Nuorium Optimizer

C++SIMPLE例題集 V27

株式会社NTTデータ数理システム

2024年12月

MATHEMATICAL SYSTEMS INCARNATION

目　次

第 1 章　はじめに

本例題集では，様々な数理最適化問題を取り上げ，それらに対する C++SIMPLE での定式化の例を紹介しています．これらの定式化は Nuorium に直接入力するか，コピー&ペーストで貼り付けることで実際に実行し，動作を確認することが可能です．また，Nuorium Optimizer のインストール先には全ての例がプロジェクトファイルとしてインストールされています．そちらも有効に活用してください．

1.1　例題の実行方法

本節では本例題集に記載されている例題の実行方法をまとめています．

第 2 章では動作する C++SIMPLE 形式のモデルが記載されています．まずはチュートリアル的に Nuorium にモデルを入力し実行させる方法を紹介します．次に手軽に実行を試していただける JSON からの実行方法を紹介します．

1.1.1　モデルを入力し実行する方法

Nuorium を起動してください．Nuorium はスタートメニューまたはデスクトップの Nuorium アイコンをダブルクリックすることで起動できます．

起動直後の Nuorium 上には newModel.smp という新規モデルのタブがあります．ここに例題集からモデルを直接入力するか，本例題集からコピー&ペーストで貼り付けます．

入力後にモデルを保存してください．[ファイル] メニューの [名前を付けて保存] を実行し，好きなフォルダーに好きな名前で保存してください．

モデルの実行にデータが必要な場合は，[ファイル] メニューの [新規作成] から適切なデータ形式のファイルを指定してください．例えば dat を指定します．すると，Nuorium に newData.dat というタブが追加されますので，そこにデータを入力 (本例題集からコピー&ペースト) してください．入力後はモデルと同様に [名前を付けて保存] によりデータを保存してください．

モデルと (必要な場合) データが揃いましたらモデルのタブをアクティブにしてから [実行] をクリックしてください．以上で，実行ができます．

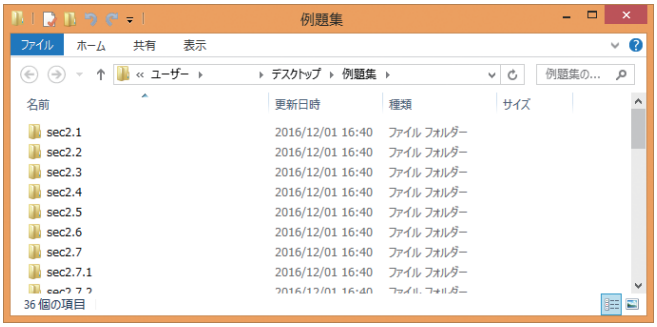
1.1.2　プロジェクトからの実行方法

Nuorium を起動してください．Nuorium はスタートメニューまたはデスクトップの Nuorium アイコンをダブルクリックすることで起動できます．

[最適化] メニューの [実行単位]-[SIMPLE サンプル] を実行してください．Nuorium Optimizer のインストール先の例題集があるフォルダーが表示されます．ここにある「例題集.zip」が本例題集に収録さ

れている実行単位を zip 形式で圧縮したものになります.

この zip ファイルを書き込み権限のあるフォルダーに展開してください. 展開すると「sec2.x(.y)」(x,y は数字) というフォルダーが多数作成されます. この「sec2.x(.y)」の x と y は本例題集の節番号, 項番号に対応しています. つまり,「sec2.1」は「2.1 配合問題」に対応するフォルダーであり,「sec2.13.3」は「2.13.3 仕事割当問題」に対応しているフォルダーになります.



例えば「2.1 配合問題」にある例題を実行させたい場合は, フォルダー「sec2.1」にある「sec2.1.json」というファイルを起動されている Nuorium の上にドラッグ&ドロップしてください. この操作により JSON に記述された実行単位が Nuorium に読み込まれます.

その後は, [実行] ボタンの右側にあるコンボボックスから目的の実行単位を選択して実行できます.

1.2 記号の説明

1.2.1 総和記号・総乗記号

総和記号 $\sum$ は和のとり方を指示する記号です.

次は, 添字 i を持つ x_i を x_1 から x_n まで和を取ることを表します.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

例えば $x_1 + x_2 + x_3$ は以下の様に表すことができます.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i$$

次は, 集合 I に属する添字 i をもつ x_i の和を取ることを表します.

$$\sum_{i \in I} x_i$$

例えば集合 $S = \{2, 3, 4\}$ に対して $x_2 + x_3 + x_4$ は以下の様に表すことができます.

$$\sum_{i \in S} x_i$$

1.2.2 全称記号

全称記号 $\forall$ は添字が集合全体に渡ることを表します.

例えば，集合 I の要素 i を添字に持つ変数 x_i があったとき，数理最適化問題において制約式を以下のように記述することがあります．

$$x_i \geq 0, \forall i \in I$$

上の式は「制約式 $x_i \geq 0$ が全ての i について成立する」ということを表現します．これは集合 $I = \{1, 2, 3\}$ とすると，以下の三つの制約式が成立することと同等です．

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_3 \geq 0$$

1.2.3 s.t.

数理最適化問題で制約条件を記述する際，制約式の冒頭に「subject to」あるいは省略して「s.t.」と記述されます．これは「〜を前提条件とする」を意味しています．

例えば，目的関数を x，制約式を $2x \leq 3$ とする数理最適化問題は以下の様に記述されます．

$$\begin{aligned} \min \quad & x \\ \text{s.t.} \quad & 2x \leq 3 \end{aligned}$$

1.3 数理最適化問題一覧

扱う問題の構成は以下の通りです．表における○は，それぞれの問題が，どのような種類の数理最適化問題に属するかを表しています．例えば，ナップサック問題は混合線形整数計画問題です．

LP は線形計画問題，MIP（MILP）は混合線形整数計画問題，QP は二次計画問題，NLP は非線形計画問題，SDP は半正定値計画問題，WCSP は重み付き制約充足問題，RCPSP は資源制約付きスケジューリング問題を意味します．

問題	LP	MIP	QP	NLP	SDP	WCSP	RCPSP
配合問題	○						
輸送問題	○						
多期間計画問題	○						
包絡分析法（DEA）モデル	○						
ナップサック問題		○					
集合被覆問題		○					
最大流問題	○						
最小費用流問題	○						
多品種流問題	○						
p メディアン問題		○					
p センター問題		○					
巡回セールスマン問題		○					
割当問題		○				○	
二次割当問題						○	
設備計画問題						○	
最小二乗問題			○				
ポートフォリオ最適化問題			○				
ロジスティック回帰モデル				○			
イールドカーブ推定問題				○			
格付け推移行列推定問題				○			
相関行列取得問題					○		
ロバストポートフォリオ最適化問題					○		
最大カット問題		○			○	○	
セミナー割当問題							○
ジョブショップスケジューリング問題							○

最後に，ご利用になられる環境（コンパイラ等）の違いにより，お手元で実行した際以下のような解が得られる可能性がございますのでご注意ください.

- 本例題集に記載した解と微小に異なる解
- （最適解が複数ある問題や，WCSP/RCPSP を適用した場合に関して）本例題集に記載した解と異なる解

第 2 章　例題の紹介

本章では，1 章で紹介した各種例題に対する問題の説明および，C++SIMPLE での記述例を紹介します．

なお，各例題の実行方法は 1.1 節を参照してください．また，Nuorium のプロジェクト形式を節，項の単位で提供をしています．プロジェクト形式については 1.1.2 項を参照してください．

2.1　配合問題

配合問題の例として，ここでは特定の組成を持つ合金を生成する問題を扱います．この他にも薬剤の調合や必要な栄養素を含む献立を考えるダイエット問題など配合問題として扱えるものは多岐にわたります．

例題

鉛，亜鉛，スズの構成比率が，それぞれ 30%，30%，40%となるような合金を，市販の合金を混ぜ合わせ，できるだけ安いコストで生成することを考えます．現在手に入れることができる市販の合金は 9 種類で，それらの構成比率と単位量あたりのコストは以下の通りです．

市販の合金	1	2	3	4	5	6	7	8	9
鉛（%）	20	50	30	30	30	60	40	10	10
亜鉛（%）	30	40	20	40	30	30	50	30	10
スズ（%）	50	10	50	30	40	10	10	60	80
コスト（$/lb）	7.3	6.9	7.3	7.5	7.6	6.0	5.8	4.3	4.1

所望の組成を持つ合金をコストを一番安く生成するには，市販の合金をどのように混ぜ合わせれば良いでしょうか．

この問題を Nuorium Optimizer で解くために定式化を行います．本例題は文献 [1] からの引用です．

まず，変数として市販の合金 1,2,3,...,9 の混合比率，つまり混ぜ合わせる割合を，それぞれ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9$ としましょう．

次に，最小化するべき目的関数は，各市販の合金について「単位量当たりのコスト」と「混合比率」の積の総和として表現することができます．

最後に制約条件です．まず，混合比率は負の値をとれませんので，各変数に対して非負制約が必要です．混合比率の総和は 1 ですので，その制約も加えます．また，生成する合金の組成についての制約は，鉛，亜鉛，スズに対して，各市販の合金についての「構成比率」と「混合比率」の積の総和が，それぞれ 30%，30%，40%と等しい，という形になります．

以上のことから，次のように定式化することができます.

変数	
x_1	市販の合金 1 の混合比率
x_2	市販の合金 2 の混合比率
x_3	市販の合金 3 の混合比率
x_4	市販の合金 4 の混合比率
x_5	市販の合金 5 の混合比率
x_6	市販の合金 6 の混合比率
x_7	市販の合金 7 の混合比率
x_8	市販の合金 8 の混合比率
x_9	市販の合金 9 の混合比率

目的関数（最小化）	
$7.3x_1 + 6.9x_2 + 7.3x_3 + 7.5x_4 + 7.6x_5 + 6.0x_6 + 5.8x_7 + 4.3x_8 + 4.1x_9$	総コスト

非負制約
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_3 \geq 0$
$x_4 \geq 0$
$x_5 \geq 0$
$x_6 \geq 0$
$x_7 \geq 0$
$x_8 \geq 0$
$x_9 \geq 0$

混合比率の制約
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 1$
$0.2x_1 + 0.5x_2 + 0.3x_3 + 0.3x_4 + 0.3x_5 + 0.6x_6 + 0.4x_7 + 0.1x_8 + 0.1x_9 = 0.3$
$0.3x_1 + 0.4x_2 + 0.2x_3 + 0.4x_4 + 0.3x_5 + 0.3x_6 + 0.5x_7 + 0.3x_8 + 0.1x_9 = 0.3$
$0.5x_1 + 0.1x_2 + 0.5x_3 + 0.3x_4 + 0.4x_5 + 0.1x_6 + 0.1x_7 + 0.6x_8 + 0.8x_9 = 0.4$

この問題は，目的関数，制約式全て線形なので，線形計画問題となります.

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります.

mixture1.smp

```
// 変数
Variable x1(name = "市販の合金１の混合比率");
Variable x2(name = "市販の合金２の混合比率");
Variable x3(name = "市販の合金３の混合比率");
Variable x4(name = "市販の合金４の混合比率");
Variable x5(name = "市販の合金５の混合比率");
Variable x6(name = "市販の合金６の混合比率");
Variable x7(name = "市販の合金７の混合比率");
Variable x8(name = "市販の合金８の混合比率");
Variable x9(name = "市販の合金９の混合比率");

// 目的関数
Objective z(name = "総コスト", type = minimize);
z = 7.3 * x1 + 6.9 * x2 + 7.3 * x3 + 7.5 * x4 + 7.6 * x5 + 6.0 * x6 + 5.8 * x7 + 4.3 *
x8 + 4.1 * x9;

// 非負制約
x1 >= 0;
x2 >= 0;
x3 >= 0;
x4 >= 0;
x5 >= 0;
x6 >= 0;
x7 >= 0;
x8 >= 0;
x9 >= 0;

// 混合比率の制約
x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7 + x8 + x9 == 1;
0.2 *x1 + 0.5 * x2 + 0.3 * x3 + 0.3 * x4 + 0.3 * x5 + 0.6 * x6 + 0.4 * x7 + 0.1 * x8 +
0.1 * x9 == 0.3;
0.3 *x1 + 0.4 * x2 + 0.2 * x3 + 0.4 * x4 + 0.3 * x5 + 0.3 * x6 + 0.5 * x7 + 0.3 * x8 +
0.1 * x9 == 0.3;
0.5 *x1 + 0.1 * x2 + 0.5 * x3 + 0.3 * x4 + 0.4 * x5 + 0.1 * x6 + 0.1 * x7 + 0.6 * x8 +
0.8 * x9 == 0.4;

// 求解
```

```
solve();


// 出力
z.val.print();
```

より汎用的に問題を定式化すると以下のようになります.

