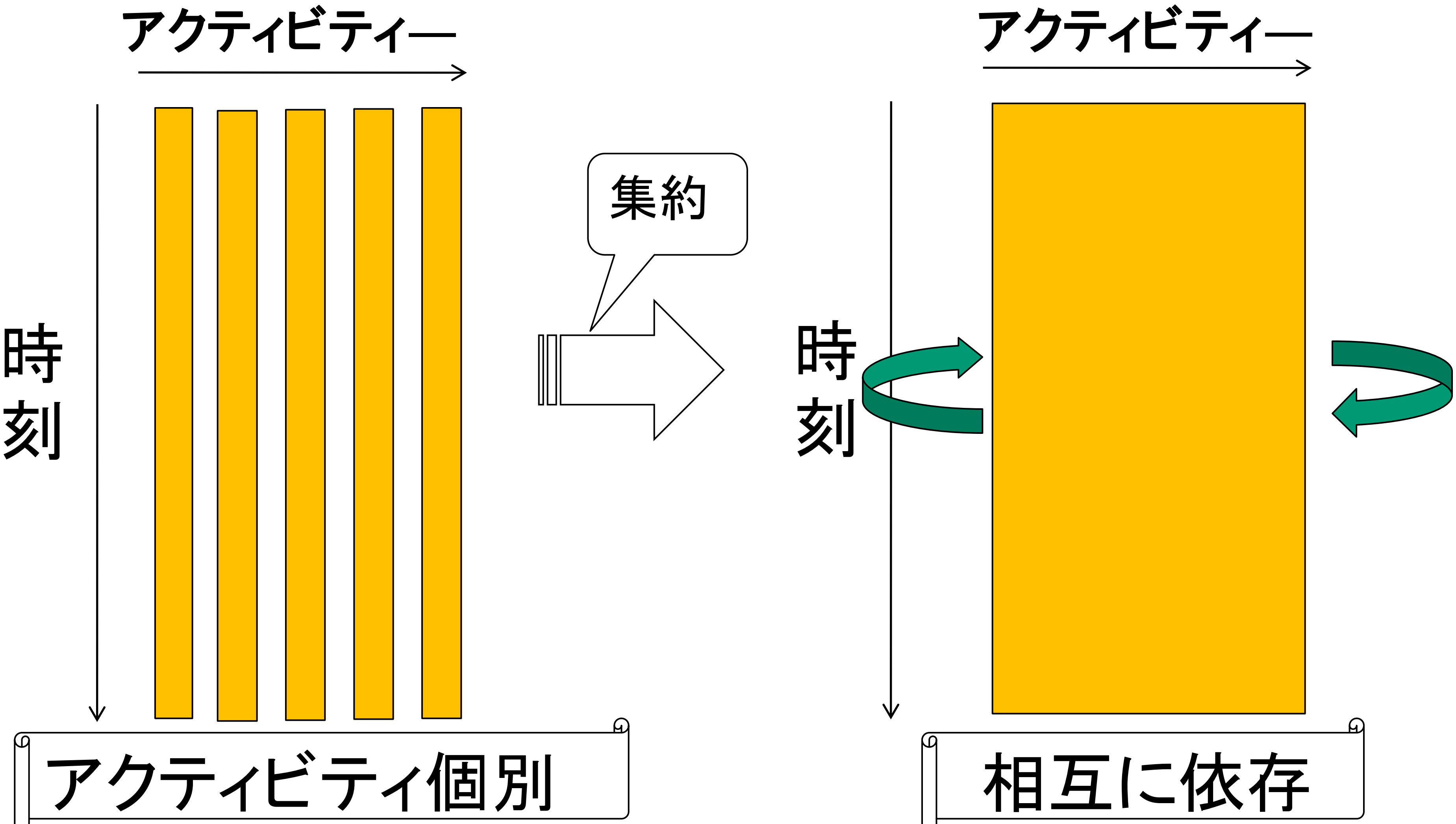
費用平準化の結果
各年度の修繕・取替費用(百万円)
電気設備
補機類
吐出し弁
減速機
原動機
主ポンプ
予算目標の基本線
0
50
100
150
200
250
1年目
2年目
3年目
4年目
5年目
6年目
7年目
8年目
9年目
10年目
11年目
12年目
13年目
14年目
15年目
16年目
17年目
18年目
19年目
20年目
21年目
22年目
23年目
24年目
25年目
26年目
27年目
28年目
29年目
30年目
31年目
32年目
33年目
34年目
35年目
36年目
37年目
38年目
39年目
40年目
41年目
42年目
43年目
44年目
45年目
46年目
47年目
48年目
49年目
50年目

プロジェクトスケジューリング
設備(リソース)計画問題

- 大規模プラントのスケジューリング
  - 優先順位制約
  - リソース制約
- タスクの実施方法，開始時間を調整して作業を平準化したい
- 納期とリソース上限のトレードオフを見たい

プロジェクトスケジューリング

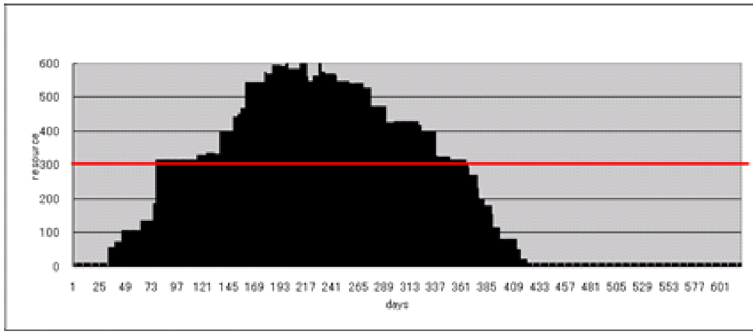
大規模化の理由(「線」⇒「面」)



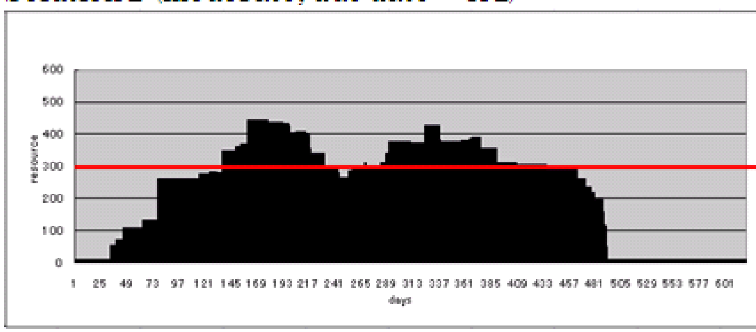
ラグランジュ緩和による
プロジェクトスケジューリング

資源利用
平準化

Solution 1 (no peak cut, due date = 432):



Solution 2 (moderate, due date = 492):



Solution 3 (intense, due date = 612):