

数理計画法パッケージ

NUOPT

金融工学関連

事例紹介

`nuopt-info@msi.co.jp`

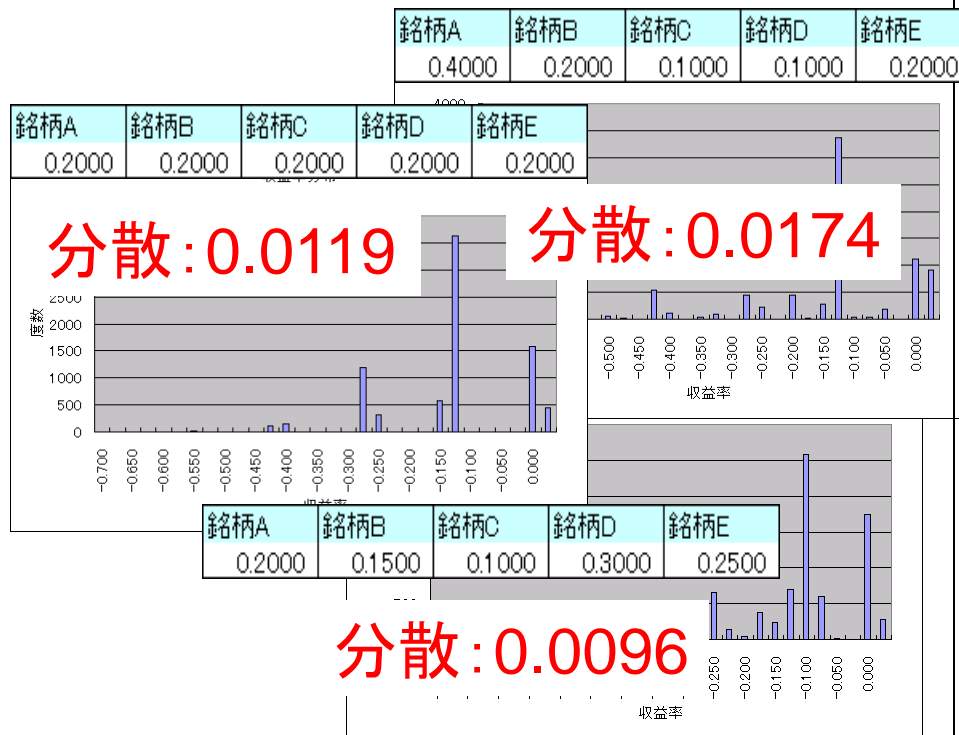
(株)数理システム

# 数理計画法の役割

扱う対象（価格，収益率，倒産などのイベントの発生等）  
の不確定性を定量的な形でモデル化

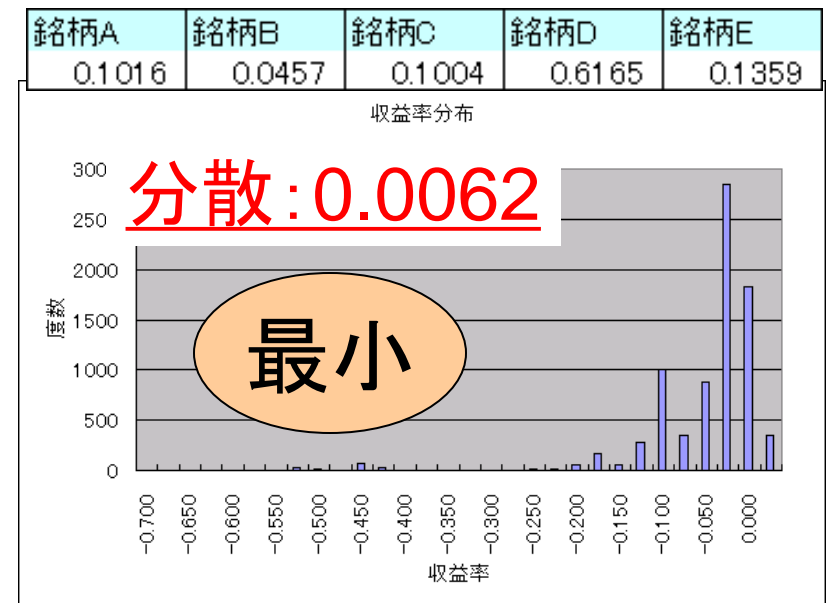
## シミュレーション

モデルが説明する現象を「見る」

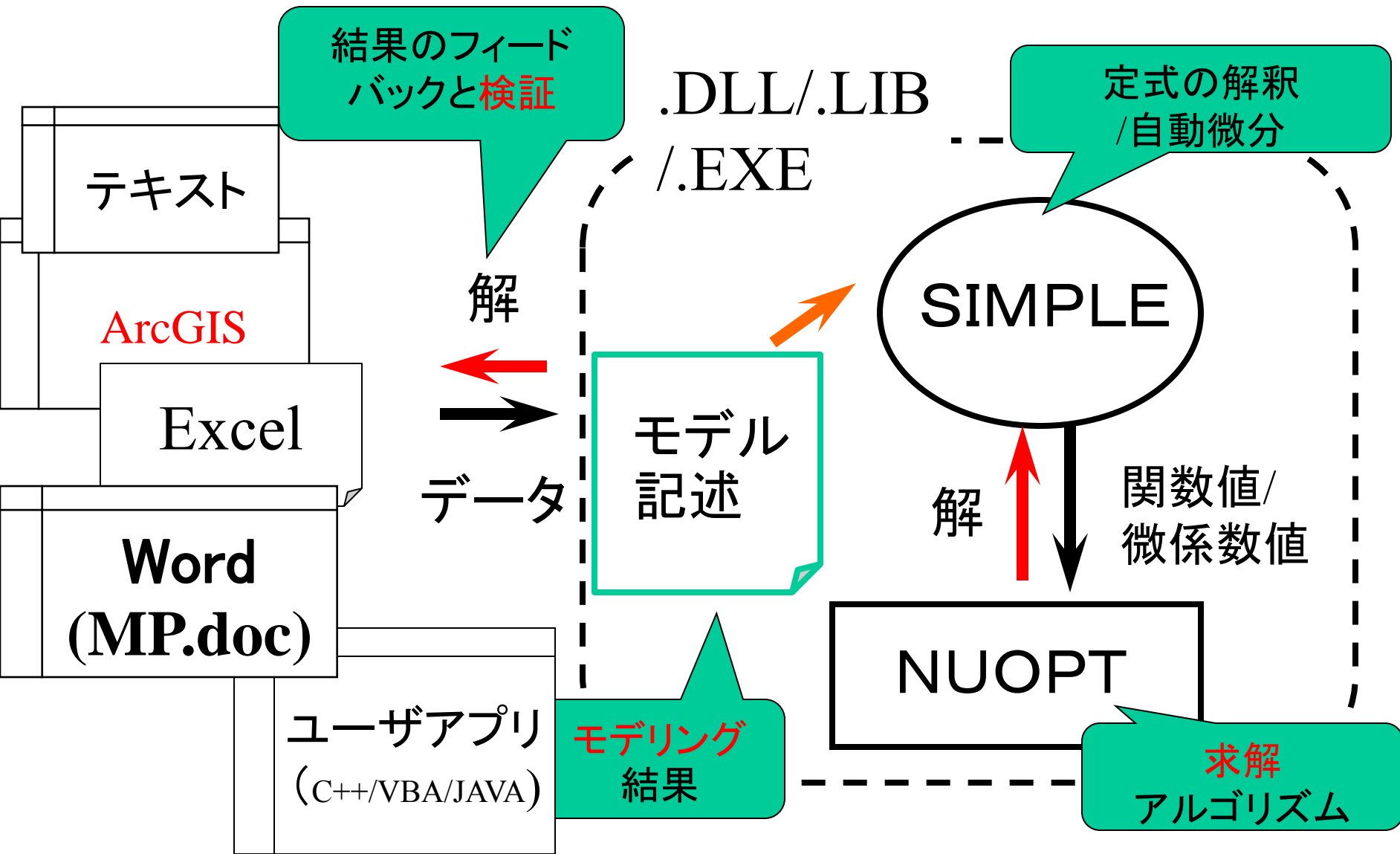


## 数理計画法

モデルが説明する現象を「制御する」



# NUOPT の構成



# NUOPT に導入されている 数理計画法アルゴリズム

(**金融工学**への応用)

CVaR

LPM

- **線形**計画法(単体法、内点法)  
分散
- **二次**計画法(有効制約法、内点法)  
シャーププレシオ
- **非線形**計画法(内点法、逐次二次計画法)  
イールドカーブ
- **非線形半正定値**計画(内点法)  
倒産判別  
格付推移
- **混合整数**二次計画法(分枝限定法)  
ロバストポートフォリオ
- **線形混合整数**計画法(分枝限定法)
- **非線形整数**計画法(分枝限定法)
- 制約充足問題(タブ・サーチ)
- 資源制約付プロジェクトスケジューリング(タブ・サーチ)

ロング・ショート

# 金融工学関連アプリケーション

- ポートフォリオ最適化
- イールドカーブ推定
- 倒産判別
- 社債ポートフォリオ(CVaR 最小化)
- 年金ALMシステム
- 相関行列の作成
- ロバスト最適化
- ロングショートモデル

金融工学関連アプリケーション

ポートフォリオ最適化

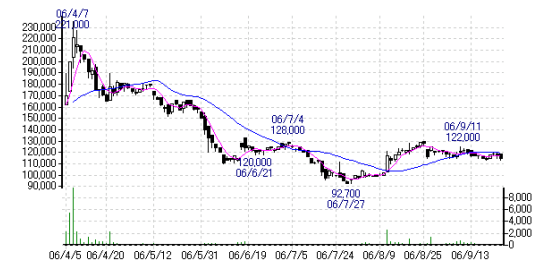
# ポートフォリオ最適化

## 資産をいくつかの投資対象に配分

ポートフォリオの  
**平均収益率**は一定以上



全体の変動  
**(リスク)**は小さく



# ポートフォリオ最適化

## 収益率分布のデモ

Excel ファイル

各銘柄の収益率

PFの収益率

組入比率

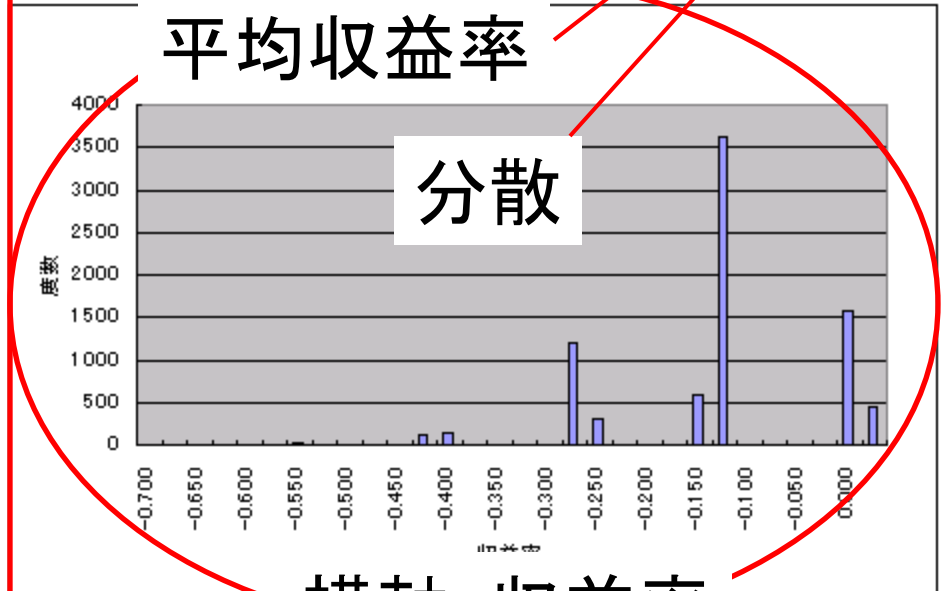
収益率分布(銘柄数:5, サンプル数:8000)

	銘柄A	銘柄B	銘柄C	銘柄D	銘柄E	PF
1	0.0065	-0.7000	-0.7000	0.0055	-0.0592	-0.2894
2	0.0057	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1476
3	0.0060	-0.7000	0.0100	-0.0356	-0.0592	-0.1558
4	0.0083	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1471
5	0.0092	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1469
6	0.0106	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1466
7	0.0171	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1453
8	0.0234	-0.7000	0.0100	-0.0356	-0.0592	-0.1523
9	0.0115	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1464
10	0.0133	0.0151	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.0031
11	0.0101	0.0141	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.0039
12	0.0131	0.0199	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.0021
13	0.0125	0.0249	0.0100	0.0055	-0.7000	-0.1294
14	0.0156	0.0255	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.0005
15	0.0167	0.0276	0.0100	0.0055	-0.0592	0.0001
16	0.0134	0.0199	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.0021
17	0.0052	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1477
18	0.0082	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1471
19	0.0050	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1477
20	0.0079	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1472
21	0.0080	-0.7000	0.0100	0.0055	0.0205	-0.1312
22	0.0190	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.7000	-0.2731
23	0.0246	0.0205	0.0100	0.0055	-0.7000	-0.1279
24	-0.7000	0.0244	0.0100	0.0055	0.0205	-0.1279
25	0.0056	-0.7000	-0.7000	0.0055	-0.0592	-0.2896
26	0.0080	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1471
27	0.0078	-0.7000	0.0100	0.0055	-0.0592	-0.1472