集合	
$Alloy = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	市販の合金の種類の集合
$Blend = \{Lead, Zinc, Tin\}$	構成金属の集合

定数	
$r_{ij}, i \in Alloy, j \in Blend$	市販の合金 i における構成金属 j の比率
$c_i, i \in Alloy$	市販の合金 i の単位量あたりのコスト
$b_j, j \in Blend$	構成金属 j の目標比率

変数	
$x_i, i \in Alloy$	市販の合金 i の混合比率

目的関数（最小化）	
$\sum_{i \in Alloy} c_i x_i$	総コスト

制約	
$x_i \geq 0, \forall i \in Alloy$	非負制約
$\sum_{i \in Alloy} x_i = 1$	比率の総和が 1 という制約
$\sum_{i \in Alloy} r_{ij} x_i = b_j, \forall j \in Blend$	混合比の制約

次に，定数（構成比率，コスト，目標比率）をデータファイルから与える C++SIMPLE モデルを示します．このようにモデルとデータを分離することにより，市販の合金の数や構成金属の種類の数が変わったとしてもデータファイルを変更するだけで対応できるようになります.

mixture2.smp

```
// 集合と添字
Set Alloy(name = "市販の合金集合");
Element i(set = Alloy);
Set Blend(name = "構成金属集合");
Element j(set = Blend);
```

```
// パラメータ
Parameter r(name = "構成比率", index = (i, j));
Parameter c(name = "コスト", index = i);
Parameter b(name = "目標比率", index = j);

// 変数
Variable x(name = "混合比率", index = i);

// 目的関数
Objective z(name = "総コスト", type = minimize);
z = sum(c[i] * x[i], i);

// 非負制約
x[i] >= 0;

// 混合比の制約
sum(x[i], i) == 1;
sum(r[i, j] * x[i], i) == b[j];

// 求解
solve();

// 出力
z.val.print();
x.val.print();
```

データファイル（.dat 形式）は以下のようになります.

data2.dat

```
構成比率 =
[1, Lead] 0.2 [1, Zinc] 0.3 [1, Tin] 0.5
[2, Lead] 0.5 [2, Zinc] 0.4 [2, Tin] 0.1
[3, Lead] 0.3 [3, Zinc] 0.2 [3, Tin] 0.5
[4, Lead] 0.3 [4, Zinc] 0.4 [4, Tin] 0.3
[5, Lead] 0.3 [5, Zinc] 0.3 [5, Tin] 0.4
[6, Lead] 0.6 [6, Zinc] 0.3 [6, Tin] 0.1
[7, Lead] 0.4 [7, Zinc] 0.5 [7, Tin] 0.1
[8, Lead] 0.1 [8, Zinc] 0.3 [8, Tin] 0.6
[9, Lead] 0.1 [9, Zinc] 0.1 [9, Tin] 0.8
```

```
;

コスト =
[1] 7.3
[2] 6.9
[3] 7.3
[4] 7.5
[5] 7.6
[6] 6.0
[7] 5.8
[8] 4.3
[9] 4.1
;

目標比率 =
[Lead] 0.3
[Zinc] 0.3
[ Tin] 0.4
;
```

このモデルを実行すると，市販の合金 6 を 40%，市販の合金 8 を 60%混ぜ合わせるのが最適で，そのときの総コストは 4.98 であることがわかります．

2.2 輸送問題

輸送問題は複数の供給地から複数の需要地への物の流れ方を決める問題ということができます．供給地と需要地をノード，物の流れる経路をアークとすれば，輸送問題はネットワークによって表現できる問題の一種と捉えることができます．輸送問題に対する定式化の方法は他のネットワークによって表現できる問題にも応用できます．

■■例題

ある配送業者は二つの工場 1，2 から三つの店舗 a，b，c への製品の輸送を請け負っているとします．各工場，店舗について，それぞれ供給可能量と需要量が決められており，それらを満たしつつ，最もコストがかからない製品の運び方をどのように決定すればよいでしょうか．各工場の供給可能量，各店舗の需要量，単位量あたりの輸送コストは以下の通りです．

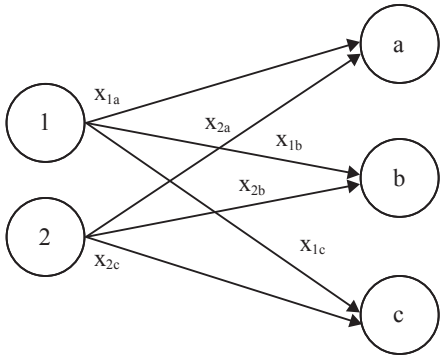
工場	供給可能量	店舗	需要量
1	250	a	200
2	450	b	200

	c	200

単位量あたりの輸送コスト

	a	b	c
1	3.4	2.2	2.9
2	3.4	2.4	2.5

この問題を Nuorium Optimizer で解くために定式化を行います．本例題は文献 [1] からの引用です．
まず，変数として各工場から各店舗への輸送量を以下の図のように設定します．



次に，目的関数は，工場から店舗への各経路について「単位量あたりの輸送コスト」と「輸送量」の積の総和として表現することができます．

最後に制約条件です．輸送量は負にはなり得ないので，各変数に対して非負制約が必要です．さらに，各工場について工場からの輸送量の和が供給可能量以下である，各店舗について店舗への輸送量の和が需要量と等しい，という制約が加わります．

以上のことから，次のように定式化することができます．

変数	
x_{1a}	工場 1 から店舗 a への輸送量
x_{1b}	工場 1 から店舗 b への輸送量
x_{1c}	工場 1 から店舗 c への輸送量
x_{2a}	工場 2 から店舗 a への輸送量
x_{2b}	工場 2 から店舗 b への輸送量
x_{2c}	工場 2 から店舗 c への輸送量

目的関数（最小化）	
$3.4x_{1a} + 2.2x_{1b} + 2.9x_{1c} + 3.4x_{2a} + 2.4x_{2b} + 2.5x_{2c}$	総コスト

非負制約	
$x_{1a} \geq 0$	
$x_{1b} \geq 0$	
$x_{1c} \geq 0$	
$x_{2a} \geq 0$	
$x_{2b} \geq 0$	
$x_{2c} \geq 0$	

工場の生産量の制約	
$x_{1a} + x_{1b} + x_{1c} \leq 250$	工場 1 について
$x_{2a} + x_{2b} + x_{2c} \leq 450$	工場 2 について

店舗の需要量の制約	
$x_{1a} + x_{2a} = 200$	店舗 a について
$x_{1b} + x_{2b} = 200$	店舗 b について
$x_{1c} + x_{2c} = 200$	店舗 c について

ネットワークで表現できる問題の多くは，上で見てきたように各アークに対して変数を定義し，各ノードについて制約をたてることによって定式化されます.

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります.

transport1.smp

```
// 変数
Variable x1a(name = "工場 1 から店舗 a への輸送量");
Variable x1b(name = "工場 1 から店舗 b への輸送量");
Variable x1c(name = "工場 1 から店舗 c への輸送量");
Variable x2a(name = "工場 2 から店舗 a への輸送量");
Variable x2b(name = "工場 2 から店舗 b への輸送量");
Variable x2c(name = "工場 2 から店舗 c への輸送量");

// 非負制約
x1a >= 0;
x1b >= 0;
x1c >= 0;
x2a >= 0;
x2b >= 0;
x2c >= 0;
```

```
// 工場の生産量の制約
x1a + x1b + x1c <= 250;
x2a + x2b + x2c <= 450;

// 店舗の需要量の制約
x1a + x2a == 200;
x1b + x2b == 200;
x1c + x2c == 200;

// 目的関数
Objective z(name = "総コスト", type = minimize);
z = 3.4 * x1a + 2.2 * x1b + 2.9 * x1c + 3.4 * x2a + 2.4 * x2b + 2.5 * x2c;

// 求解
solve();

// 出力
z.val.print();
```

より汎用的に問題を定式化すると以下のようになります.

集合	
$Cannery = \{1, 2\}$	工場
$Warehouse = \{a, b, c\}$	店舗

定数	
$upper_i, i \in Cannery$	工場 i の供給可能量
$demand_j, j \in Warehouse$	店舗 j の需要量
$c_{ij}, i \in Cannery, j \in Warehouse$	工場 i から店舗 j への単位量あたりの輸送コスト

変数	
$x_{ij}, i \in Cannery, j \in Warehouse$	工場 i から店舗 j への輸送量

目的関数（最小化）	
$\sum_{i \in Cannery} \sum_{j \in Warehouse} c_{ij} x_{ij}$	総コスト

制約	
$x_{ij} \geq 0, \forall i \in Cannery, \forall j \in Warehouse$	非負制約

$\sum_{j \in Warehouse} x_{ij} \leq upper_i, \forall i \in Cannery$	工場の生産量の制約
$\sum_{i \in Cannery} x_{ij} = demand_j, \forall j \in Warehouse$	店舗の需要量の制約

次に，入力データとモデルを分離したC++SIMPLEモデルを示します.

transport2.smp

```
// 集合と添字
Set Cannery(name = "工場");
Element i(set = Cannery);
Set Warehouse(name = "店舗");
Element j(set = Warehouse);

// パラメータ
Parameter upper(name = "供給可能量", index = i);
Parameter demand(name = "需要量", index = j);
Parameter cost(name = "輸送コスト", index = (i, j));

// 変数
Variable x(name = "輸送量", index = (i, j));

// 目的関数
Objective z(name = "総コスト", type = minimize);
z = sum(cost[i, j] * x[i, j], (i, j));

// 非負制約
x[i, j] >= 0;

// 工場の生産量の制約
sum(x[i, j], j) <= upper[i];

// 店舗の需要量の制約
sum(x[i, j], i) == demand[j];

// 求解
solve();

// 出力
```

```
z.val.print();
x.val.print();
```

データファイル（.dat 形式）は以下のようになります.

data2.dat

```
供給可能量 =
[1] 250
[2] 450
;

需要量 =
[a] 200
[b] 200
[c] 200
;

輸送コスト =
[1, a] 3.4
[1, b] 2.2
[1, c] 2.9
[2, a] 3.4
[2, b] 2.4
[2, c] 2.5
;
```

このモデルを実行すると，以下のような結果が得られます.

```
総コスト=1620
輸送量 [1,"a"]=29.566
輸送量 [1,"b"]=200
輸送量 [1,"c"]=1.10617e-06
輸送量 [2,"a"]=170.434
輸送量 [2,"b"]=2.21238e-06
輸送量 [2,"c"]=200
```

2.3 多期間計画問題

多期間計画問題とは，多期間にわたり期間ごとに意思決定をする問題のことをいいます．多期間計画問題を定式化する場合は，期間ごとに変数を定義するのが一般的です.