組入比率	銘柄A	銘柄B	銘柄C	銘柄D	銘柄E	合計
	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	1.00

	銘柄A	銘柄B	銘柄C	銘柄D	銘柄E	PF
平均	-0.0866	-0.4447	-0.0618	-0.0155	-0.1147	-0.1447
分散	0.0613	0.1177	0.0458	0.0097	0.0894	0.0119

NUOPT  
最適化



横軸: 収益率



# ポートフォリオ最適化

## 最適化実行

最適化実行

### NUOPT GUI

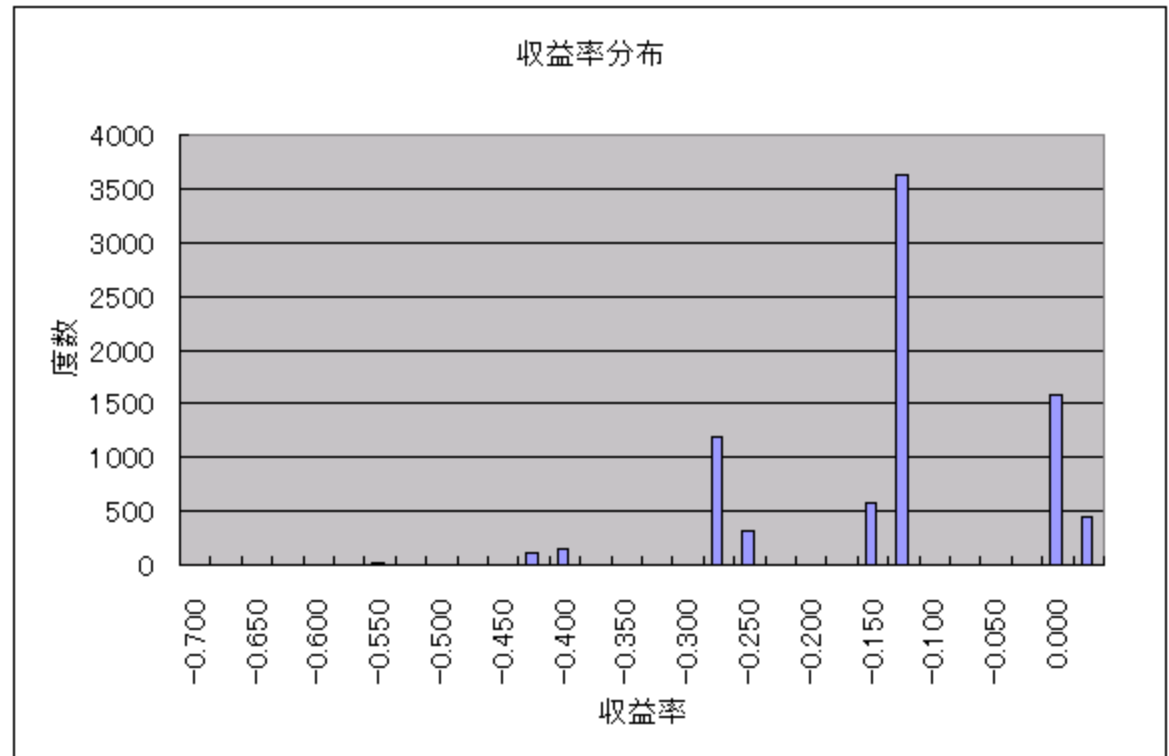


対象モデルを選択

	銘柄A	銘柄B	銘柄C	銘柄D	銘柄E	合計
組入比率	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	1.00

NUOPT  
最適化

	銘柄A	銘柄B	銘柄C	銘柄D	銘柄E	PF
平均	-0.0866	-0.4447	-0.0618	-0.0155	-0.1147	-0.1447
分散	0.0613	0.1177	0.0458	0.0097	0.0394	0.0119

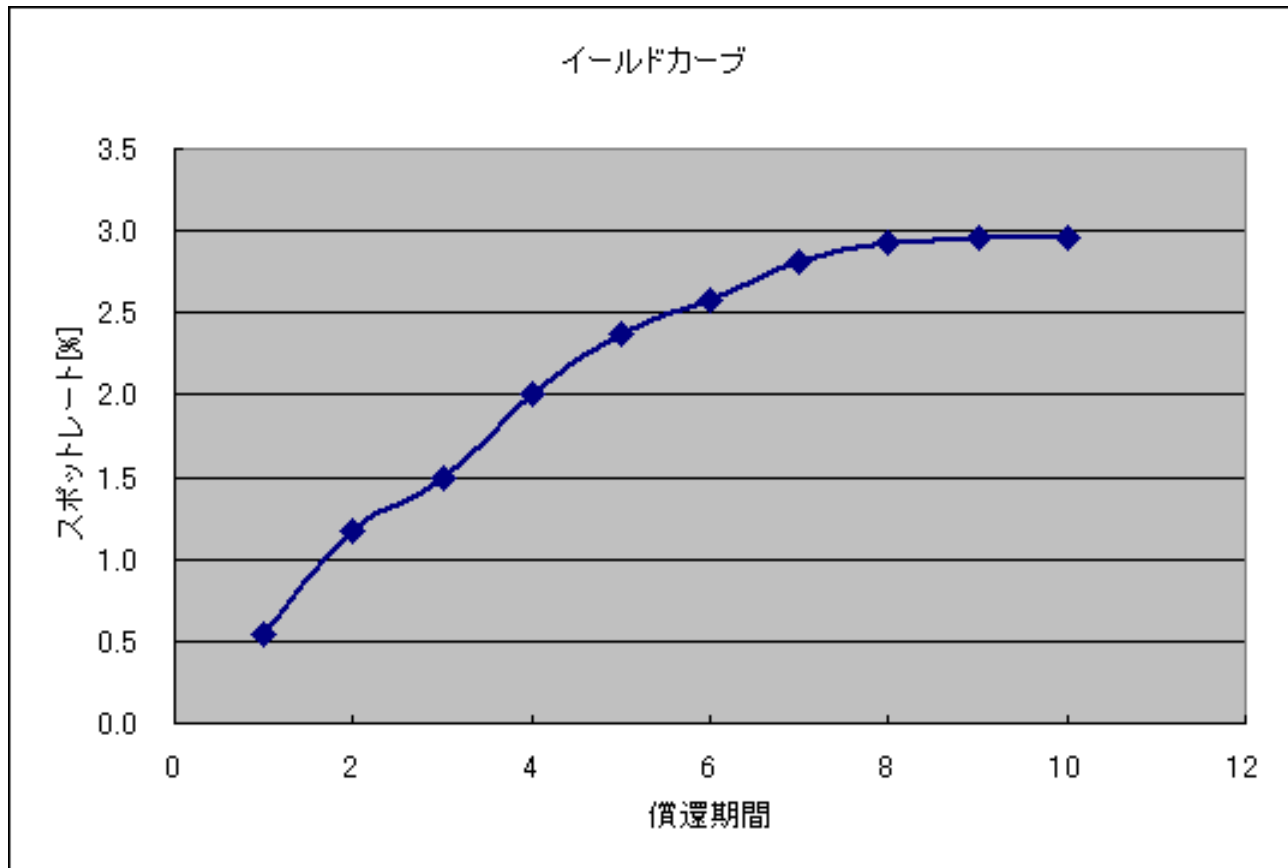


金融工学関連アプリケーション

イールドカーブ推定

# イールドカーブ推定

各償還期間におけるスポットレートを推定する



# イールドカーブ推定

・スポットレート[%]:  $r_j (j = 1, \dots, 10)$

・償還期間  $T$  の利付き債の理論価格

$$S(T; r_1, \dots, r_T) = \frac{100}{(1 + 0.01 \cdot r_T)^T} + \sum_{k=1}^T \frac{1}{(1 + 0.01 \cdot r_k)^k}$$

# イールドカーブ推定

・償還期間  $T$  の利付き債の観測価格

観測結果:  $(T_i, S_i) \quad i \in \{1, \dots, 60\}$

・理論価格と観測価格の差の二乗和

最小化  $\sum_i \left\{ \underbrace{S(T_i, r_1, \dots, r_{10})}_{\text{理論価格}} - \underbrace{S_i}_{\text{観測価格}} \right\}^2$

変数

# イールドカーブ推定

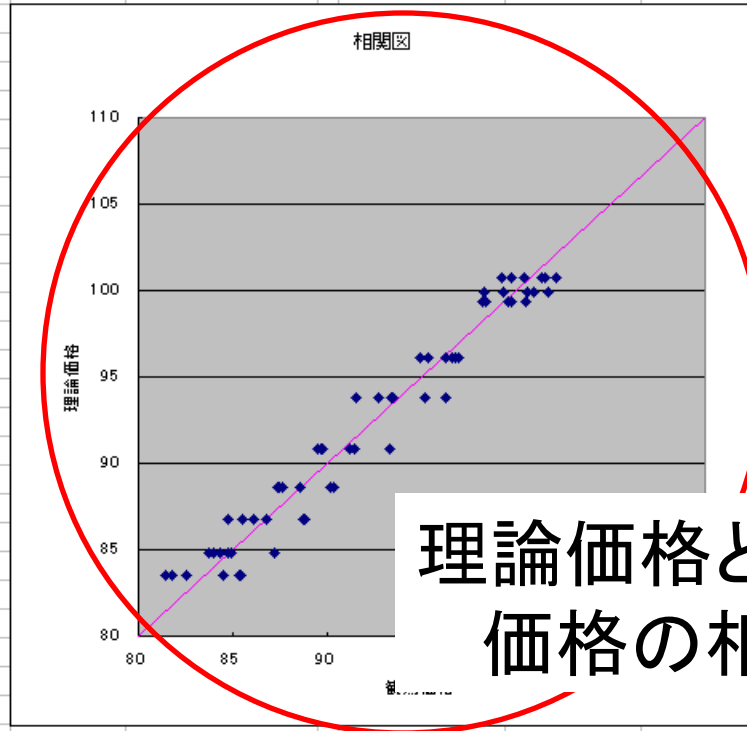
Excel ファイル

理論価格

観測価格

スポットレート

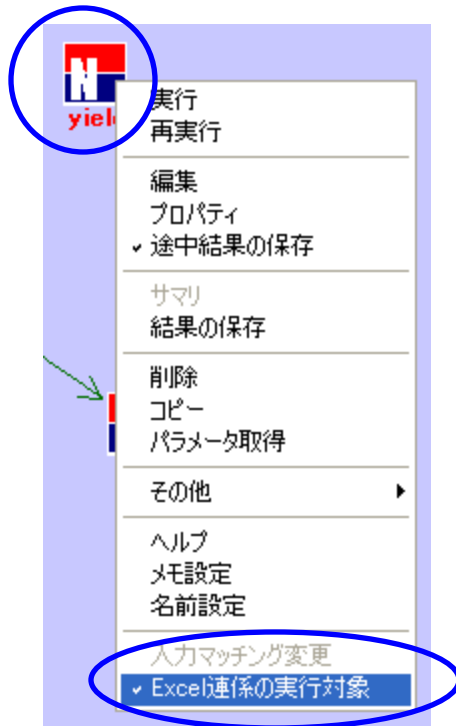
	償還期間	Sの観測価格	Sの理論価格	償還期間	スポットレート[%]	誤差の二乗和	NUOPT 最適化
1	1	100.39	100.72	1	0.28	97.00	最適化
2	1	102.15	100.72				
3	1	99.24	100.72				
4	1	101.32	100.72				
5	1	99.72	100.72				
6	1	101.51	100.72				
7	2	100.62	99.87				
8	2	99.34	99.87				
9	2	98.27	99.87				
10	2	98.31	99.87				
11	2	100.97	99.87				
12	2	101.73	99.87				
13	3	99.78	99.36				
14	3	100.47	99.36				
15	3	98.19	99.36				
16	3	99.55	99.36				
17	3	99.79	99.36				
18	3	98.40	99.36				
19	4	96.60	96.14				
20	4	96.93	96.14				
21	4	96.80	96.14				
22	4	94.91	96.14				
23	4	96.28	96.14				
24	4	95.33	96.14				
25	5	95.13	93.76				
26	5	93.50	93.76				
27	5	93.42	93.76				
28	5	91.56	93.76				
29	5	92.67	93.76				
30	5	96.28	93.76				
31	6	89.66	90.81				
32	6	89.46	90.81				
33	6	91.21	90.81				
34	6	91.42	90.81				
35	6	93.32	90.81				
36	6	89.76	90.81				
37	7	90.40	90.81				