例題

2 種類の原料 A，B を加工して 2 種類の製品 I, II を生産している工場が，向こう 3 ヶ月間の生産計画を立てようとしています．各製品を 1 単位生産するために必要な原料の使用量，各製品の生産／在庫コスト，各製品の月ごとの出荷量，各原料の月ごとの利用可能量は以下のように与えられています．

原料使用量			生産／在庫コスト		
	I	II		I	II
A	2	7	生産	75	50
B	5	3	在庫	8	7

製品の出荷量			原料の利用可能量		
	I	II		A	B
1	30	20	1	920	790
2	60	50	2	750	600
3	80	90	3	500	480

各月に出荷する製品をその月中に全て生産できるとは限らないので，前の月に生産した製品を在庫として保管して来月に出荷することも考えられます．このような状況の下で，要求された製品の出荷量と与えられた原料の利用可能量の制約を満たしつつ総コストを最小にするには，各月における各製品の生産量と在庫量をどのように決定すればよいでしょうか．

この問題を Nuorium Optimizer で解くために定式化を行います．本例題は文献 [2] からの引用です．

まず，変数として各月における製品 I，II の生産量をそれぞれ $x_{\mathrm{I},1}, x_{\mathrm{II},1}, x_{\mathrm{I},2}, x_{\mathrm{II},2}, x_{\mathrm{I},3}, x_{\mathrm{II},3}$ とし，在庫量をそれぞれ $y_{\mathrm{I},1}, y_{\mathrm{II},1}, y_{\mathrm{I},2}, y_{\mathrm{II},2}$ としましょう．

次に，最小化するべき目的関数は，各生産量／在庫量とその単位量あたりのコストとの積の総和として表現することができます．

最後に制約条件です．まず，各変数に対して非負制約が必要です．次に，1 ヶ月に利用できる原料が決められているので，各月ごとに各原料に関する制約が必要です．さらに，各製品に対して在庫量は次の月に持ち越せますので，それを踏まえた出荷量の制約を加えます．

以上のことから，次のように定式化することができます．

変数	
$x_{\mathrm{I},1}$	製品 I の 1 ヶ月目の生産量
$x_{\mathrm{II},1}$	製品 II の 1 ヶ月目の生産量
$x_{\mathrm{I},2}$	製品 I の 2 ヶ月目の生産量
$x_{\mathrm{II},2}$	製品 II の 2 ヶ月目の生産量
$x_{\mathrm{I},3}$	製品 I の 3 ヶ月目の生産量
$x_{\mathrm{II},3}$	製品 II の 3 ヶ月目の生産量

$y_{I,1}$	製品 I の 1 ヶ月目の在庫量
$y_{II,1}$	製品 II の 1 ヶ月目の在庫量
$y_{I,2}$	製品 I の 2 ヶ月目の在庫量
$y_{II,2}$	製品 II の 2 ヶ月目の在庫量

目的関数（最小化）

$75x_{I,1} + 50x_{II,1} + 8y_{I,1} + 7y_{II,1} + 75x_{I,2} + 50x_{II,2} + 8y_{I,2} + 7y_{II,2} + 75x_{I,3} + 50x_{II,3}$	総コスト

非負制約

$x_{I,1} \geq 0, x_{II,1} \geq 0$	
$x_{I,2} \geq 0, x_{II,2} \geq 0$	
$x_{I,3} \geq 0, x_{II,3} \geq 0$	
$y_{I,1} \geq 0, y_{II,1} \geq 0$	
$y_{I,2} \geq 0, y_{II,2} \geq 0$	

原料の制約

$2x_{I,1} + 7x_{II,1} \leq 920$	原料 A について（1 ヶ月目）
$5x_{I,1} + 3x_{II,1} \leq 790$	原料 B について（1 ヶ月目）
$2x_{I,2} + 7x_{II,2} \leq 750$	原料 A について（2 ヶ月目）
$5x_{I,2} + 3x_{II,2} \leq 600$	原料 B について（2 ヶ月目）
$2x_{I,3} + 7x_{II,3} \leq 500$	原料 A について（3 ヶ月目）
$5x_{I,3} + 3x_{II,3} \leq 480$	原料 B について（3 ヶ月目）

出荷量の制約

$x_{I,1} - y_{I,1} = 30$	製品 I について（1 ヶ月目）
$x_{II,1} - y_{II,1} = 20$	製品 II について（1 ヶ月目）
$x_{I,2} + y_{I,1} - y_{I,2} = 60$	製品 I について（2 ヶ月目）
$x_{II,2} + y_{II,1} - y_{II,2} = 50$	製品 II について（2 ヶ月目）
$x_{I,3} + y_{I,2} = 80$	製品 I について（3 ヶ月目）
$x_{II,3} + y_{II,2} = 90$	製品 II について（3 ヶ月目）

問題を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります.

multiplan1.smp

```
// 変数
Variable x11(name = "製品 I の 1 ヶ月目の生産量");
Variable x21(name = "製品 II の 1 ヶ月目の生産量");
```

```
Variable x12(name = "製品 I の 2 ヶ月目の生産量");
Variable x22(name = "製品 II の 2 ヶ月目の生産量");
Variable x13(name = "製品 I の 3 ヶ月目の生産量");
Variable x23(name = "製品 II の 3 ヶ月目の生産量");
Variable y11(name = "製品 I の 1 ヶ月目の在庫量");
Variable y21(name = "製品 II の 1 ヶ月目の在庫量");
Variable y12(name = "製品 I の 2 ヶ月目の在庫量");
Variable y22(name = "製品 II の 2 ヶ月目の在庫量");

// 目的関数
Objective z(name = "総コスト", type = minimize);
z = 75 * x11 + 50 * x21 + 8 * y11 + 7 * y21 + 75 * x12 +
    50 * x22 + 8 * y12 + 7 * y22 + 75 * x13 + 50 * x23;

// 非負制約
x11 >= 0; x21 >= 0;
x12 >= 0; x22 >= 0;
x13 >= 0; x23 >= 0;
y11 >= 0; y21 >= 0;
y12 >= 0; y22 >= 0;

// 原料の制約
2 * x11 + 7 * x21 <= 920;
5 * x11 + 3 * x21 <= 790;
2 * x12 + 7 * x22 <= 750;
5 * x12 + 3 * x22 <= 600;
2 * x13 + 7 * x23 <= 500;
5 * x13 + 3 * x23 <= 480;

// 出荷量の制約
x11       - y11 == 30;
x21       - y21 == 20;
x12 + y11 - y12 == 60;
x22 + y21 - y22 == 50;
x13 + y12       == 80;
x23 + y22       == 90;

// 求解
```

```
solve();


// 出力
z.val.print();
```

より汎用的に問題を定式化すると以下のようになります.

集合	
$Product = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$	製品
$Material = \{A, B\}$	原料
$Period = \{1, 2, 3\}$	期間

定数	
$use_{i,j}, i \in Product, j \in Material$	製品 i を生産するのに必要な原料 j の使用量
$out_{i,t}, i \in Product, t \in Period$	t ヶ月目の製品 i の出荷量
$upper_{j,t}, j \in Material, t \in Period$	t ヶ月目の原料 j の利用可能量
$costp_i, i \in Product$	製品 i の生産コスト
$costi_i, i \in Product$	製品 i の在庫コスト

変数	
$x_{i,t}, i \in Product, t \in Period$	製品 i の t ヶ月目の生産量
$y_{i,t}, i \in Product, t \in Period$	製品 i の t ヶ月目の在庫量

目的関数（最小化）	
$\sum_{t \in Period} \sum_{i \in Product} (costp_i x_{i,t} + costi_i y_{i,t})$	総コスト

制約	
$x_{i,t} \geq 0, \forall i \in Product, \forall t \in Period$	生産量の非負制約
$y_{i,t} \geq 0, \forall i \in Product, \forall t \in Period$	在庫量の非負制約
$\sum_{i \in Product} use_{i,j} x_{i,t} \leq upper_{j,t}, \forall j \in Material, \forall t \in Period$	原料の使用量の制約
$x_{i,1} - y_{i,1} = out_{i,1}$	1 ヶ月目の出荷量について
$x_{i,2} + y_{i,1} - y_{i,2} = out_{i,2}$	2 ヶ月目の出荷量について
$x_{i,3} + y_{i,2} = out_{i,3}$	3 ヶ月目の出荷量について

次に，定数をデータファイルから与える場合のモデルを示します.

multiplan2.smp

```
// 集合と添字
Set Product(name = "製品");
Element i(set = Product);
Set Material(name = "原料");
Element j(set = Material);
Set Period(name = "期間");
Element t(set = Period);

// パラメータ
Parameter use(name = "原料使用量", index = (i, j));
Parameter out(name = "出荷量", index = (i, t));
Parameter upper(name = "利用可能量", index = (j, t));
Parameter costp(name = "生産コスト", index = i);
Parameter costi(name = "在庫コスト", index = i);

// 変数
Variable x(name = "生産量", index = (i, t));
Variable y(name = "在庫量", index = (i, t));

// 目的関数
Objective z(name = "総コスト", type = minimize);
z = sum(costp[i] * x[i, t] + costi[i] * y[i, t], (i, t));

// 非負制約
x[i, t] >= 0;
y[i, t] >= 0;

// 原料の制約
sum(use[i, j] * x[i, t], i) <= upper[j, t];

// 出荷量の制約
x[i, t]                - y[i, t] == out[i, t], t == 1;
x[i, t] + y[i, t - 1] - y[i, t] == out[i, t], t == 2;
x[i, t] + y[i, t - 1]           == out[i, t], t == 3;

// 求解
solve();
```

```
// 出力
z.val.print();
x.val.print();
y.val.print();
```

データファイル（.dat 形式）は以下のようになります.

data2.dat

```
原料使用量 =
[I, A] 2
[I, B] 5
[II, A] 7
[II, B] 3
;

出荷量 =
[I, 1] 30
[I, 2] 60
[I, 3] 80
[II, 1] 20
[II, 2] 50
[II, 3] 90
;

利用可能量 =
[A, 1] 920
[A, 2] 750
[A, 3] 500
[B, 1] 790
[B, 2] 600
[B, 3] 480
;

生産コスト =
[I] 75
[II] 50
;

在庫コスト =
```

```
[I] 8
[II] 7
;
```

このモデルを実行すると，以下のような結果が得られます.

```
総コスト=21199.2
生産量 ["I",1] = 38
生産量 ["I",2] = 67.8621
生産量 ["I",3] = 64.1379
生産量 ["II",1] = 20
生産量 ["II",2] = 86.8966
生産量 ["II",3] = 53.1034
在庫量 ["I",1] = 8
在庫量 ["I",2] = 15.8621
在庫量 ["I",3] = 1.44466e-08
在庫量 ["II",1] = 5.25339e-08
在庫量 ["II",2] = 36.8966
在庫量 ["II",3] = 1.65103e-08
```

なお，一つ注意点があります.

上記の求解実行において，在庫量に関する添字付きの変数を 3 ヶ月目についても用意しています（在庫量 ["I", 3]，在庫量 ["II", 3]）．これらは，この章のはじめに定式化した際には，用意していなかった変数です.

しかし，これらの変数について非負制約以外の制約がないこと，および目的関数（総コスト）は最小化についてのものであること，この両者から，在庫量 ["I", 3]，在庫量 ["II", 3] の求解結果は上記のようにほぼ 0 と等しい値になります.

従って在庫量 ["I", 3]，在庫量 ["II", 3] を定義しても，一般性は失われません.

最後に，これまでのモデルは出荷量の制約について 3 ヶ月分の計画であるということを利用した記述となっていました．このため，例えば向こう 6 ヶ月の生産計画を立てようとした場合モデルの修正が必要となります．ここでは，順序集合 OrderedSet を利用し，計画期間が変化した場合でも対応できるようにしたモデルを紹介します.

これまでのモデルの「2 ヶ月目の出荷量について」という制約条件は，最初の月と最後の月以外の月に対して課すことになります．このため，向こう T ヶ月の生産計画を立てるとした場合の定式化は以下のようになります.

集合	
$Product = \{\mathrm{I}, \mathrm{II}\}$	製品
$Material = \{A, B\}$	原料
$Period = \{1, ..., T\}$	期間（順序集合）

定数

$use_{i,j}, i \in Product, j \in Material$	製品 i を生産するのに必要な原料 j の使用量
$out_{i,t}, i \in Product, t \in Period$	t ヶ月目の製品 i の出荷量
$upper_{j,t}, j \in Material, t \in Period$	t ヶ月目の原料 j の利用可能量
$costp_i, i \in Product$	製品 i の生産コスト
$costi_i, i \in Product$	製品 i の在庫コスト

変数

$x_{i,t}, i \in Product, t \in Period$	製品 i の t ヶ月目の生産量
$y_{i,t}, i \in Product, t \in Period$	製品 i の t ヶ月目の在庫量

目的関数（最小化）

$\sum_{t \in Period} \sum_{i \in Product} (costp_i x_{i,t} + costi_i y_{i,t})$	総コスト

制約

$x_{i,t} \geq 0, \forall i \in Product, \forall t \in Period$	生産量の非負制約
$y_{i,t} \geq 0, \forall i \in Product, \forall t \in Period$	在庫量の非負制約
$\sum_{i \in Product} use_{i,j} x_{it} \leq upper_{j,t}, \forall j \in Material, \forall t \in Period$	原料の使用量の制約
$x_{i,1} - y_{i,1} = out_{i,1}$	1 ヶ月目の出荷量について
$x_{i,t} + y_{i,t-1} - y_{i,t} = out_{i,t}, \forall t \in \{2, \cdots, T-1\}$	t ヶ月目の出荷量について（t は 2 から T-1 まで）
$x_{i,T} + y_{i,T-1} = out_{i,T}$	T ヶ月目の出荷量について

順序集合を利用した場合のモデルとデータファイル（.dat 形式）はそれぞれ以下のようになります．なお，モデルでは 1 ヶ月目と T ヶ月目をそれぞれ `Period.first()`（順序集合 `Period` の最初の要素），`Period.last()`（順序集合 `Period` の最後の要素）と表現しています．

multiplan3.smp

```
// 集合と添字
Set Product(name = "製品");
Element i(set = Product);
Set Material(name = "原料");
Element j(set = Material);
OrderedSet Period(name = "期間");
Element t(set = Period);

// パラメータ
Parameter use(name = "原料使用量", index = (i, j));
```

```
Parameter out(name = "出荷量", index = (i, t));
Parameter upper(name = "利用可能量", index = (j, t));
Parameter costp(name = "生産コスト", index = i);
Parameter costi(name = "在庫コスト", index = i);

// 変数
Variable x(name = "生産量", index = (i, t));
Variable y(name = "在庫量", index = (i, t));

// 目的関数
Objective z(name = "総コスト", type = minimize);
z = sum(costp[i] * x[i, t] + costi[i] * y[i, t], (i, t));

// 非負制約
x[i, t] >= 0;
y[i, t] >= 0;

// 原料の制約
sum(use[i, j] * x[i, t], i) <= upper[j, t];

// 出荷量の制約
x[i, t]                          - y[i, t] == out[i, t], t == Period.first();
x[i, t] + y[i, Period.prev(t)] - y[i, t] == out[i, t], t != Period.first(), t !=
Period.last();
x[i, t] + y[i, Period.prev(t)]           == out[i, t], t == Period.last();

// 求解
solve();

// 出力
z.val.print();
x.val.print();
y.val.print();
```

data3.dat

```
期間 = 1 .. 3;

原料使用量 =
```

```
[I, A] 2
[I, B] 5
[II, A] 7
[II, B] 3
;

出荷量 =
[I, 2] 60
[I, 3] 80
[II, 1] 20
[II, 2] 50
[II, 3] 90
[I, 1] 30
;

利用可能量 =
[A, 1] 920
[A, 2] 750
[A, 3] 500
[B, 1] 790
[B, 2] 600
[B, 3] 480
;

生産コスト =
[I] 75
[II] 50
;

在庫コスト =
[I] 8
[II] 7
;
```

2.4 包絡分析法（DEA）モデル

包絡分析法（DEA；Data Envelopment Analysis）とは，複数の企業体の相対的な効率性を測定する方法で，評価対象の具体例としては，銀行・病院があげられます.

以下の例題では，チェーン展開している 6 店舗に対して，DEA に基づいた効率性の評価を行います．なお，本節では [3] を参考文献としています．

例題

ある会社は，以下の 6 店舗を抱えている．

店舗番号	1	2	3	4	5	6
店員数	5	10	20	20	30	50
稼働時間	24	12	12	24	12	12
売上	2	6	10	12	12	20

各店舗が，全店舗に対して相対的に効率的であるかどうかを判定せよ．

この問題の定式化は次のようになります．

集合	
I	入力項目集合
J	出力項目集合
K	店舗集合
$\overline{K}$	対象店舗（単一要素からなる集合）
定数	
$inD_{k,i}, k \in K, i \in I$	入力データ
$outD_{k,j}, k \in K, j \in J$	出力データ
変数	
$inW_i, i \in I$	入力項目に対する重み
$outW_j, j \in J$	出力項目に対する重み
目的関数（最大化）	
$\sum_{\overline{k},j} outD_{\overline{k},j} outW_j$	対象店舗に対する出力
制約式	
$\sum_i inD_{\overline{k},i} inW_i = 1, \forall \overline{k} \in \overline{K}$	対象店舗の入力条件
$\sum_j outD_{k,j} outW_j \leq \sum_i inD_{k,i} inW_i, \forall k \in K$	全店舗に対する入出力条件
$0 \leq inW_i, \forall i \in I$	重みの非負条件
$0 \leq outW_j, \forall j \in J$	

以下で，本問題の定式化の説明を行います．

DEA では，本例題の店舗のような分析対象を DMU（Decision Making Unit）と呼びます．全ての DMU を一度に評価することは困難なため，店舗集合 K に属するある店舗 $\overline{k} \in \overline{K} \subset K$ に着目した問題を考えます．

対象とする問題は，効率を最大化するような問題です．この効率 $f_{\overline{k}}$ を以下で定義することとします．

$$f_{\overline{k}} = \frac{\sum_j outD_{\overline{k},j} outW_j}{\sum_i inD_{\overline{k},i} inW_i}$$

即ち，対象店舗 $\overline{k}$ に対する，(総出力/総入力) を効率と定め，これを最大化するような問題を扱います．なお，この問題の変数となる各入出力項目に対する重みは，各店舗共通で与えられるものとします．制約条件としては，任意の店舗に関して，(総出力/総入力) が 1 以下になるという条件が必要です．即ち，

$$\frac{\sum_j outD_{k,j} outW_j}{\sum_i inD_{k,i} inW_i} \leq 1, \forall k \in K$$

となります．また，各入出力項目に対する重みの非負制約も考慮する必要があります．なお，この問題は目的関数・制約式ともに分数式で表わされる分数計画問題となります．これらの分数関数の分母は正であるため，制約式は両辺に分母部分をかけても一般性は失われなく，また目的関数 $f_{\overline{k}}$ についても，分母部分を 1 と等価であるという制約式で表わして，分子部分のみを目的関数としても一般性は失われません．

このようにして，等価な線形計画問題に置き換えた問題の定式化がはじめに示したものとなります．

以上が，本問題に対する定式化の説明です．

この問題を C++SIMPLE で記述すると，以下のようになります．

DEA.smp

```
// 集合と添字
Set I(name = "入力項目集合");
Element i(set = I);
Set J(name = "出力項目集合");
Element j(set = J);
Set K(name = "店舗集合");
Element k(set = K);
Set Kbar(name = "対象店舗", superSet = K);
Element kbar(set = Kbar);

/// パラメータ
Parameter inD(name = "入力データ", index = (k, i));
Parameter outD(name = "出力データ", index = (k, j));

// 変数
Variable inW(name = "inW", index = i);   // 入力項目に対する重み
```

```
Variable outW(name = "outW", index = j); // 出力

// 目的関数
Objective f(name = "f", type = maximize);
f = sum(outD[kbar, j] * outW[j], (kbar, j));

// 非負制約
0 <= inW[i];
0 <= outW[j];

// 制約式
sum(inD[kbar, i] * inW[i], i) == 1;
sum(outD[k, j] * outW[j], j) <= sum(inD[k, i] * inW[i], i);

// 求解
options.method = "simplex"; // 単体法の利用
solve();

// 結果出力
f.val.print();
inW.val.print();
outW.val.print();
```

入力データとしては以下の 3 種類（csv ファイル：2 種類，dat ファイル：1 種類）を用意する必要があります．

inD.csv

```
入力データ，店員数，稼働時間
1，5，24
2，10，12
3，20，12
4，20，24
5，30，12
6，50，12
```

outD.csv

```
出力データ，売上
1，2
2，6
3，10
4，12
5，12
6，20
```

Kbar.dat

```
対象店舗 = 1;
```

対象店舗（店舗番号：1〜6）を Kbar.dat において逐次変化させて解いた結果を以下の表にまとめます．なお，一部結果は小数点以下第四位を四捨五入した値で表わしています．

店舗番号		1	2	3	4	5	6
目的関数値		0.667	1	1	1	0.9	1
入力項目	重み（店員数）	0.2	0.067	0.04	0.033	0.025	0.017
	重み（稼働時間）	0	0.028	0.017	0.014	0.021	0.014
出力項目	重み（売上）	0.333	0.167	0.1	0.083	0.075	0.05

目的関数値が 1 となる店舗（店舗番号：2，3，4，6）は効率的であるといえます．一方，1 より小さな値となる店舗（店舗番号：1，5）は，各種制約を満たすどのような重みを選択しても効率が 1 になりえないということで，非効率であるということになります．

非効率な店舗に関しては，非効率となっている原因を形成している店舗集合を参照集合として導きだすことも可能です．詳細については，[4] を参照ください．

2.5 ナップサック問題

ナップサック問題は，ナップサックの中にいくつかの品物を詰め込み入れた品物の総価値を最大にするという問題です．ただし，ナップサックと品物にはそれぞれ容量やサイズが与えられていて，入れた品物のサイズの総和がナップサックの容量を超えてはいけないという条件があります．この問題は，組合せ最適化問題の代表的な例の一つとしてよく知られていて，プロジェクトの選択や物資の購入などの問題に応用されています．以下は，整数ナップサック問題と呼ばれるものです．なお，0-1 ナックサック問題につきましては，本節の最後で紹介します．

例題

容量 65 のナップサックに次の表にある品物を詰め込むことにします．この時，詰め込んだ品物の総価値を最大にするためには何をいくつ詰め込むと良いでしょうか．ただし，同じ品物を何個詰め込んでも良いものとします．

品物	1 個あたりの価値	1 個あたりのサイズ
缶コーヒー	120	10
水入りペットボトル	130	12
バナナ	80	7
りんご	100	9
おにぎり	250	21
パン	185	16

まず，変数は各品物を詰め込む個数です．よって，この変数は整数値しか取らないということになります．ただし，「-1 個詰め込む」というようなありえない答えを排除する必要があります．このため，各変数は 0 以上の値しか取らないということを制約条件として明示しておく必要があります．なお，「0 個詰め込む」は「その品物を詰め込まない」と解釈します．

次に，最大化することになる目的関数は詰め込んだものの総価値です．これは，各品物について「1

個あたりの価値」と「その品物を詰め込んだ個数」の積を求め，その総和を取ることで表現できます．

制約条件は，先ほど述べた変数に関するものの他に，詰め込んだ品物のサイズの総和がナップサックの容量を超えないというものがあります．目的関数の時と同様に考えると，各品物に関する「1 個あたりのサイズ」と「その品物を詰め込んだ個数」の積の総和をとると詰め込んだ品物のサイズの総和が得られます．よって，この総和がナップサックの容量である 65 を超えないということを式で表せばよいことになります．

以上のことから，この例題は次のように定式化することが出来ました．

整数変数	
$coffee$	缶コーヒーの個数
$water$	水入りペットボトルの個数
$banana$	バナナの個数
$apple$	りんごの個数
$rice\_ball$	おにぎりの個数
$bread$	パンの個数