理論価格と観測  
価格の相関

# イールドカーブ推定

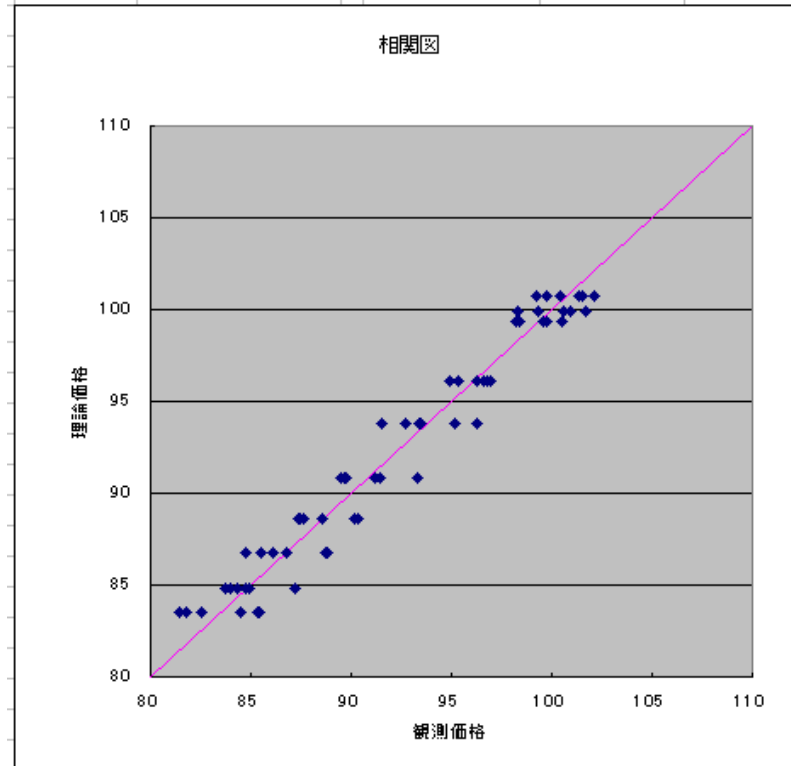
## NUOPT GUI



対象モデルを選択

償還期間	スポットレート[%]	誤差の二乗和	NUOPT 最適化
1	0.28	97.00	
2	1.07		
3	1.22		
4	2.03		
5	2.36		
6	2.71		
7	2.84		
8	2.90		
9	2.97		
10	2.95		

最適化実行



# 非線形関数のフィッティング

理論式:  $y = F(x; \alpha, \beta, \dots)$

観測結果:  $(x_i, y_i)$

最小化  $\sum_i \{F(x_i; \alpha, \beta, \dots) - y_i\}^2$

パラメータ(変数)



# イールドカーブ推定

- ・変数  $r_j$  について非線形

$$S(3) = \frac{100}{(1+0.01 \cdot r_3)^3} + \frac{1}{(1+0.01 \cdot r_3)^3} + \frac{1}{(1+0.01 \cdot r_2)^2} + \frac{1}{1+0.01 \cdot r_1}$$

- ・その他の非線形関数のフィッティング問題

- イールドスプレッドに基づく格付け推移確率行列の推定
- 半正定値ロジット・モデルを用いた倒産分析



数理計画法を用いて求解

NUOPTを使えば...

- ・少なくともいずれかの局所最適解に収束する
- ・二階微分の情報を用いているので、解の収束が速い

金融工学関連アプリケーション

倒産判別

# 判別分析

- 計測結果から性質を予想する



Iris virsinica



Iris versicolor



Iris virsinica



Iris versicolor

# 判別分析

## 数理計画モデル

- 変数

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  (パラメータ)

- 目的関数

*versicolor*なのに  $\frac{e^\eta}{1+e^\eta}$  が1/2以上になる

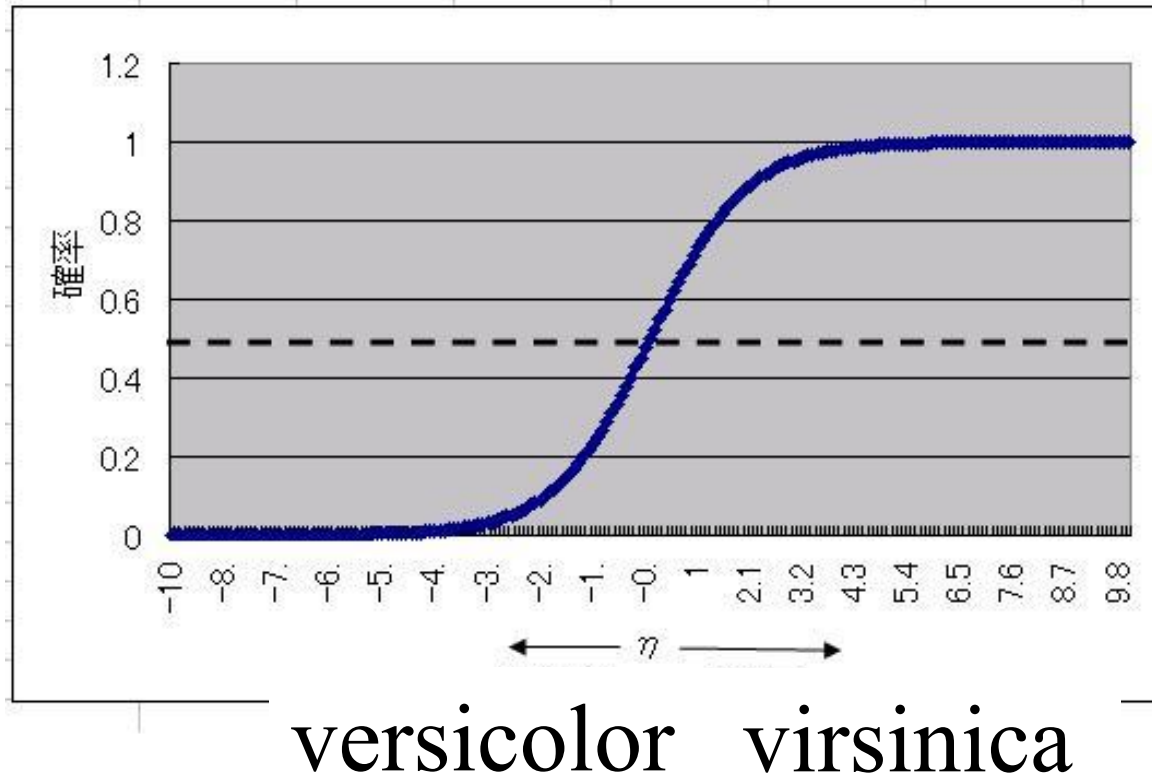
(誤判定)確率

$$\eta = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4$$

$X_1, X_2, X_3, X_4$  (計測データ)

# 判別分析

- ロジスティクス関数  $\Phi(\eta)$



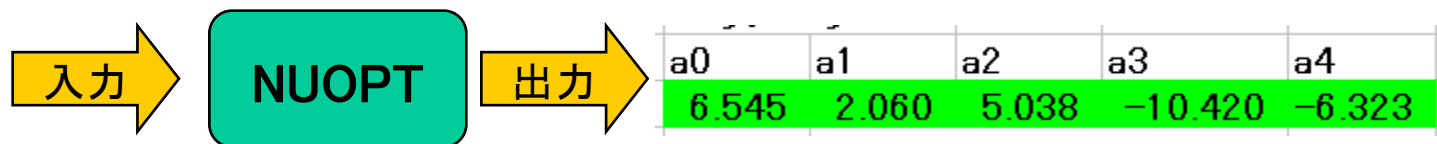
# 判別分析

## 判別の実際(パラメータ推定)

	A	B	C	D	E	F
1			教師データ(80個)			
2	data	1	2	3	4	正解
3	1	5.4	3.7	1.5	0.2	1
4	2	4.8	3.4	1.6	0.2	1
5	3	4.8	3	1.4	0.1	1
6	4	4.3	3	1.1	0.1	1
7	5	5.8	4	1.2	0.2	1
8	6	5.7	4.4	1.5	0.4	1
9	7	5.4				
10	8	5.1				
11	9	5.7				
12	10	4.9				
13	11	5				
14	12	5.5				
15	13	7				
16	14	6.4				
17	15	6.0				

数理計画  
モデル

判別モデルパラメータ



非線形最適化  
アルゴリズム

# 判別分析

## 判別の実際(予測力検証)

予測力検証(20個)					正解	予測	$\eta$
ケースNo.							
1	5.1	3.5	1.4	0.2	1	1	18.831
2	5	3.6	1.4	0.2	1	1	19.129
3	5.7	2.8	4.1	1.3	0	0	-18.549
4	4.9	3	1.4	0.2	1	1	15.900
5	4.7	3.2	1.3	0.2	1	1	17.537
6	4.6	3.1	1.5	0.2	1	1	14.744
7	6.2	2.9	4.3	1.3	0	0	-19.099
8	5.1	2.5	3	1.1	0	0	-8.570
9	5.7	3	4.2	1.2	0	0	-17.951
10	5.7	2.9	4.2	1.3	0	0	-19.087
11	5.4	3.9	1.7	0.4	1	1	17.073
12	5	2.3	3.3	1	0	0	-12.277
13	5.6	2.7	4.2	1.3	0	0	-20.301
14	4.6	3.4	1.4	0.3	1	1	16.665
15	4.4	2.9	1.4	0.2	1	1	14.366
16	4.9	3.1	1.5	0.1	1	1	15.994
17	5.5	2.6	4.4	1.2	0	0	-22.462
18	6.1	3	4.6	1.4	0	0	-22.559
19	5.8	2.6	4	1.2	0	0	-17.676
20	5	3.4	1.5	0.2	1	1	17.079

正解率100%

# 倒産判別

$\eta$ : 財務諸表の値の関数

- 二次モデルへの拡張

$$\eta = a_0 + \mathbf{a}^t \mathbf{X} + \mathbf{X}^t \mathbf{Q} \mathbf{X}$$

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{Q}$$

表現力  
増大

パラメータ  
(二次項)



# 倒産判別のための 数理計画モデル

- 変数

$$a_0, \mathbf{a}, \mathbf{Q} \text{ (パラメータ)}$$

- 目的関数

倒産データについては  $\frac{e^\eta}{1+e^\eta}$  が1に近い

存続データについては  $\frac{e^\eta}{1+e^\eta}$  が0に近い

$$\eta = a_0 + \mathbf{a}^t \mathbf{X} + \mathbf{X}^t \mathbf{Q} \mathbf{X}$$

# パラメータ推定のための 数理計画モデル

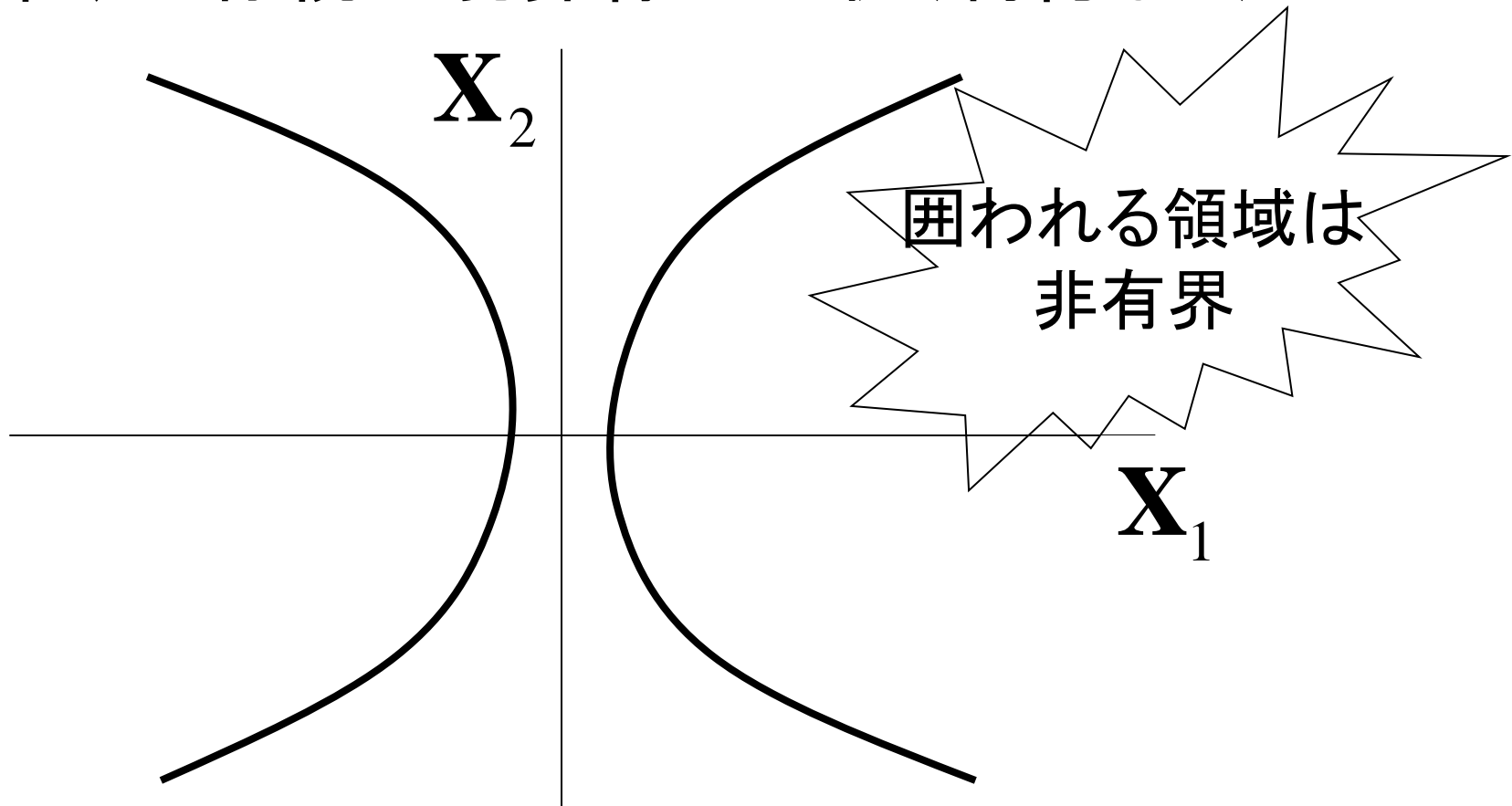
- 制約

**Qが半正定値**

予測力  
向上

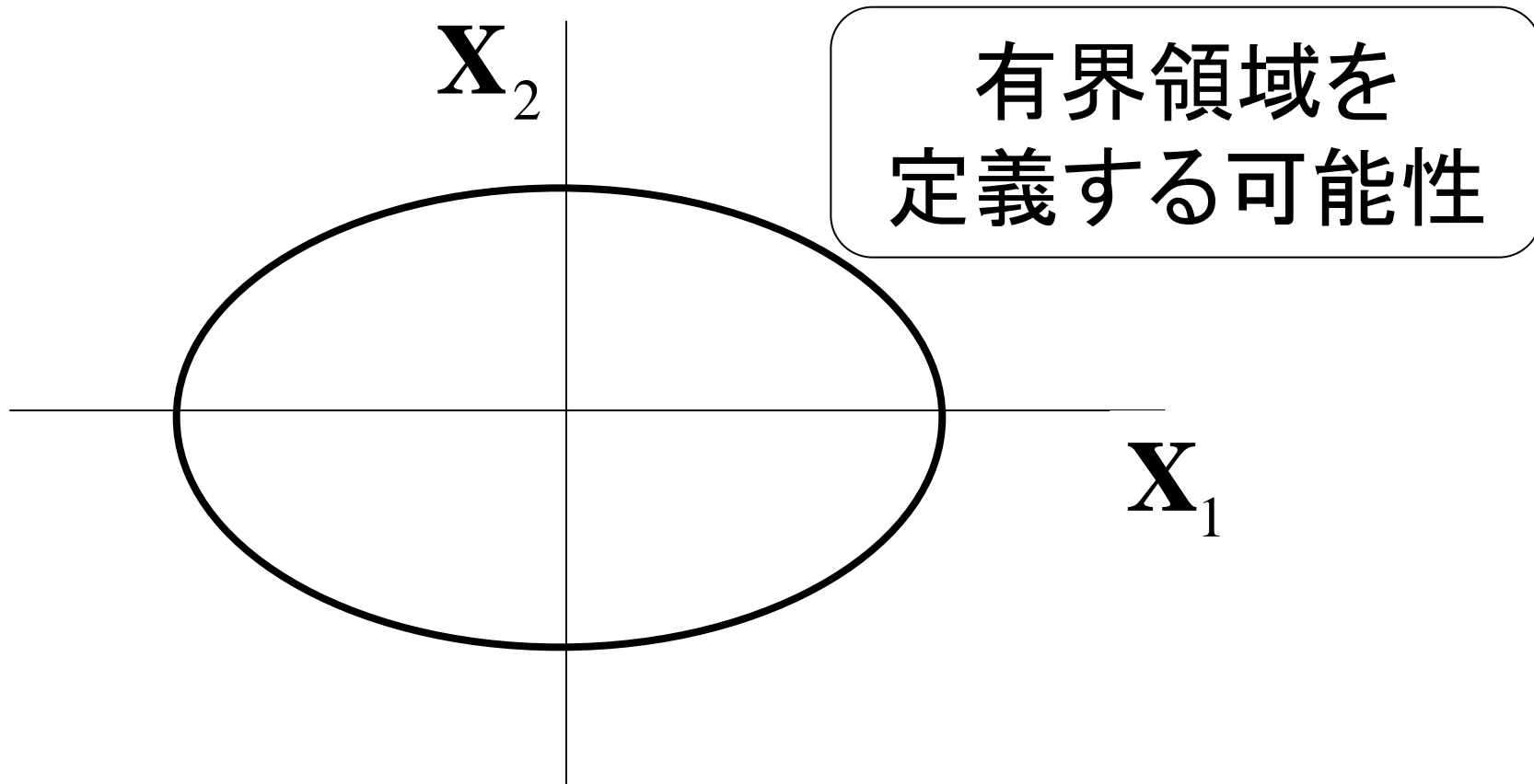
# 半正定値制約の意義

- 倒産・存続の境界線の形状(制約なし)



# 半正定値制約の意義

- 倒産・存続の境界線の形状(制約あり)



# 金融工学関連アプリケーション

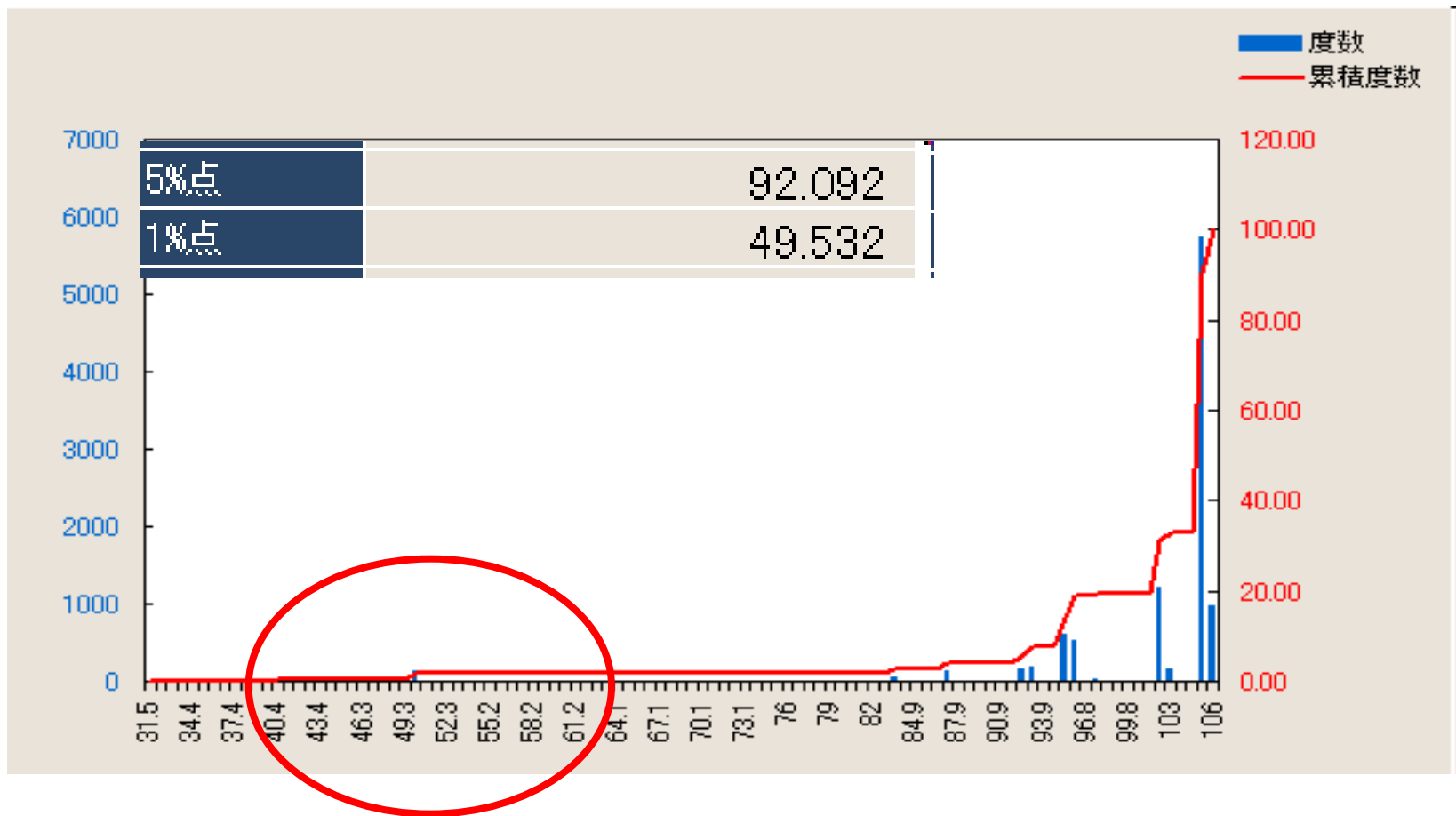
## 社債ポートフォリオ (CVaR 最小化)

# 社債ポートフォリオ最適化

- 3つの社債のポートフォリオ
- 購入予算(100億) 制約
- 期待収益率(1.5%~1.6%..)
- クレジット・スプレッドは格付け(A,B,D)連動
- 格付けは推移確率行列に従って移動
- 格付け移動が不確定要素  
(正規乱数→一様乱数)
- 無リスク金利は一定
- 一年後価格の分布を最適化

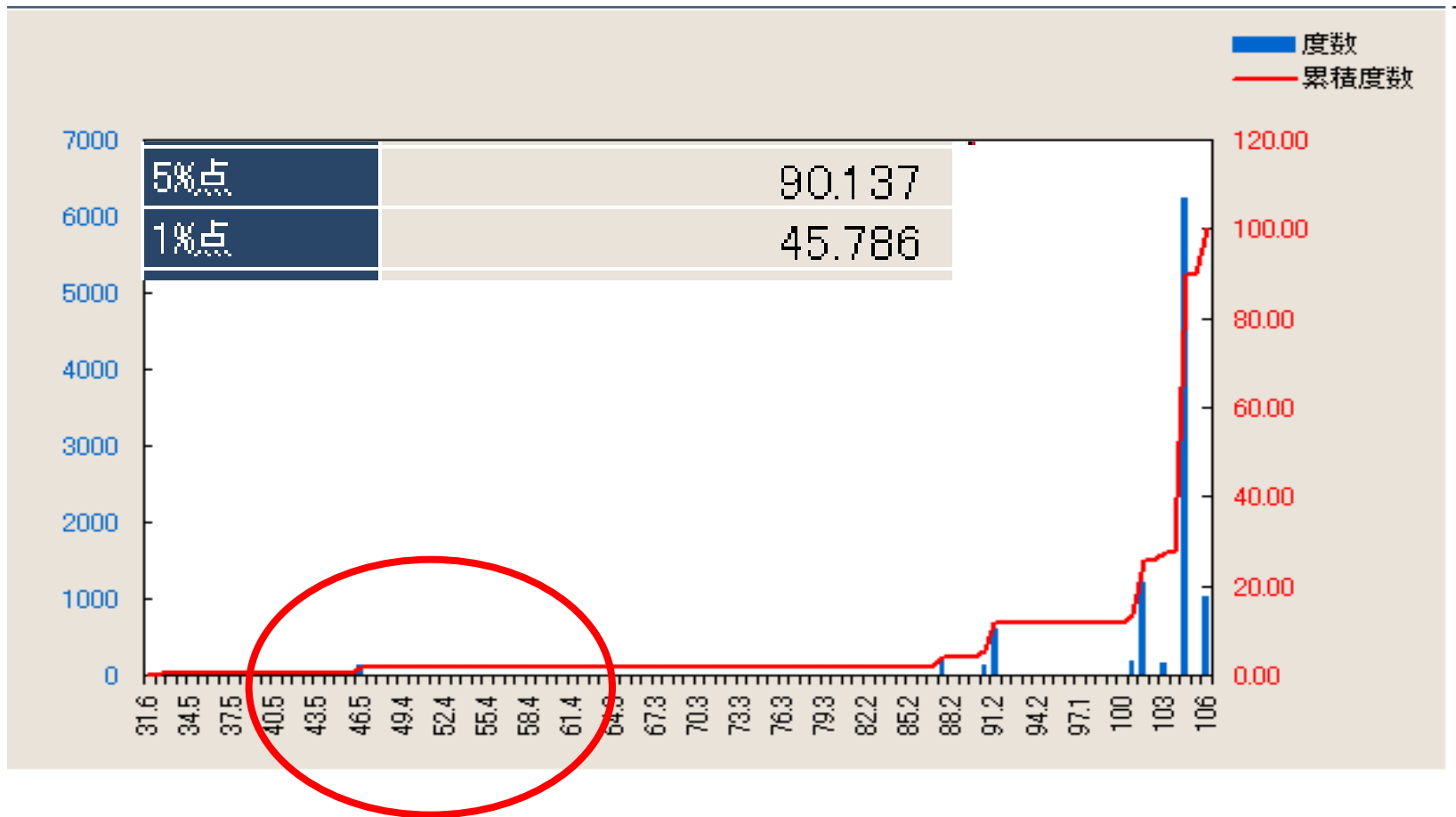
# 分散 vs. CVaR

分散最小化による社債ポートフォリオ  
期待収益率 = 1.281 (最小)