目的関数（最大化）	
$120coffee + 130water + 80banana + 100apple + 250rice\_ball + 185bread$	総価値を最大化する

制約条件	
$10coffee + 12water + 7banana + 9apple + 21rice\_ball + 16bread \leq 65$	容量に関する制約
$coffee \geq 0$	缶コーヒーは 0 個以上詰め込む
$water \geq 0$	水入りペットボトルは 0 個以上詰め込む
$banana \geq 0$	バナナは 0 個以上詰め込む
$apple \geq 0$	りんごは 0 個以上詰め込む
$rice\_ball \geq 0$	おにぎりは 0 個以上詰め込む
$bread \geq 0$	パンは 0 個以上詰め込む

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると次のようになります．

knapsack1.smp

```
// 整数変数を宣言する
IntegerVariable coffee(name = "缶コーヒーの個数");
IntegerVariable water(name = "水入りペットボトルの個数");
IntegerVariable banana(name = "バナナの個数");
IntegerVariable apple(name = "りんごの個数");
IntegerVariable rice_ball(name = "おにぎりの個数");
```

```
IntegerVariable bread(name = "パンの個数");

// 総価値を最大化する
Objective total_value(name = "総価値", type = maximize);
total_value = 120 * coffee + 130 * water + 80 * banana + 100 * apple +
              250 * rice_ball + 185 * bread;

// 容量に関する制約
10 * coffee + 12 * water + 7 * banana + 9 * apple + 21 * rice_ball + 16 * bread <= 65;

// 各品物は 0 個以上詰め込む
coffee >= 0;
water >= 0;
banana >= 0;
apple >= 0;
rice_ball >= 0;
bread >= 0;

// 求解し結果を出力する
solve();
coffee.val.print();
water.val.print();
banana.val.print();
apple.val.print();
rice_ball.val.print();
bread.val.print();
total_value.val.print();
```

このモデルを Nuorium Optimizer で実行すると，最後に

```
缶コーヒーの個数=3
水入りペットボトルの個数=0
バナナの個数=2
りんごの個数=0
おにぎりの個数=1
パンの個数=0
総価値=770
```

という表示がされます．そして，この表示から「缶コーヒーを 3 個，バナナを 2 個，そしておにぎりを 1 個詰め込むと良い」というこの例題の答えを確認できます．

ところで，このモデルについて品物の種類などを変更したい場合 C++SIMPLE での記述を修正する箇所が多く大変な手間がかかってしまいます．この対策として，ナップサックの容量，品物の価値および品物のサイズを別に用意した dat ファイルから与えることにします．このようにすることで，C++SIMPLE での記述が汎用的なものになり，品物の種類が変わったとしても dat ファイルの変更のみで対応できるようになります．そのために，ここでは「品物の集合」という概念を導入します．すると定式化は次のように書き直すことができます．

集合	
$Object$ = {缶コーヒー, 水入りペットボトル, バナナ, りんご, おにぎり, パン}	品物の集合

整数変数	
$quantity_i, i \in Object$	品物 i を詰め込む個数

定数	
$capacity$	ナップサックの容量
$value_i, i \in Object$	品物 i の 1 個あたりの価値
$weight_i, i \in Object$	品物 i の 1 個あたりのサイズ

目的関数（最大化）	
$\sum_{i \in Object} value_i \cdot quantity_i$	総価値を最大化する

制約条件	
$\sum_{i \in Object} weight_i \cdot quantity_i \leq capacity$	容量に関する制約
$quantity_i \geq 0, \forall i \in Object$	各品物は 0 個以上詰め込む

この定式化を C++SIMPLE で記述すると，以下のような簡潔なものになります．なお，品物の集合の具体的な要素については Nuorium Optimizer では dat ファイルから自動的に認識します．

knapsack2.smp

```
// 集合と添字
Set Object;
Element i(set = Object);

// パラメータ
Parameter capacity(name = "ナップサックの容量");
Parameter value(name = "品物の価値", index = i);
Parameter size(name = "品物のサイズ", index = i);
```

```
// 変数
IntegerVariable quantity(name = "詰め込む個数", index = i);

// 目的関数
Objective total_value(name = "総価値", type = maximize);
total_value = sum(value[i] * quantity[i], i);

// 容量に関する制約
sum(size[i] * quantity[i], i) <= capacity;

// 各品物は 0 個以上詰め込む
quantity[i] >= 0;

// 求解
solve();

// 結果出力
quantity.val.print();
total_value.val.print();
```

なお，今回の例題についての dat ファイルは次のようになります.

data_knapsack.dat

```
ナップサックの容量 = 65;

品物の価値 =
[缶コーヒー] 120
[水入りペットボトル] 130
[バナナ] 80
[りんご] 100
[おにぎり] 250
[パン] 185
;

品物のサイズ =
[缶コーヒー] 10
[水入りペットボトル] 12
[バナナ] 7
```

```
[りんご] 9
[おにぎり] 21
[パン] 16
;
```

最後に，この例題では「缶コーヒーが 3 個」というように容量が許す限り同じ品物を何個でも詰め込むことができました．それでは，各品物についてナップサックに詰め込むことができるのは 1 個だけということにするとどのようになるでしょうか．なお，この制限を加えると 0-1 ナップサック問題という典型的な 0-1 整数計画問題になります．C++SIMPLE では，0-1 変数であるという宣言を簡単に行うことができます．具体的には，先ほど汎用化させた C++SIMPLE モデル中で変数を宣言している部分を

```
IntegerVariable quantity(name="詰め込む個数",index=i, type=binary);
```

とするだけです．さらに，この宣言から各変数がとりうる値は 0 か 1 しかないということが明らかなため，各品物は 0 個以上詰め込むという制約「quantity[i]>=0;」を記述する必要がなくなります．以上の点についてモデルファイルを書き換えた上で，Nuorium Optimizer で実行させると，

```
詰め込む個数 ["おにぎり"] = 1
詰め込む個数 ["りんご"] = 1
詰め込む個数 ["バナナ"] = 1
詰め込む個数 ["パン"] = 1
詰め込む個数 ["缶コーヒー"] = 0
詰め込む個数 ["水入りペットボトル"] = 1
総価値 = 745
```

という結果が得られ，缶コーヒー以外の品物を詰め込むと良いという事がわかります．

2.6 集合被覆問題

集合 U とその部分集合の族および各部分集合に対応するコストが与えられているものとします．この時，全ての U の要素をカバーするように部分集合の族から部分集合を選び，その際にかかるコストを最小にするという問題が集合被覆問題です．応用例には乗務員スケジューリング問題などがあります．なお集合被覆問題の場合，U の各要素について複数個の部分集合でカバーすることを許しています．このことに関連して，複数個の部分集合でカバーすることを許さない場合，集合分割問題と呼ばれ，選挙区の設定問題などに応用されています．

例題

ある企業は A，B，C，D，E，F，G の 7 つのエリアがある都市で宅配便の配達事業を始めるため，配達員を採用することになりました．この都市には配達員の候補は 10 人いて，各人が配達できるエリアおよび配達を依頼した際にかかるコストは次の表のようになっています．

候補者	配達可能エリア	コスト
佐藤	A，B，C	200
鈴木	A，D，F	280
高橋	B，E	175
田中	C，D，E，F，G	560
渡辺	A，F	205
伊藤	B，D，F	245
山本	D	80
中村	C，G	195
小林	C，F，G	265
斉藤	B，E，G	190

この時，最も少ないコストで 7 つのエリアすべてに配達するためには誰を採用すると良いでしょうか．ただし，配達可能エリアの一部のみを依頼する（例：伊藤に B と D のみ依頼する）ことはできないものとします．

この例題の変数は，各候補者について「採用する」もしくは「採用しない」という状態を表現できるものとなります．よって，ここでは各候補者に対し採用する場合は 1，採用しない場合は 0 を取るような変数 $x_{(候補者)}$ を導入します．

この時，目的関数はどのように表すことができるでしょうか．まず，佐藤を例に実際にかかるコストを表現します．佐藤を採用した場合（$x_{佐藤} = 1$ の場合）には 200 のコストがかかります．一方，採用しなかった場合（$x_{佐藤} = 0$ の場合）は佐藤については何もコストがかかりません．言い換えると，かかったコストが 0 であるということになります．よって，先ほど導入した変数を用い 2 つの場合をまとめると，佐藤については実際には $200x_{佐藤}$ のコストがかかったと表現できます．他の候補者に対しても同様に実際のコストを表し，その総和を取ると実際にかかった総コストとなります．この総コストが，最小化することになる目的関数です．

制約条件については，「各エリアに 1 人以上配置されている」という条件を式で表現することになります．例えば，エリア A の場合佐藤・鈴木・渡辺の中から 1 人以上採用することで条件を満たすことができます．このことを式で表すと $x_{佐藤} + x_{鈴木} + x_{渡辺} \geq 1$ となります．他のエリアについても同様に考えることで制約条件を表現できます．

以上のことから，この例題は 0-1 整数計画問題として次のように定式化できます．

0-1 変数

$x_{佐藤}, x_{鈴木}, x_{高橋}, x_{田中}, x_{渡辺}, x_{伊藤}, x_{山本}, x_{中村}, x_{小林}, x_{斉藤}$	各候補者について採用する時 1，採用しない時 0 を取る変数

目的関数（最小化）

$200x_{佐藤} + 280x_{鈴木} + 175x_{高橋} + 560x_{田中} + 205x_{渡辺} + 245x_{伊藤} + 80x_{山本} + 195x_{中村} + 265x_{小林} + 190x_{斉藤}$	総コストの最小化

制約

$x_{佐藤} + x_{鈴木} + x_{渡辺} \geq 1$	エリア A で配達可能にする
$x_{佐藤} + x_{高橋} + x_{伊藤} + x_{斉藤} \geq 1$	エリア B で配達可能にする
$x_{佐藤} + x_{田中} + x_{中村} + x_{小林} \geq 1$	エリア C で配達可能にする
$x_{鈴木} + x_{田中} + x_{伊藤} + x_{山本} \geq 1$	エリア D で配達可能にする
$x_{高橋} + x_{田中} + x_{斉藤} \geq 1$	エリア E で配達可能にする
$x_{鈴木} + x_{田中} + x_{渡辺} + x_{伊藤} + x_{小林} \geq 1$	エリア F で配達可能にする
$x_{田中} + x_{中村} + x_{小林} + x_{斉藤} \geq 1$	エリア G で配達可能にする

この定式化した結果についてそのまま C++SIMPLE で記述すると次のようになります.

cover1.smp

```
// 変数の宣言
IntegerVariable x_sato(name = "佐藤", type = binary);
IntegerVariable x_suzuki(name = "鈴木", type = binary);
IntegerVariable x_takahashi(name = "高橋", type = binary);
IntegerVariable x_tanaka(name = "田中", type = binary);
IntegerVariable x_watanabe(name = "渡辺", type = binary);
IntegerVariable x_ito(name = "伊藤", type = binary);
IntegerVariable x_yamamoto(name = "山本", type = binary);
IntegerVariable x_nakamura(name = "中村", type = binary);
IntegerVariable x_kobayashi(name = "小林", type = binary);
IntegerVariable x_saito(name = "斉藤", type = binary);

// 目的関数の設定
Objective total_cost(type = minimize);
total_cost = 200 * x_sato + 280 * x_suzuki + 175 * x_takahashi +
             560 * x_tanaka + 205 * x_watanabe + 245 * x_ito +
             80 * x_yamamoto + 195 * x_nakamura + 265 * x_kobayashi +
             190 * x_saito;

// 各エリアに 1 人以上配置する
x_sato + x_suzuki + x_watanabe >= 1;
x_sato + x_takahashi + x_ito + x_saito >= 1;
x_sato + x_tanaka + x_nakamura + x_kobayashi >= 1;
x_suzuki + x_tanaka + x_ito + x_yamamoto >= 1;
x_takahashi + x_tanaka + x_saito >= 1;
x_suzuki + x_tanaka + x_watanabe + x_ito + x_kobayashi >= 1;
```

```
x_tanaka + x_nakamura + x_kobayashi + x_saito >= 1;

// 終了条件に関する設定
options.maxtim = 10;

// 求解し解を出力する
solve();
x_sato.val.print();
x_suzuki.val.print();
x_takahashi.val.print();
x_tanaka.val.print();
x_watanabe.val.print();
x_ito.val.print();
x_yamamoto.val.print();
x_nakamura.val.print();
x_kobayashi.val.print();
x_saito.val.print();
total_cost.val.print();
```