# 分散 vs. CVaR

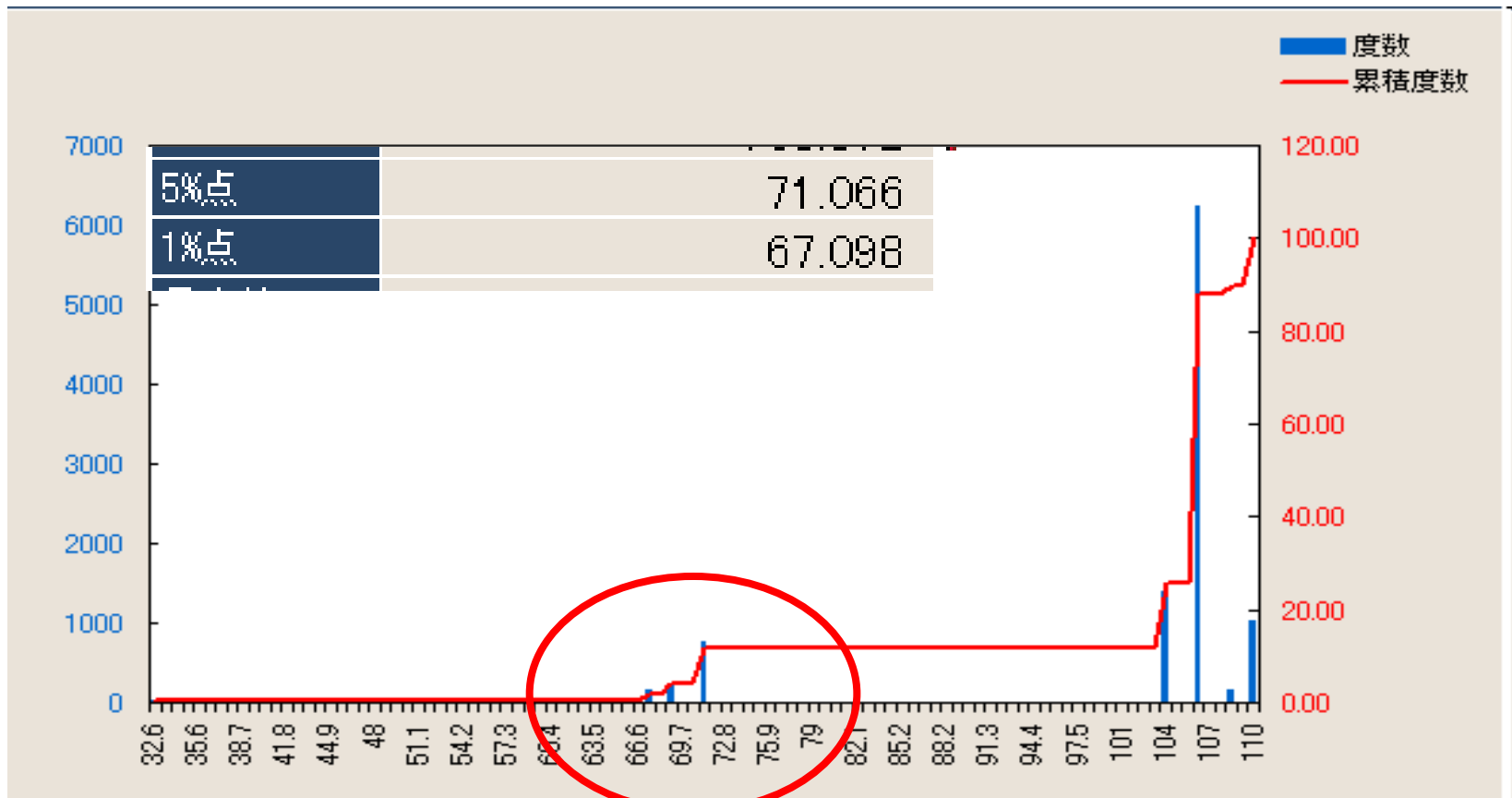
分散最小化による社債ポートフォリオ  
期待収益率 = 1.4





# 分散 vs. CVaR

分散最小化による社債ポートフォリオ  
期待収益率 = 1.5



# CVaR最小化

最小化  $\frac{1}{P} \sum_{k \in \text{Sample}} s_k + \alpha$

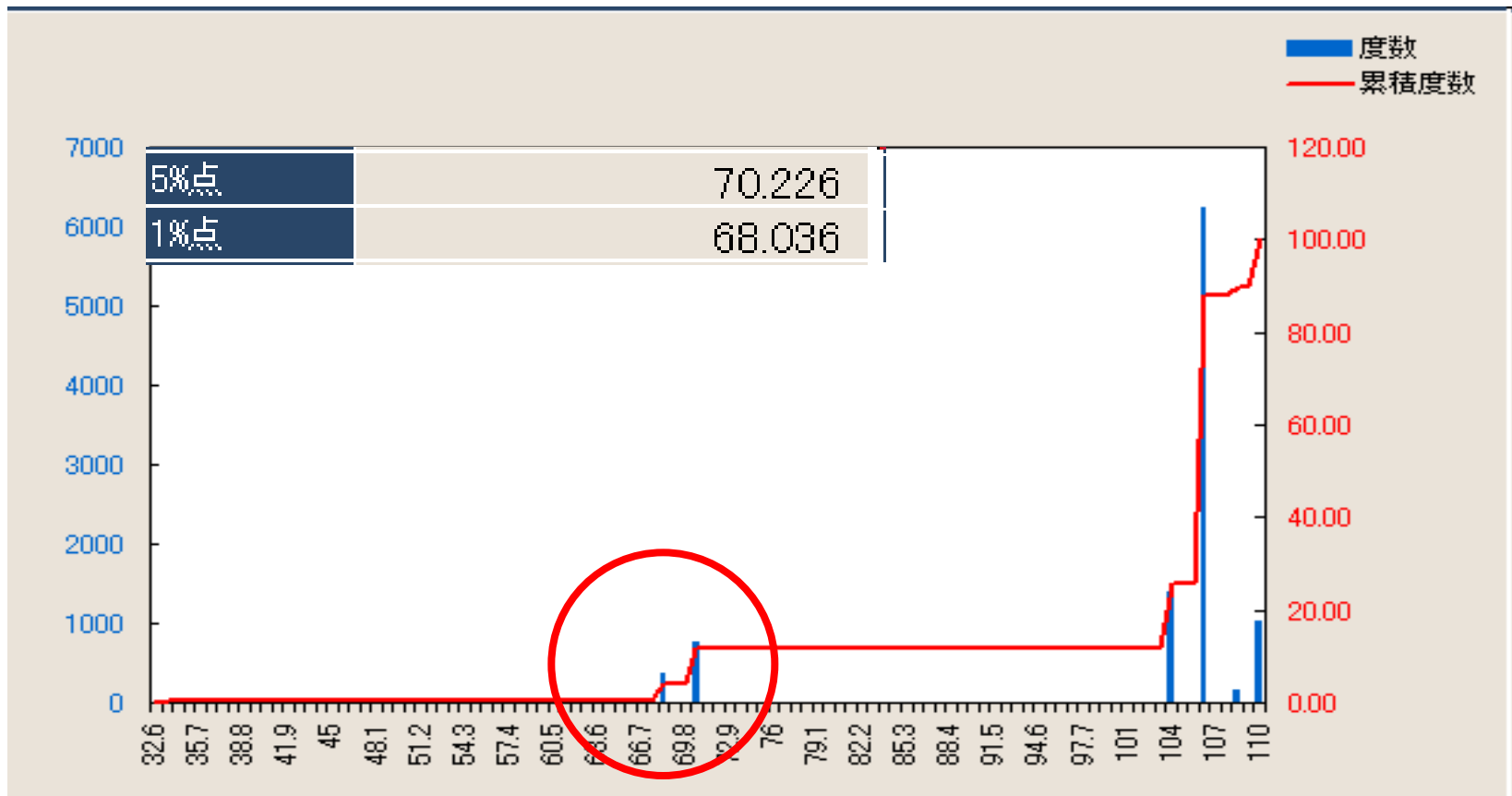
制約  $s_k + \alpha \geq -R^k(x)$

$$s_k \geq 0, \quad x \in \Omega$$

投資可能集合

# 分散 vs. CVaR

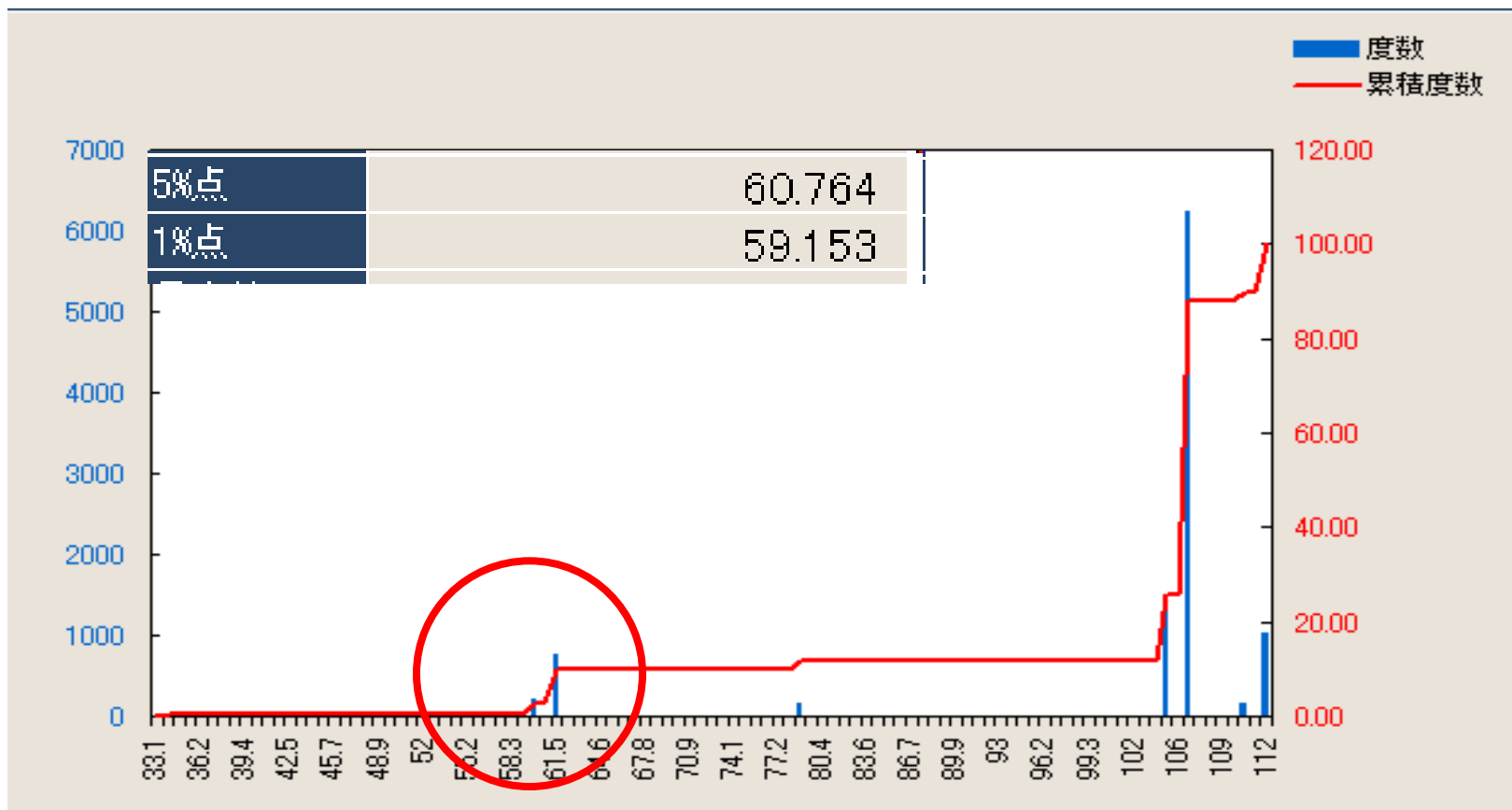
CVaR最小化による社債ポートフォリオ  
期待収益率 = 1.504 (最小)



# 分散 vs. CVaR

## 分散最小化による社債ポートフォリオ

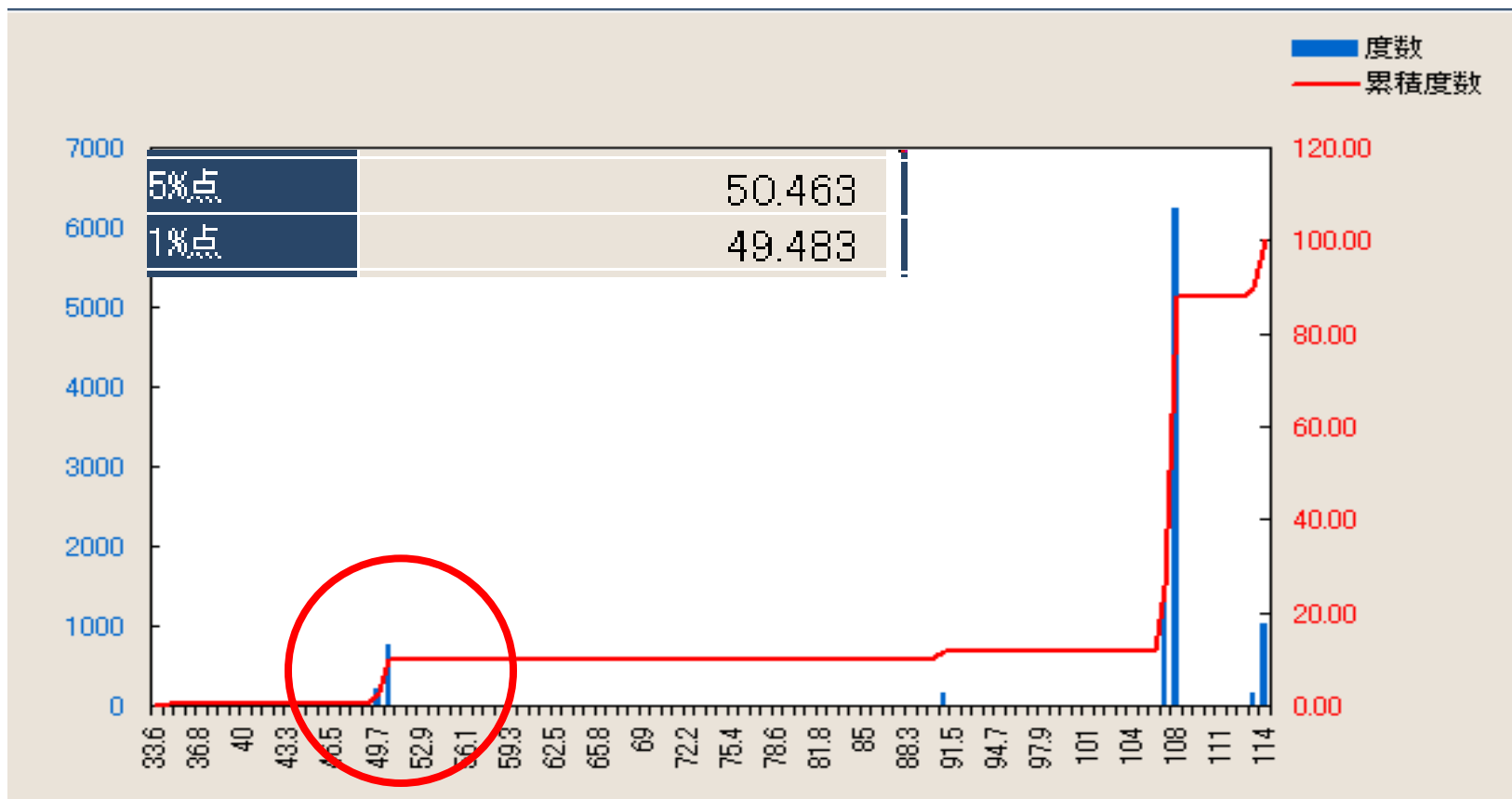
期待収益率 = 1.55



# 分散 vs. CVaR

## 分散最小化による社債ポートフォリオ

期待収益率 = 1.6

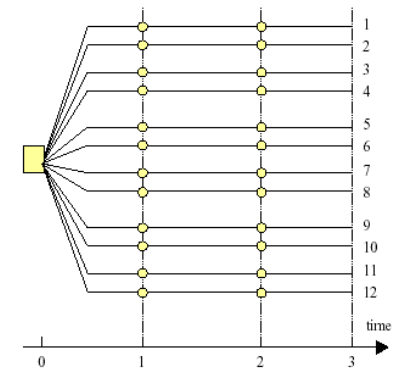


金融工学関連アプリケーション

年金 ALM システム

# NUOPTを用いた 年金ALMシステム事例紹介

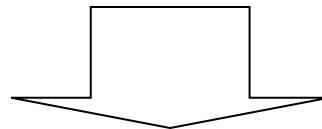
- 年金基金の投資計画  
⇒投資対象はアセットクラス(短期資産・国内株式・外国株式...:数個)
- 長期的(20年程度)な投資計画  
⇒多期間にわたる投資計画を求める問題  
⇒状況に応じた投資可能ということを前提
- 資産価格変動に分布は仮定できない  
⇒変動シナリオを入力
- 負債(年金支払い)のキャッシュフローを考慮したい  
⇒想定データを入力
- 最適配分を求めたい



# ベースとなる数理モデル

## • 枇々木モデル

- ✓ W.T. Ziemba and J.M. Mulvey, Worldwide Asset and Liability Modeling, Cambridge University Press, 1998.
  - 第1章(サーベイ論文) J.M. Mulvey and W.T. Ziemba, Asset and Liability Management Systems for Long-Term Investors: Discussion of the Issues, pp.3-38.
  - 第7部～第9部: 応用論文
- ✓ J.M. Mulvey and W.T. Ziemba, Asset and Liability Allocation in a Global Environment, Chapter 15 in “Handbooks in OR & MS, Vol.9”, edited by R.Jarrow et al., 1995. (サーベイ論文)
  - 枇々木規雄: グローバル環境における資産負債配分, 第15章, 今野浩, 古川浩一編著, ファイナンスハンドブック, 朝倉書店, 1997.
- ✓ 竹原均, 『ポートフォリオの最適化』, 第6章「多期間投資モデル」, 朝倉書店, 1997.
- ✓ 枇々木規雄, 『金融工学と最適化』, 第7章「シナリオ・ツリー型多期間確率計画モデル」, 朝倉書店, 2001.



発展・改良

枇々木規雄: 「最適資産配分問題に対するシミュレーション/ツリー混合型多期間確率計画モデル」,  
・ ジャフィー・ジャーナル[2001] 金融工学の新展開, 2001年6月, pp.89-119.



# 枇々木モデルの特徴

- **非線形性の解消**  
⇒Xを配分比率でなく投資量で表現
- **本質的なトレードオフの明確化**  
不確定性の記述 $\leftrightarrow$ 意思決定の自由度  
(どちらに傾斜するかを  
自由に設定可)
- **線形計画問題になる**  
⇒汎用の数理計画パッケージで**解ける**

# 枇々木モデルの定式化

## 変数とパラメータの定義

### • 変数

$z_{jt}$  :  $t$  時点の危険資産  $j$  への投資量。 ( $j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, \tau$ )

$v_0$  : 0 時点の現金 (コール運用額)。

$v_t^{(i)}$  :  $t$  時点の経路  $i$  の現金 (コール運用額)。 ( $t = 1, \dots, \tau; i = 1, \dots, I$ )

### • パラメータ

$\rho_{j0}$  : 0 時点の危険資産  $j$  の価格。 ( $j = 1, \dots, n$ )

$\rho_{jt}^{(i)}$  :  $t$  時点の経路  $i$  の危険資産  $j$  の価格。 ( $j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, I$ )

$$\text{平均資産価格} : \bar{\rho}_{jt} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \rho_{jt}^{(i)}$$

$r_0$  : 期間 1 の金利 (0 時点の金利)。

$r_{t-1}^{(i)}$  : 期間  $t$  の経路  $i$  の金利 ( $t-1$  時点の金利)。 ( $t = 2, \dots, T; i = 1, \dots, I$ )

$$\text{平均金利} : \bar{r}_{t-1} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I r_{t-1}^{(i)}$$

# 枇々木モデルの定式化

## キャッシュフローの制約

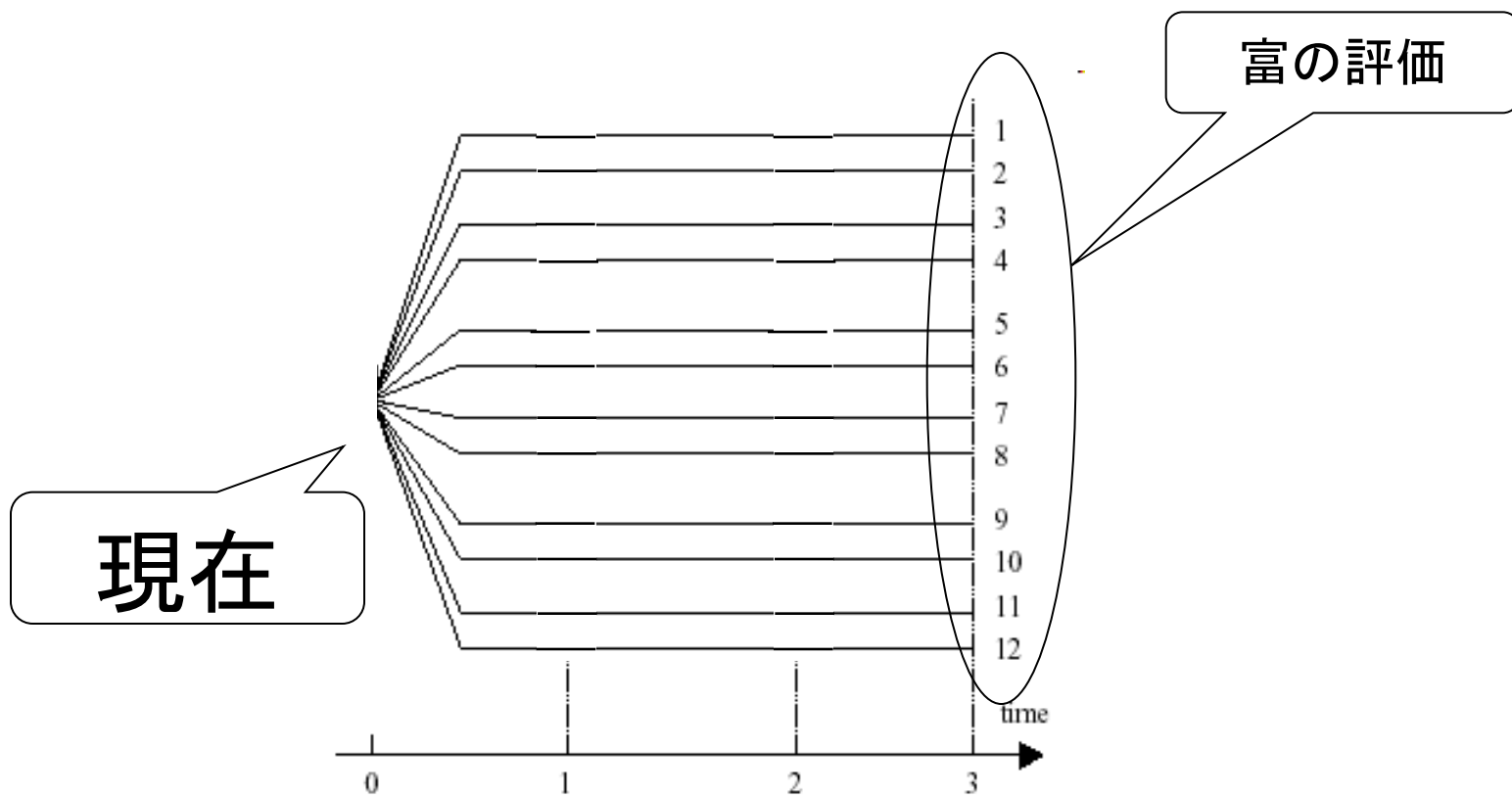
$$\sum_{j=1}^n \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0$$

$$W_1^{(i)} \equiv \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j0} + (1 + r_0)v_0 - D_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{j1}^{(i)} z_{j1} + v_1^{(i)}, \quad (i = 1, \dots, I)$$

$$W_t^{(i)} \equiv \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}^{(i)}) v_{t-1}^{(i)} - D_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n \rho_{jt}^{(i)} z_{jt} + v_t^{(i)},$$