この記述を見て分かるように，このままですと修正が大変ですし汎用的でもありません．このため，汎用的になるように定式化した結果を見直すことにします．

前節のナップサック問題の時と同様に「候補者の集合」および「エリアの集合」という概念を導入します．また，各候補者のコストは定数として外部から与えることにします．

さらに，制約条件についても見直します．例えば，エリア A に 1 人以上配置されているという制約条件 $x_{佐藤} + x_{鈴木} + x_{渡辺} \geq 1$ については，ほかの候補者も考慮すると

$$1x_{佐藤} + 1x_{鈴木} + 0x_{高橋} + 0x_{田中} + 1x_{渡辺} + 0x_{伊藤} + 0x_{山本} + 0x_{中村} + 0x_{小林} + 0x_{斉藤} \geq 1$$

と記述できます．ここで，この式の各変数についている係数 0 または 1 を外部から定数として与えることにします．また，他の地域についても同様に定数を導入します．すると，各エリアに対する制約条件は全て同じ枠組みで定式化できます．その結果，C++SIMPLE では一般的な形での記述で対応でき，よりわかりやすいものになります．

以上のことを反映し，汎用化させた結果は以下のようになります．

集合	
Man = {佐藤, 鈴木, 高橋, 田中, 渡辺, 伊藤, 山本, 中村, 小林, 斉藤}	候補者集合
$Area = \{A, B, C, D, E, F, G\}$	エリア集合

0-1 変数

$x_i, i \in Man$	候補者 i を採用する時 1，採用しない時 0 を取る変数

定数

$deliver_{\mathrm{ij}}, i \in Man, j \in Area$	候補者 i がエリア j に配達可能な時 1，不可能な時 0 を取る
$cost_i, i \in Man$	候補者 i を採用した際のコスト

目的関数（最小化）

$\sum_{i \in Man} cost_i x_i$	総コストの最小化

制約

$\sum_{i \in Man} deliver_{\mathrm{ij}} x_i \geq 1, \forall j \in Area$	すべてのエリアで配達可能になるようにする

これを C++SIMPLE で記述すると，次のようになります．なお，制約条件についてはデータファイルの内容をもとに各エリアに対して自動的に生成されます．

cover2.smp

```
// 集合と添字
Set Man;
Element i(set = Man);
Set Area;
Element j(set = Area);

// パラメータ
Parameter deliver(name = "配達可能エリア", index = (i, j));
Parameter cost(name = "コスト", index = i);

// 変数
IntegerVariable x(name="採用", index = i, type = binary);

// 目的関数
Objective total_cost(name = "総コスト", type = minimize);
total_cost = sum(cost[i] * x[i], i);

// 各エリアに配置する
sum(deliver[i, j] * x[i], i) >= 1;
```

```
// 終了条件に関する設定
options.maxtim = 10;

// 求解
solve();

// 結果出力
x.val.print();
total_cost.val.print();
```

実行させる際には，次の配達可能エリアを表す csv ファイル（areadata_cover2.csv）とコストを表す dat ファイル（costdata_cover2.dat）を与えます．

areadata_cover2.csv

```
配達可能エリア，A，B，C，D，E，F，G
佐藤，1，1，1，0，0，0，0
鈴木，1，0，0，1，0，1，0
高橋，0，1，0，0，1，0，0
田中，0，0，1，1，1，1，1
渡辺，1，0，0，0，0，1，0
伊藤，0，1，0，1，0，1，0
山本，0，0，0，1，0，0，0
中村，0，0，1，0，0，0，1
小林，0，0，1，0，0，1，1
斉藤，0，1，0，0，1，0，1
```

costdata_cover2.dat

```
コスト =
[佐藤] 200
[鈴木] 280
[高橋] 175
[田中] 560
[渡辺] 205
[伊藤] 245
[山本] 80
[中村] 195
[小林] 265
[斉藤] 190
;
```

このモデルファイルを実行させることにより，佐藤・伊藤・斉藤の 3 人を採用すると良く，この場合の総コストは 635 であるということが分かります．

ここで，Nuorium Optimizer の解法について少し述べておきます．今回の例題では厳密解法を用い求解をしました．一方で，0-1 整数計画問題の場合には近似解法である wcsp を用い近似解を求めることもできます．wcsp を用いた際の近似解を求めたい場合には，C++SIMPLE モデル中の solve(); より前に

```
options.method = "wcsp";
```

と記述します．wcsp の詳細につきましては Nuorium Optimizer マニュアルを参考にしてください．

なお，この例題では終了条件に関する定数を設定しています．具体的には，モデルファイルに

```
options.maxtim = 10;
```

と記述することで，最大で 10 秒間実行し終了するということを設定しています．この記述が無いと，wcsp を用いた場合にはユーザが停止を命じない限り実行は停止しません．

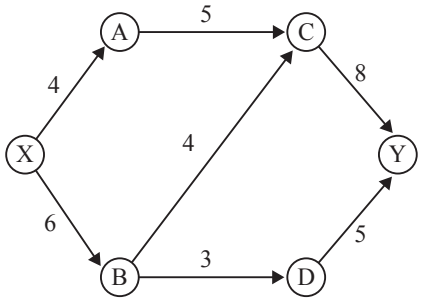
最後に，この 3 人を採用した場合，エリア B は 3 人とも担当可能になっています．このようなダブりを許さないように，例題に「1 つのエリアはちょうど 1 人で担当する」という制約を加えてみるとどのようになるでしょうか．これは先ほどの C++SIMPLE モデル中の制約条件「`sum(deliver[i, j] * x[i], i) >= 1;`」を「`sum(deliver[i, j] * x[i], i) == 1;`」とすることで表現できます．モデルを書き換えた後に実行すると，鈴木・高橋・中村を採用すると良く，この場合の総コストは 650 であるという結果が得られます．

2.7 最大流問題

この節では，有向グラフをもとにしたデータ構造であるネットワークに関する基本的な問題の一つである最大流問題を取り上げます．最大流問題とは，ネットワーク上で始点（Source）から終点（Sink）まで流すことができる量の最大値を求める問題です．ただし，各辺には流すことができる量の上限が与えられています．さらに，始点と終点以外の点については，「流入してくる総量と流出していく総量は一致する」という関係（「保存則」と言います）が成り立つ必要があります．最大流問題は，配送や通信の分野などで応用が可能です．

例題

ある企業は，X 町にある製粉工場で製造した小麦粉を Y 市のレストランに納めています．この際，下の図のように，製粉工場からレストランまで輸送する間にいくつかの問屋を経由しています．また，2 つの地点の間で 1 日に運べる小麦粉の量の上限（kg）が図の数字の通りに決まっています．この時，製粉工場からレストランへ 1 日に納めることのできる小麦粉は最大で何 kg でしょうか．ただし，各問屋は他の地点から輸送されてきた小麦粉を全て他の地点に輸送するものとします．



まず変数として，ネットワーク上で始点（X 町の製粉工場）から終点（Y 市のレストラン）へ 1 日に輸送する小麦粉の量（今後は「総輸送量」と呼びます）と各辺に対し輸送する小麦粉の量を用意します．こうすると，目的関数は変数「総輸送量」自身となります．

次に，制約条件について考えます．まず，2 点間の輸送量については，負の値は許さず，対応する辺に与えられている上限を超えてはならないという制約条件が必要です．このことは，上下限制約として表現できます．さらに，各地点に対しては保存則が成立している必要があります．ただし，製粉

工場については，各地点への輸送量の和が総輸送量と一致するということになります．また，レストランについては，各地点からの輸送量の和が総輸送量と一致しなければなりません．

以上のことから，この例題は次のように定式化できます．

変数	
total	総輸送量
f_{XA}	製粉工場から A 地点への輸送量
f_{XB}	製粉工場から B 地点への輸送量
f_{AC}	A 地点から C 地点への輸送量
f_{BC}	B 地点から C 地点への輸送量
f_{BD}	B 地点から D 地点への輸送量
f_{CY}	C 地点からレストランへの輸送量
f_{DY}	D 地点からレストランへの輸送量

目的関数（最大化）	
total	総輸送量

制約条件	
$total = f_{XA} + f_{XB}$	製粉工場での輸送量
$f_{XA} = f_{AC}$	A 地点での輸送量保存則
$f_{XB} = f_{BC} + f_{BD}$	B 地点での輸送量保存則
$f_{AC} + f_{BC} = f_{CY}$	C 地点での輸送量保存則
$f_{BD} = f_{DY}$	D 地点での輸送量保存則
$f_{CY} + f_{DY} = total$	レストランでの輸送量
$0 \leq f_{XA} \leq 4$	製粉工場から A 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{XB} \leq 6$	製粉工場から B 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{AC} \leq 5$	A 地点から C 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{BC} \leq 4$	B 地点から C 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{BD} \leq 3$	B 地点から D 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{CY} \leq 8$	C 地点からレストランへの輸送量の上下限
$0 \leq f_{DY} \leq 5$	D 地点からレストランへの輸送量の上下限

これを C++SIMPLE で記述すると以下のようになります．

maxflow1.smp

```
// 変数の宣言
Variable total(name = "製粉工場からレストランへの総輸送量");
Variable f_XA(name = "製粉工場から地点 A への輸送量");
Variable f_XB(name = "製粉工場から地点 B への輸送量");
```

```
Variable f_AC(name = "地点 A から地点 C への輸送量");
Variable f_BC(name = "地点 B から地点 C への輸送量");
Variable f_BD(name = "地点 B から地点 D への輸送量");
Variable f_CY(name = "地点 C からレストランへの輸送量");
Variable f_DY(name = "地点 D からレストランへの輸送量");

// 総輸送量の最大化
Objective obj(name = "製粉工場からレストランへの総輸送量 (目的関数)", type = maximize);
obj = total;

// 各地点での輸送量
total == f_XA + f_XB;
f_XA == f_AC;
f_XB == f_BC + f_BD;
f_AC + f_BC == f_CY;
f_BD == f_DY;
f_CY + f_DY == total;

// 輸送量に関する上下限制約
0 <= f_XA <= 4;
0 <= f_XB <= 6;
0 <= f_AC <= 5;
0 <= f_BC <= 4;
0 <= f_BD <= 3;
0 <= f_CY <= 8;
0 <= f_DY <= 5;

// 求解して値を出力する
solve();
f_XA.val.print();
f_XB.val.print();
f_AC.val.print();
f_BC.val.print();
f_BD.val.print();
f_CY.val.print();
f_DY.val.print();
total.val.print();
```

このモデルファイルを実行させると，

```
製粉工場から地点 A への輸送量 = 4
製粉工場から地点 B への輸送量 = 6
地点 A から地点 C への輸送量 = 4
地点 B から地点 C への輸送量 = 3.28106
地点 B から地点 D への輸送量 = 2.71894
地点 C からレストランへの輸送量 = 7.28106
地点 D からレストランへの輸送量 = 2.71894
製粉工場からレストランへの総輸送量 = 10
```

という表示がされ，1 日に最大 10kg 小麦粉を納めることができるという結果を確認できます．

ここで，C++SIMPLE での記述について，より簡潔な形に書き直していくことにします．そのために，都市の集合という概念を導入します．また，2 点間の輸送量の上限値を定数として外部から与えることにします．すると，定式化については次のように書き直すことができます．