$(t = 2, \dots, \tau; i = 1, \dots, I)$

# シナリオ

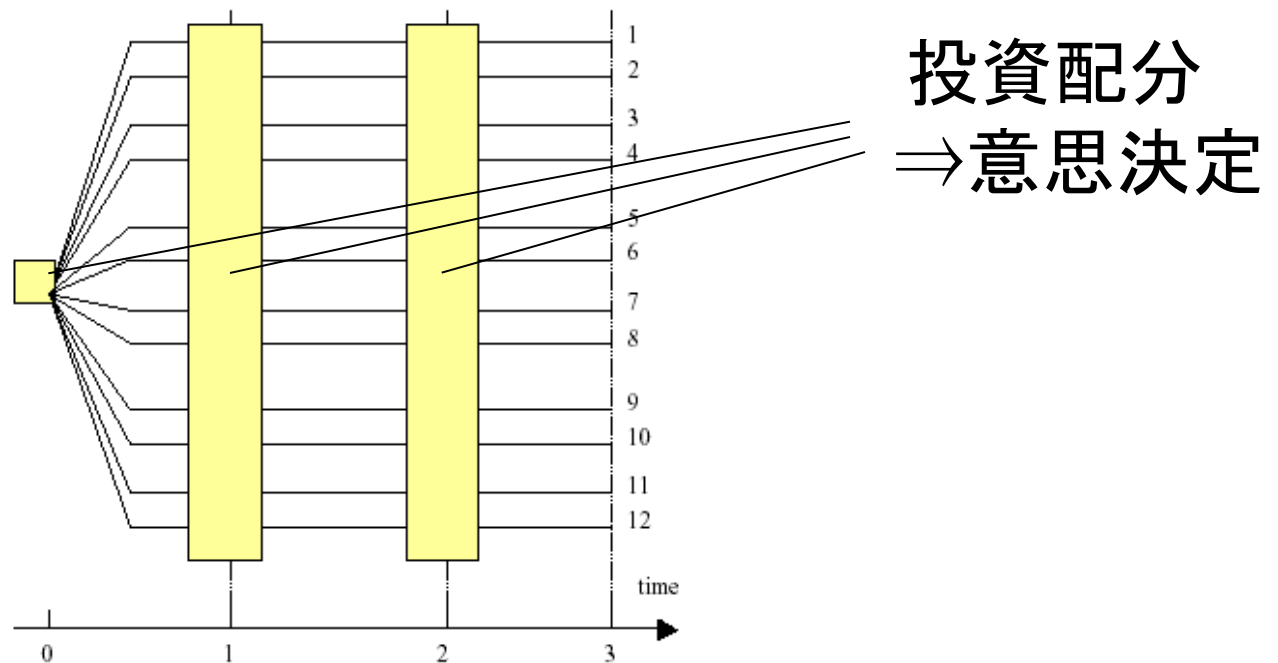


資産価格の動きを予想して生成

実際的には5000本以上必要

# シミュレーション型モデル

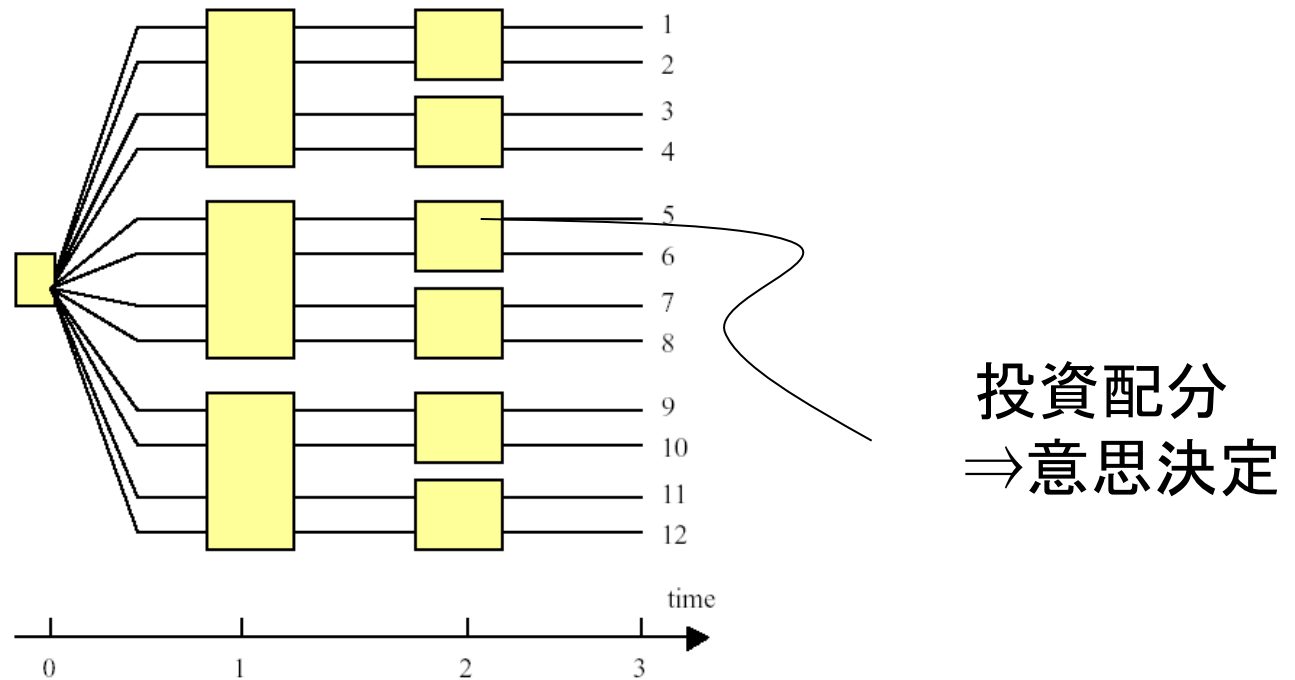
- 配分はシナリオに依存しない



不確定性の表現に計算機資源を振り向ける

# 混合型モデル

- シナリオ依存の意志決定



意志決定の自由度をある程度持たせる

# 線形計画問題としての 枇々木モデル

- $n, m$  いずれも数十万
- NUOPTの内点法が有利
- 制約式の係数行列 $A$ の構造に癖あり
- 内点法の反復回数を比較的多く所要

枇々木規雄; 「コンパクト表現によるシミュレーション型多期間確率計画モデルの定式化」,  
Journal of Operations Research Society of Japan, 45, No.4(2002), pp.529-549.

枇々木規雄, 田辺隆人, 「多期間ポートフォリオ最適化問題におけるモデリング技術と  
実装(計算)技術の重要性, 高橋一, 池田昌幸編, 金融工学と資本市場の計量分  
析—ジャーナル2003, 2003年5月, pp.81-114.

# 枇々木モデル 実行時間の例

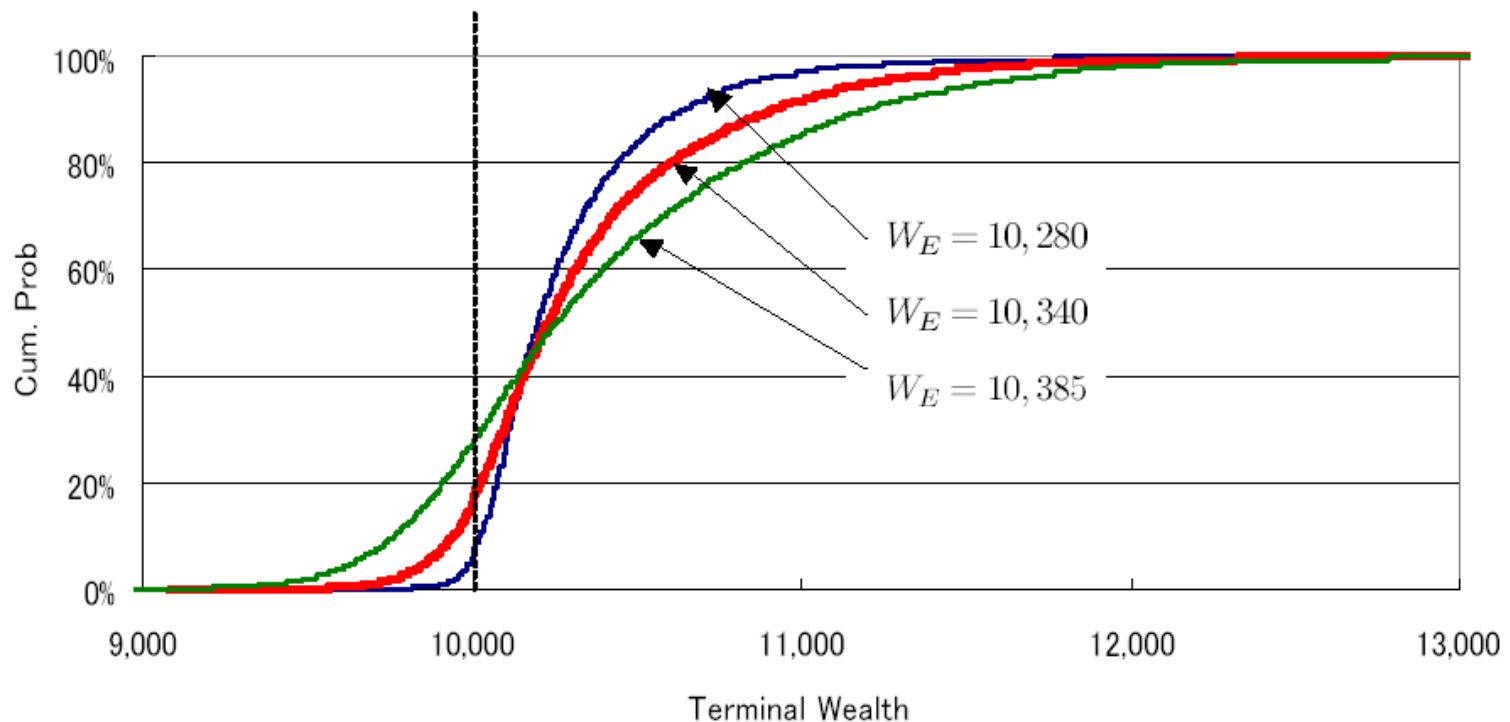
	変数総数	制約総数	計算時間 (秒)
シナリオ数: 1000	12034	12133	6
シナリオ数: 10000	120034	120133	138

(計算機:Pentium1.5GHz+メモリ1G,ソフト:NUOPT)



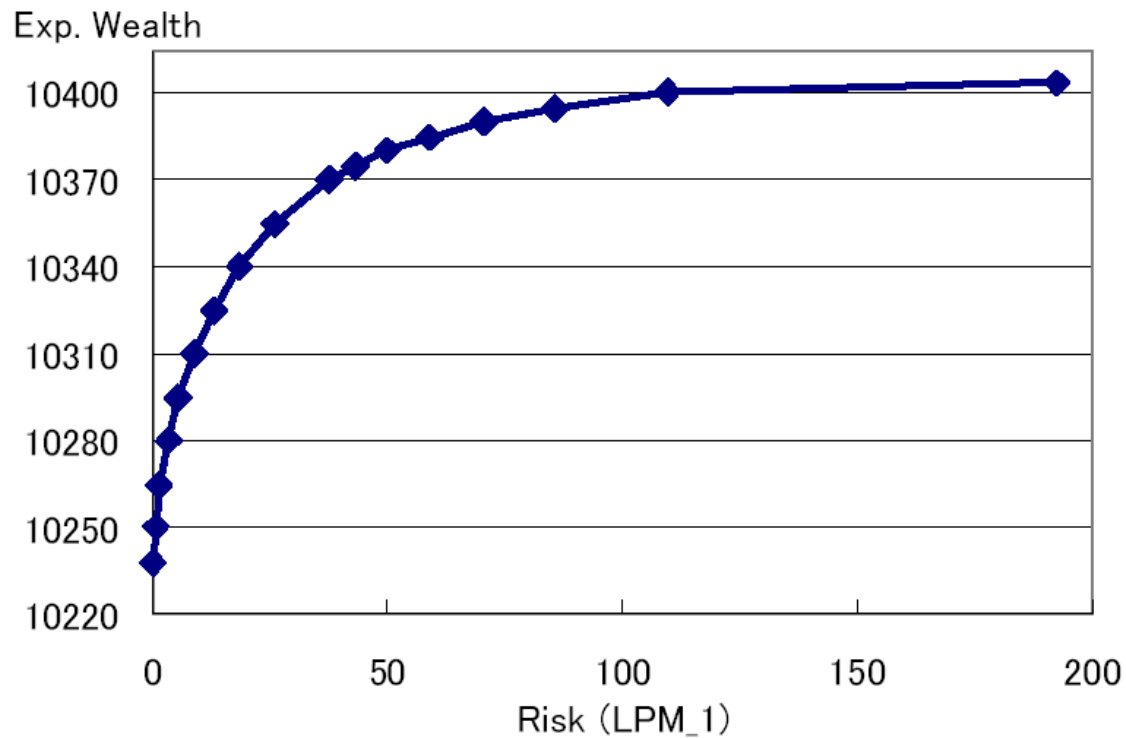
# 枇々木モデル 計算結果

- 最終富の累積分布



# 枇々木モデル 計算結果

- 有効フロンティア



金融工学関連アプリケーション

相関行列の作成

# 相関を持った乱数を発生したい

- 相関行列  $G$  を恣意的に決定したい
  - アセット1とアセット2は逆相関だから  
 $G[1,2] = -0.6$  くらいかな
  - アセット2とアセット3は強い相関があるので  
 $G[2,3] = 0.8$  にしたい
  - . . .

相関行列は  $G = LL^T$  と分解できねばならない  $\Rightarrow$  正定値でなければならない

# 正定値？

- 固有値がすべて正
- あらゆる  $v$  について

$$v^t G v > 0$$

無限個の制約が必要

半正定値：最小固有値で0を許す

# 半正定値行列 ノルム最小化問題

最小化  $\|G - X\|_F$

制約  $X - \varepsilon \cdot I : \text{半正定値}$

最も近い相関行列の生成

# 半正定値行列ノルム最小化問題 SIMPLEによるモデル記述

```
Set N; // 行列の各要素
Element i (set=N), j (set=N);
Variable x (index=(i,j));
Parameter a (index=(i,j)); // 与えられた行列の要素
SymmetricMatrix m ((i,j));
Parameter minEig; // 出力される相関行列の最小固有値
m[i,i] = 1 - minEig; // 対角は 1 とする
m[i,j] = x[i,j], i > j; // 下三角部分の定義
m >= 0; // 半正定値制約
Objective diffnrm (type=minimize); // 差の行列のノルム
diffnrm = sum(pow(x[i,j]-a[i,j],2), (i,j,i < j));
```

# 半正定値行列ノルム最小化問題 実行結果の例

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.00									
2	0.17	1.00								
3	0.17	0.10	1.00							
4	0.90	0.90	0.20	1.00						
5	0.80	0.20	0.00	0.20	1.00					
6	0.00	0.40	0.00	0.20	0.40	1.00				
7	0.20	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	1.00			
8	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	1.00		
9	0.80	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	
10	0.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

NUOPT  
最適化

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.00									
2	0.27	1.00								
3	0.15	0.10	1.00							
4	0.62	0.84	0.21	1.00						
5	0.59	0.16	0.01	0.32	1.00					
6	0.05	0.41	0.00	0.17	0.38	1.00				
7	0.18	0.00	0.00	0.21	0.01	0.00	1.00			
8	0.03	0.01	0.00	0.18	-0.01	0.00	0.00	1.00		
9	0.59	-0.04	0.01	0.12	0.09	-0.02	0.01	-0.01	1.00	
10	0.51	-0.04	0.01	0.11	0.08	-0.02	0.01	-0.01	0.08	1.00



金融工学関連アプリケーション

ロバスト最適化

# ロバスト最適化

- マルコビッツモデル

リスク回避係数

$$\max_x r^T x - \lambda x^T Q x$$

$$s.t. \quad x^T e = 1$$

Qの変動に対してリスクの振れ幅大

# ロバスト最適化

- **ロバスト**マルコビッツモデル

$$\max_w \left\{ r^T x - \lambda \max_{Q_L \leq Q \leq Q_U} \{ x^T Q x \} \right\}$$

$$s.t. \quad x^T e = 1$$

要素毎の上・下限

# ロバストマルコビッツモデル

- 等価な問題への変形

$$\max_x \quad r^T x - \lambda (Q_U \bullet U - Q_L \bullet L)$$

$$s.t. \quad x^T e = 1$$

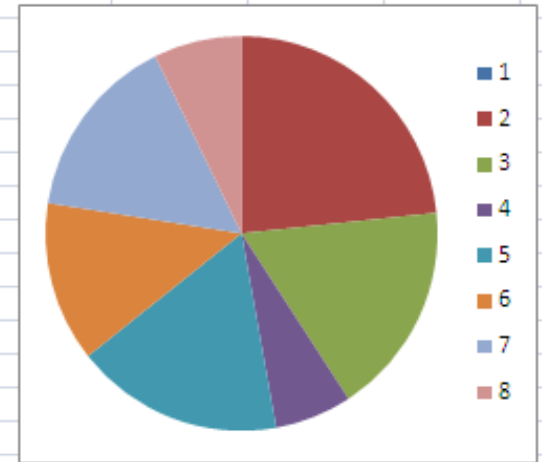
$$\begin{pmatrix} U - L & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \succeq 0$$

$$U \geq 0, L \geq 0$$

Fabozzi Kolm, Pachamanova Focardi,  
Robust Portfolio Optimization and Management, 2007