集合	
$City = \{A, B, C, D, X, Y\}$	都市の集合
変数	
$total$	総輸送量
$f_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j への輸送量
目的関数（最大化）	
$total$	総輸送量
定数	
$upper_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j への輸送量の上限
制約条件	
$total = \sum_{j \in City} f_{Xj}$	製粉工場での輸送量
$\sum_i f_{ik} = \sum_j f_{kj}, \forall k \in City \backslash \{X, Y\}$	問屋での輸送量の保存則
$\sum_{i \in City} f_{iY} = total$	レストランでの輸送量
$0 \leq f_{ij} \leq upper_{ij}, \forall i, j \in City$	i から j への輸送量の上下限

これより，C++SIMPLE での記述は次のようなものになります．

maxflow2.smp

```
// 集合と添字
Set City;
```

```
Element i(set = City), j(set = City), k(set = City);

// パラメータ
Parameter upper(name = "輸送量の上限", index = (i, j));

// 変数
Variable total(name = "製粉工場からレストランへの総輸送量");
Variable f(index = (i, j));

// 目的関数
Objective obj(name = "製粉工場からレストランへの総輸送量 (目的関数)", type = maximize);
obj = total;

// 各地点での輸送量
total == sum(f["X", j], j);
sum(f[k, j], j) == sum(f[j, k], j), k != "X", k != "Y";
sum(f[i, "Y"], i) == total;

// 輸送量に関する上下限制約
0 <= f[i, j] <= upper[i, j];

// 求解
solve();

// 結果出力
total.val.print();
```

なお，実行時には次の csv ファイルを与えます.

upperdata_maxflow2.csv

```
輸送量の上限, A, B, C, D, X, Y
A, 0, 0, 5, 0, 0, 0
B, 0, 0, 4, 3, 0, 0
C, 0, 0, 0, 0, 0, 8
D, 0, 0, 0, 0, 0, 5
X, 4, 6, 0, 0, 0, 0
Y, 0, 0, 0, 0, 0, 0
```

2.8 最小費用流問題

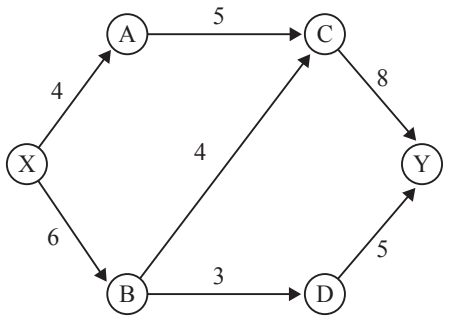
前節の最大流問題では，小麦粉の輸送を例にネットワークに流れる量をできるだけ多くしようという方針で最適化を行いました．このため，小麦粉を輸送する際にかかる燃料費などの様々なコストを考慮していませんでした．また，製粉工場から 1 日に出荷する小麦粉の量が決まっているような場合には別の方針で最適化を行う必要があります．

決まった量をネットワーク上で始点から終点まで流す際にかかる費用（コスト）を最小にしようという問題のことを最小費用流問題といいます．なお，最大流問題のときと同様に，保存則が成立する必要があります．また，「決まった量」が 1 である場合には最小路問題と呼ばれ，カーナビゲーションシステムでのルート探索や鉄道の経路案内などに応用されています．

例題

ある企業は，X 町の製粉工場で製造した小麦粉を Y 市のレストランまで 1 日に 8kg 納めています．この際，右下の図のように，製粉工場からレストランまで輸送する間にいくつかの問屋を経由しています．また，2 つの地点の間で 1 日に運べる小麦粉の量の上限（kg）が図の数字のように決まっています．さらに，2 つの地点の間で小麦粉を 1kg 輸送する毎に左下の表に書かれている費用がかかります．このとき，小麦粉を 8kg 製粉工場からレストランへ輸送する際にかかる総費用は最低いくらでしょうか．ただし，各問屋は他の地点から輸送されてきた小麦粉を全て他の地点に輸送するものとします．

輸送元	輸送先	1kg あたりの費用
製粉工場 X	A	250
製粉工場 X	B	200
A	C	270
B	C	300
B	D	220
C	レストラン Y	190
D	レストラン Y	170



定式化について，前節の最大流問題の時との違いは

- 総輸送量（前節の例題での total という変数）が 8 に決まっている．
- 目的関数が総費用の最小化に変わっている．

の 2 点です．この 2 点以外については，前節の例題と同じ定式化となりますので必要に応じて前節を参考にしてください．なお，総費用は各輸送ルートについて「小麦粉 1kg あたりの費用」と「輸送した小麦粉の量」の積を求め総和をとることで求められます．

以上のことから，この例題は次のように定式化できます．

変数	
f_{XA}	製粉工場から A 地点への輸送量

f_{XB}	製粉工場から B 地点への輸送量
f_{AC}	A 地点から C 地点への輸送量
f_{BC}	B 地点から C 地点への輸送量
f_{BD}	B 地点から D 地点への輸送量
f_{CY}	C 地点からレストランへの輸送量
f_{DY}	D 地点からレストランへの輸送量

目的関数（最小化）

$250f_{XA} + 200f_{XB} + 270f_{AC} + 300f_{BC} + 220f_{BD} + 190f_{CY} + 170f_{DY}$	総費用

制約条件

$8 = f_{XA} + f_{XB}$	製粉工場での輸送量
$f_{XA} = f_{AC}$	A 地点での輸送量の保存則
$f_{XB} = f_{BC} + f_{BD}$	B 地点での輸送量の保存則
$f_{AC} + f_{BC} = f_{CY}$	C 地点での輸送量の保存則
$f_{BD} = f_{DY}$	D 地点での輸送量の保存則
$f_{CY} + f_{DY} = 8$	レストランでの輸送量
$0 \leq f_{XA} \leq 4$	製粉工場から A 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{XB} \leq 6$	製粉工場から B 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{AC} \leq 5$	A 地点から C 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{BC} \leq 4$	B 地点から C 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{BD} \leq 3$	B 地点から D 地点への輸送量の上下限
$0 \leq f_{CY} \leq 8$	C 地点からレストランへの輸送量の上下限
$0 \leq f_{DY} \leq 5$	D 地点からレストランへの輸送量の上下限

この結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります.

mincost1.smp

```
// 変数の宣言
Variable f_XA(name = "製粉工場から地点 A への輸送量");
Variable f_XB(name = "製粉工場から地点 B への輸送量");
Variable f_AC(name = "地点 A から地点 C への輸送量");
Variable f_BC(name = "地点 B から地点 C への輸送量");
Variable f_BD(name = "地点 B から地点 D への輸送量");
Variable f_CY(name = "地点 C からレストランへの輸送量");
Variable f_DY(name = "地点 D からレストランへの輸送量");
```

```
// 総費用の最小化
Objective totalcost(name = "総費用", type = minimize);
totalcost = 250 * f_XA + 200 * f_XB + 270 * f_AC +
            300 * f_BC + 220 * f_BD + 190 * f_CY + 170 * f_DY;

// 各地点での輸送量
8 == f_XA + f_XB;
f_XA == f_AC;
f_XB == f_BC + f_BD;
f_AC + f_BC == f_CY;
f_BD == f_DY;
f_CY + f_DY == 8;

// 輸送量に関する上下限制約
0 <= f_XA <= 4;
0 <= f_XB <= 6;
0 <= f_AC <= 5;
0 <= f_BC <= 4;
0 <= f_BD <= 3;
0 <= f_CY <= 8;
0 <= f_DY <= 5;

// 求解して値を出力する
solve();
f_XA.val.print();
f_XB.val.print();
f_AC.val.print();
f_BC.val.print();
f_BD.val.print();
f_CY.val.print();
f_DY.val.print();
totalcost.val.print();
```

このモデルを実行させると，

```
製粉工場から地点 A への輸送量 = 2
製粉工場から地点 B への輸送量 = 6
地点 A から地点 C への輸送量 = 2
地点 B から地点 C への輸送量 = 3
```

```
地点 B から地点 D への輸送量 = 3
地点 C からレストランへの輸送量 = 5
地点 D からレストランへの輸送量 = 3
総費用 = 5260
```

という表示がされ，結果を確認できます．

ところで，このままの記述では都市の数が多い問題に応用することが困難です．そこで，都市の集合という概念を導入し，必要なデータを定数として外部から与えるようにすることで大規模な問題に対しても応用しやすいようにします．まず，この方針で定式化をしなおすと次のようになります．なお，保存則については「他の地点への輸送量の和」と「他の地点からの輸送量の和」の差のデータを外部から与える形式を取りました．ちなみに，この値が正の地点が製粉工場，負の地点がレストラン，そして 0 の地点が問屋ということになります．

集合	
$City = \{A, B, C, D, X, Y\}$	都市の集合
変数	
$f_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j への輸送量
定数	
$upper_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j への輸送量の上限
$cost_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j への輸送の際にかかる小麦粉 1kg あたりの費用
$supply_i, i \in City$	i での流出量と流入量の差
目的関数（最小化）	
$\sum_{j \in City} \sum_{i \in City} cost_{ij} \cdot f_{ij}$	総費用
制約条件	
$\sum_{j \in City} f_{kj} - \sum_{i \in City} f_{ik} = supply_k, \forall k \in City$	各地点での流出量と流入量の差
$0 \leq f_{ij} \leq upper_{ij}, \forall i, j \in City$	i から j への輸送量の上下限

この定式化をし直した結果を C++SIMPLE で記述すると次のようになります．

mincost2.smp

```
// 集合と添字
Set City;
Element i(set = City), j(set = City), k(set = City);
```

```
// パラメータ
Parameter upper(name = "輸送量の上限", index = (i, j));
Parameter cost(name = "輸送費用", index = (i, j));
Parameter supply(name = "supply", index = k);

// 変数
Variable f(name = "輸送量", index = (i, j));

// 目的関数
Objective total_cost(name = "総費用", type = minimize);
total_cost = sum(cost[i, j] * f[i, j], (i, j));

// 各地点での流出量と流入量の差
sum(f[k, j], j) - sum(f[i, k], i) == supply[k];

// 輸送量に関する上下限制約
0 <= f[i, j] <= upper[i, j];

// 求解
solve();

// 結果出力
total_cost.val.print();
```

なお，実行時には次の 2 つの csv ファイルと 1 つの dat ファイルを与えます.

upperdata_mincost2.csv

```
輸送量の上限, A, B, C, D, X, Y
A, 0, 0, 5, 0, 0, 0
B, 0, 0, 4, 3, 0, 0
C, 0, 0, 0, 0, 0, 8
D, 0, 0, 0, 0, 0, 5
X, 4, 6, 0, 0, 0, 0
Y, 0, 0, 0, 0, 0, 0
```

costdata_mincost2.csv

```
輸送費用, A, B, C, D, X, Y
A, 0, 0, 270, 0, 0, 0
B, 0, 0, 300, 220, 0, 0
C, 0, 0, 0, 0, 0, 190
D, 0, 0, 0, 0, 0, 170
X, 250, 200, 0, 0, 0, 0
Y, 0, 0, 0, 0, 0, 0
```

supply_mincost2.dat

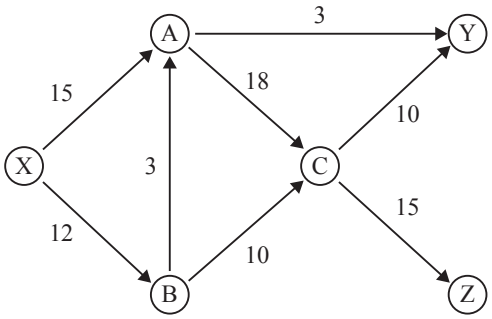
```
supply =
[A] 0
[B] 0
[C] 0
[D] 0
[X] 8
[Y] -8
;
```