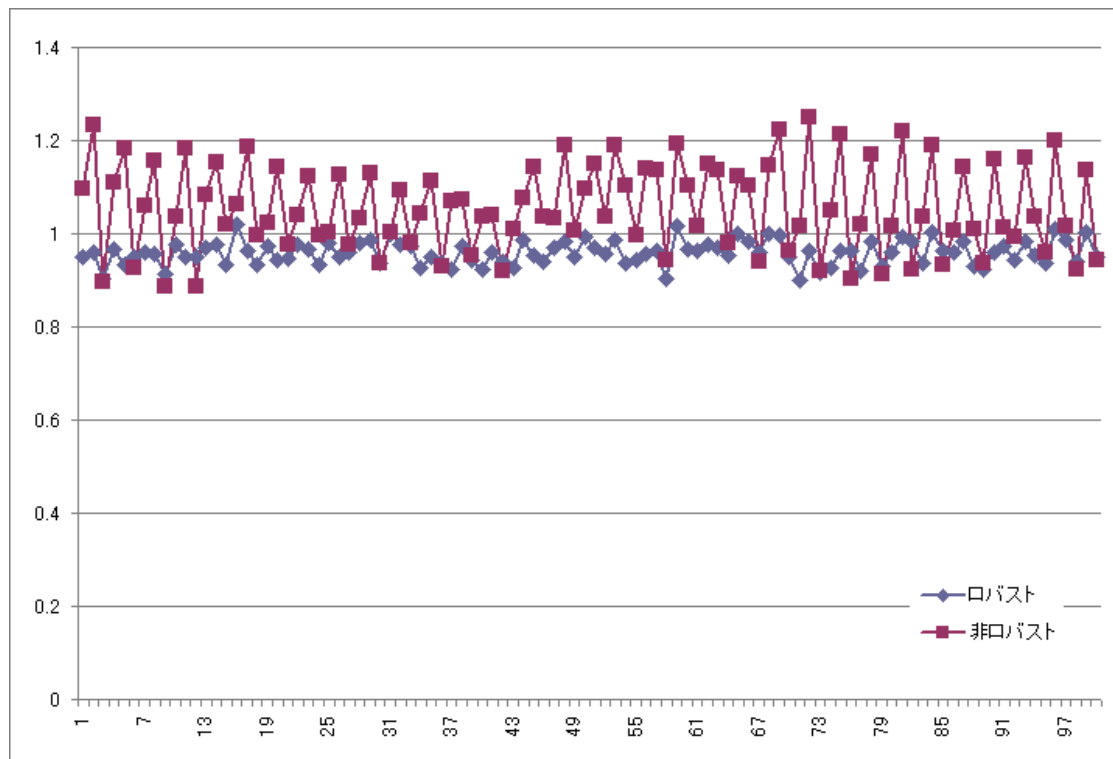
# ロバストマルコビッツモデル 実行結果の例

		Robustポートフォリオ							
		1	2	3	4	5	6	7	8
下限	1	1.9	-1.4	-1	-1	1	-0.5	-1	0.1
	2	-1.4	3.5	-1.5	0.5	-1.2	-1.2	0.4	0.6
	3	-1	-1.5	5	-1.125	1.1	0.9	0.3	-0.2
	4	-1	0.5	-1.125	6	1.5	0.4	1.2	-0.9
	5	1	-1.2	1.1	1.5	4.5	-1.4	0.15	-2
	6	-0.5	-1.2	0.9	0.4	-1.4	9	-1	0.5
	7	-1	0.4	0.3	1.2	0.15	-1	5.5	-1.25
	8	0.1	0.6	-0.2	-0.9	-2	0.5	-1.25	11.5
	上限	1	3	1	2.5	-0.9	1	-0.4	2.5
2		1	4.5	-1.4	1.2	0.5	-1.1	0.5	2.6
3		2.5	-1.4	6	-0.5	1.2	1	0.4	-0.1
4		-1	1.2	-0.5	6.5	1.6	0.5	1.3	-0.8
5		1	0.5	1.2	1.6	5.5	-1.3	0.16	-1.9
6		-0.4	-1.1	1	0.5	-1.3	11	-0.9	0.6
7		2.5	0.5	0.4	1.3	0.16	-0.9	6.5	-1.2
8		2	2.6	-0.1	-0.8	-1.9	0.6	-1.2	13.5
ポートフォリオ		0.0000	0.2332	0.1753	0.0634	0.1710	0.1319	0.1529	0.0723



# ロバスト性の検証

- 正定値行列100ケースについて  
リスクを比較



金融工学関連アプリケーション

ロングショートモデル

# ロング・ショートモデル (整数計画問題)

- 組み入れ比率の定義

$$x_j \equiv x_j^{long} - x_j^{short} = x_j^0 + d_j^{buy} - d_j^{sell}$$

$$x_j^{long}, x_j^{short}, d_j^{buy}, d_j^{sell} \geq 0$$



# 整数変数不要な要件

- ターンオーバー上限制約

$$\sum_j d_j^{buy} + d_j^{sell} \leq T$$

- 取引コスト最小化

$$\text{最小化 } \sum_j \alpha \cdot d_j^{buy} + \beta \cdot d_j^{sell}$$

# 整数変数が必要となる要件

- ポジションの等式制約

$$\sum_j x_j^{long} = LT$$

- 一般の投資制約

$$\sum_j A_j^i x_j^{long} \leq b^i \quad \sum_j C_j^i d_j^{buy} \leq d^i$$

# 整数変数の導入

- ロング・ショート

$$x_j^{long} \leq U_j^{long} \delta_j^{long}, \quad x_j^{short} \leq U_j^{short} (1 - \delta_j^{long})$$

- 購入・売却

$$d_j^{buy} \leq U_j^{buy} \delta_j^{buy}, \quad d_j^{sell} \leq U_j^{sell} (1 - \delta_j^{buy})$$

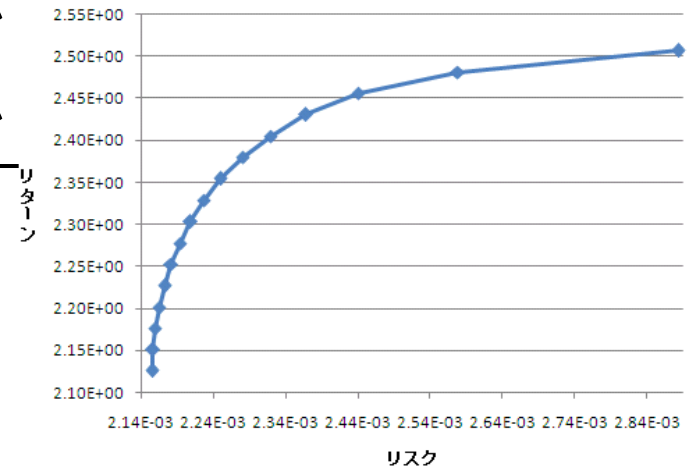
# ロングショートモデルの性能

- 16点のフロンティア曲線描画

---

計算時間平均	23.7秒
計算時間最小	11.2秒
計算時間最大	34.0秒
総時間合計	392.3秒

---



(使用環境: NUOPT9.1 Core2 1.6GHz メモリ2GBytes)

# ロングショートモデルの補強

- 制約追加

$$x_j^0 + d_j^{\text{buy}} - D_j^{\text{sell}} \leq x_j^{\text{long}} \leq x_j^0 + d_j^{\text{buy}}, \quad x_j^{\text{short}} = 0, \quad j \in \text{LONG}$$

$$d_j^{\text{buy}} \leq x_j^{\text{long}} \leq x_j^0 + d_j^{\text{buy}}, \quad x_j^{\text{short}} \leq d_j^{\text{sell}}, \quad j \in \text{Long} - \text{LONG}$$

$$-x_j^0 + d_j^{\text{sell}} - D_j^{\text{buy}} \leq x_j^{\text{short}} \leq -x_j^0 + d_j^{\text{sell}}, \quad x_j^{\text{long}} = 0, \quad j \in \text{SHORT}$$

$$d_j^{\text{sell}} \leq x_j^{\text{short}} \leq -x_j^0 + d_j^{\text{sell}}, \quad x_j^{\text{long}} \leq d_j^{\text{buy}}, \quad j \in \text{Short} - \text{SHORT}$$

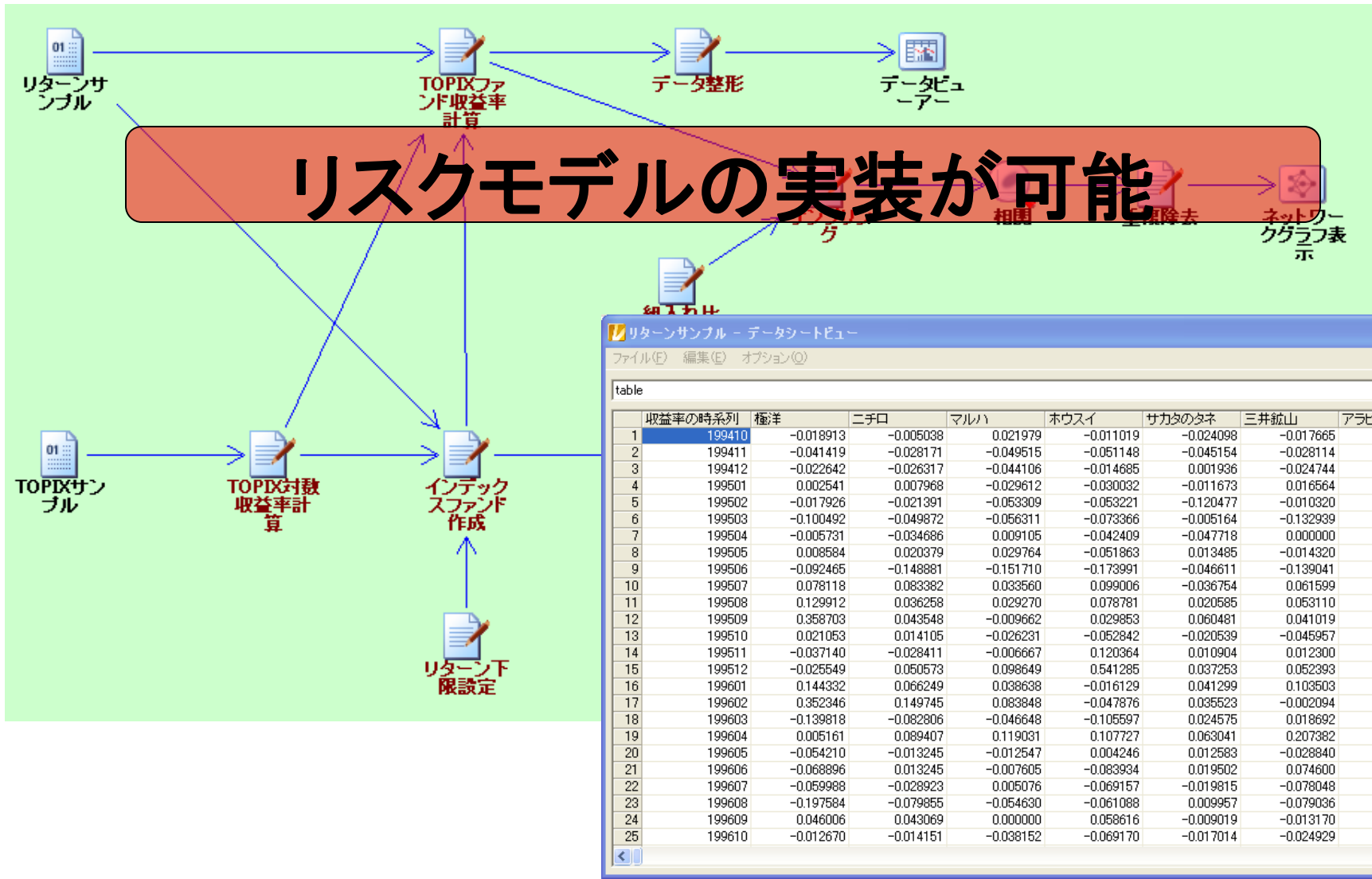
- 相補性を織り込んだ表現の変更

$$(x_j)^2 \implies (x_j^{\text{long}})^2 + (x_j^{\text{short}})^2$$

# 補強の効果 (ロング・ショートモデル)

銘柄数	補強前	補強後
300	72秒	19秒
500	---	95秒
600	---	178秒
700	---	329秒

# FIOPT(金融工学プラットフォーム) VMStudio との連携



# 受託業務形態

- 要求定義
  - 定式化
  - 周辺を含めたソフト仕様の設計
- プロトタイピング・製造
  - モデル・プログラム作成
- 検証とコンサルテーション
  - 高速化・モデルの精密化
  - 不測の事態への対処
- パッケージ化
  - 汎用的な仕様の洗い出し

NUOPT事例紹介ページ：

<http://www.msi.co.jp/nuopt/solution.html>