2.9 多品種流問題

今まで述べてきた最大流問題や最小費用流問題では，ネットワーク上を 1 種類のものしか流れていませんでした．しかし，現実世界ではネットワーク上を複数のものが流れるというケースがよくあります．多品種流問題は，複数の品物をそれぞれ始点から終点まで輸送するという場合に利用される問題で，通信など多くの分野で応用されています．

例題

ある企業は，X 町の製粉工場で製造したパン用の小麦粉を Y 市のパン屋まで 1 日に 8kg 納めています．さらに，同じ製粉工場で製造したうどん用の小麦粉を Z 市のうどん屋まで 1 日に 13 kg 納めています．この際，下の図のように，製粉工場からパン屋，製粉工場からうどん屋まで輸送する間にいくつかの問屋を経由しています．また，2 つの地点の間で 1 日に運べるパン用の小麦粉とうどん用の小麦粉の合計量の上限（kg）が図の数字のように決まっています．さらに，2 つの地点の間でパン用の小麦粉やうどん用の小麦粉を 1kg 輸送する毎に下の表に書かれているだけの費用がかかります．このとき，パン用の小麦粉とうどん用の小麦粉を決められた量だけ納める際にかかる総費用は 1 日につき最低いくらでしょうか．



輸送元	輸送先	パン用の小麦粉の輸送費	うどん用の小麦粉の輸送費
製粉工場 X	A	12	11
製粉工場 X	B	10	12

A	C	4	5
A	パン屋 Y	11	-
B	A	6	7
B	C	11	9
C	パン屋 Y	9	-
C	うどん屋 Z	-	5

まず，各輸送ルートについてパン用の小麦粉の輸送量とうどん用の小麦粉の輸送量が変数として必要です．ただし，うどん屋にパン用の小麦粉を輸送したりパン屋にうどん用の小麦粉を輸送したりすることはありませんので，これらに対応する変数はここでは宣言しないことにします．

次に，目的関数については最小費用流問題の時と同様に考えることになります．ただし，パン用の小麦粉とうどん用の小麦粉で輸送コストが異なる点には注意が必要です．

最後に，制約条件を考えます．各輸送ルートについては問題文にあるようにパン用の小麦粉の輸送量とうどん用の小麦粉の輸送量の和が上限を超えないという制約条件が必要です．また，保存則については地点と商品に関し場合分けをする必要があります．さらに，「-1kg 輸送する」ということはありえませんので変数について非負制約が必要です．

以上のことから，次のように定式化できます．

変数	
$PWheat_{XA}$, $UWheat_{XA}$	製粉工場から A 地点への輸送量
$PWheat_{XB}$, $UWheat_{XB}$	製粉工場から B 地点への輸送量
$PWheat_{AC}$, $UWheat_{AC}$	A 地点から C 地点への輸送量
$PWheat_{AY}$	A 地点からパン屋への輸送量
$PWheat_{BA}$, $UWheat_{BA}$	B 地点から A 地点への輸送量
$PWheat_{BC}$, $UWheat_{BC}$	B 地点から C 地点への輸送量
$PWheat_{CY}$	C 地点からパン屋への輸送量
$UWheat_{CZ}$	C 地点からうどん屋への輸送量

目的関数（最小化）	
$12PWheat_{XA} + 10PWheat_{XB} + 4PWheat_{AC} + 11PWheat_{AY} + 6PWheat_{BA} + 11PWheat_{BC} + 9PWheat_{CY} + 11UWheat_{XA} + 12UWheat_{XB} + 5UWheat_{AC} + 7UWheat_{BA} + 9UWheat_{BC} + 5UWheat_{CZ}$	総輸送費

制約条件

$PWheat_{XA} + UWheat_{XA} \leq 15$,	各輸送ルートの輸送量の上限を超えない
$PWheat_{XB} + UWheat_{XB} \leq 12$,	
$PWheat_{AC} + UWheat_{AC} \leq 18$, $PWheat_{AY} \leq 3$,	
$PWheat_{BA} + UWheat_{BA} \leq 3$,	
$PWheat_{BC} + UWheat_{BC} \leq 10$, $PWheat_{CY} \leq 10$,	
$UWheat_{CZ} \leq 15$	
$PWheat_{XA} + PWheat_{XB} = 8$,	パン用の小麦粉に関する保存則
$PWheat_{AC} + PWheat_{AY} = PWheat_{XA} + PWheat_{BA}$,	
$PWheat_{BA} + PWheat_{BC} = PWheat_{XB}$,	
$PWheat_{CY} = PWheat_{AC} + PWheat_{BC}$,	
$8 = PWheat_{AY} + PWheat_{CY}$	
$UWheat_{XA} + UWheat_{XB} = 13$,	うどん用の小麦粉に関する保存則
$UWheat_{AC} + UWheat_{AY} = UWheat_{XA} + UWheat_{BA}$,	
$UWheat_{BA} + UWheat_{BC} = UWheat_{XB}$,	
$UWheat_{CZ} = UWheat_{AC} + UWheat_{BC}$,	
$13 = UWheat_{CZ}$	
$PWheat_{XA} \geq 0$, $PWheat_{XB} \geq 0$, $PWheat_{AC} \geq 0$,	輸送量に関する非負制約
$PWheat_{AY} \geq 0$, $PWheat_{BA} \geq 0$, $PWheat_{BC} \geq 0$,	
$PWheat_{CY} \geq 0$, $UWheat_{XA} \geq 0$, $UWheat_{XB} \geq 0$,	
$UWheat_{AC} \geq 0$, $UWheat_{BA} \geq 0$, $UWheat_{BC} \geq 0$,	
$UWheat_{CZ} \geq 0$	

これを C++SIMPLE で記述すると次のようになります.

multiflow1.smp

```
// 変数の宣言
Variable
  PWheat_XA, PWheat_XB, PWheat_AC, PWheat_AY, PWheat_BA, PWheat_BC, PWheat_CY,
  UWheat_XA, UWheat_XB, UWheat_AC, UWheat_BA, UWheat_BC, UWheat_CZ;

// 目的関数の宣言
Objective total_cost(name = "総輸送費", type = minimize);
total_cost = 12 * PWheat_XA + 10 * PWheat_XB + 4 * PWheat_AC + 11 * PWheat_AY +
             6 * PWheat_BA + 11 * PWheat_BC + 9 * PWheat_CY + 11 * UWheat_XA +
             12 * UWheat_XB + 5 * UWheat_AC + 7 * UWheat_BA + 9 * UWheat_BC +
             5 * UWheat_CZ;

// 輸送ルートごとの輸送量の上限
```

```
PWheat_XA + UWheat_XA <= 15;
PWheat_XB + UWheat_XB <= 12;
PWheat_AC + UWheat_AC <= 18;
PWheat_AY <= 3;
PWheat_BA + UWheat_BA <= 3;
PWheat_BC + UWheat_BC <= 10;
PWheat_CY <= 10;
UWheat_CZ <= 15;

// パン用の小麦粉に関する保存則
PWheat_XA + PWheat_XB == 8;
PWheat_AC + PWheat_AY == PWheat_XA + PWheat_BA;
PWheat_BA + PWheat_BC == PWheat_XB;
PWheat_CY == PWheat_AC + PWheat_BC;
8 == PWheat_AY + PWheat_CY;

// うどん用の小麦粉に関する保存則
UWheat_XA + UWheat_XB == 13;
UWheat_AC == UWheat_XA + UWheat_BA;
UWheat_BA + UWheat_BC == UWheat_XB;
UWheat_CZ == UWheat_AC + UWheat_BC;
13 == UWheat_CZ;

// 非負制約
PWheat_XA >= 0; PWheat_XB >= 0; PWheat_AC >= 0; PWheat_AY >= 0;
PWheat_BA >= 0; PWheat_BC >= 0; PWheat_CY >= 0;
UWheat_XA >= 0; UWheat_XB >= 0; UWheat_AC >= 0; UWheat_BA >= 0;
UWheat_BC >= 0; UWheat_CZ >= 0;
```

ここで，C++SIMPLE での記述をより簡潔なものにしていくことにします．そのためには，都市の集合の概念を導入し，さまざまなデータに対応できるようにすることが有効です．この際，輸送量の上限値などの具体的なデータを出来るだけ外部から与えるようにしておきます．

すると，定式化については次のように表現できます．

集合	
$City = \{A, B, C, X, Y, Z\}$	都市の集合

変数	
$PWheat_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j へのパン用の小麦粉の輸送量

$UWheat_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j へのうどん用の小麦粉の輸送量

定数

$upper_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j への輸送量の上限
$PWheat\_cost_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j への輸送の際にかかるパン用の小麦粉 1kg あたりの費用
$UWheat\_cost_{ij}, i \in City, j \in City$	i から j への輸送の際にかかるうどん用の小麦粉 1kg あたりの費用
$PWheat\_supply_i, i \in City$	i でのパン用の小麦粉の流出量と流入量の差
$UWheat\_supply_i, i \in City$	i でのうどん用の小麦粉の流出量と流入量の差

目的関数（最小化）

$\sum_{j \in City} \sum_{i \in City} (PWheat\_cost_{ij} \cdot PWheat_{ij} + UWheat\_cost_{ij} \cdot UWheat_{ij})$	総輸送費

制約条件

$PWheat_{ij} + UWheat_{ij} \leq upper_{ij}, \forall i, j \in City$	i から j への輸送量の上限
$\sum_{j \in City} PWheat_{kj} - \sum_{i \in City} PWheat_{ik} = PWheat\_supply_k, \forall k \in City$	各地点でのパン用の小麦粉に関する保存則
$\sum_{j \in City} UWheat_{kj} - \sum_{i \in City} UWheat_{ik} = UWheat\_supply_k, \forall k \in City$	各地点でのうどん用の小麦粉に関する保存則
$0 \leq PWheat_{ij}, \forall i, j \in City$	パン用の小麦粉の輸送量の非負制約
$0 \leq UWheat_{ij}, \forall i, j \in City$	うどん用の小麦粉の輸送量の非負制約

C++SIMPLE で記述すると次のようになり，先ほどのものより簡潔になっていることが分かります．

multiflow2.smp

```
// 集合と添字
Set City;
Element i(set = City), j(set = City), k(set = City);

// パラメータ
Parameter upper(name = "輸送量の上限", index = (i, j));
Parameter PWheat_cost(name = "パン用の小麦粉の輸送費用", index = (i, j));
Parameter UWheat_cost(name = "うどん用の小麦粉の輸送費用", index = (i, j));
Parameter PWheat_supply(name = "PWheat_supply", index = k);
Parameter UWheat_supply(name = "UWheat_supply", index = k);
```

```
// 変数
Variable PWheat(name="パン用の小麦粉の輸送数", index=(i,j));
Variable UWheat(name="うどん用の小麦粉の輸送数", index=(i,j));

// 目的関数
Objective total_cost(name = "総輸送費", type = minimize);
total_cost = sum(PWheat_cost[i, j] * PWheat[i, j] + UWheat_cost[i, j] * UWheat[i, j],
(i, j));

// 輸送ルートごとの輸送量の上限
PWheat[i, j] + UWheat[i, j] <= upper[i, j];

// パン用の小麦粉に関する保存則
sum(PWheat[k, j], j) - sum(PWheat[i, k], i) == PWheat_supply[k];

// うどん用の小麦粉に関する保存則
sum(UWheat[k, j], j) - sum(UWheat[i, k], i) == UWheat_supply[k];

// 非負制約
PWheat[i, j] >= 0;
UWheat[i, j] >= 0;
```

なお，実行時には次の 3 つの csv ファイル（輸送量の上限・パン用の小麦粉の輸送費用・うどん用の小麦粉の輸送費用）と 1 つの dat ファイル（PWheat_supply および UWheat_supply）を与えます.

PWcost_multiflow2.csv

```
パン用の小麦粉の輸送費用, A, B, C, X, Y,
Z
A, 0, 0, 4, 0, 11, 0
B, 6, 0, 11, 0, 0, 0
C, 0, 0, 0, 0, 9, 0
X, 12, 10, 0, 0, 0, 0
Y, 0, 0, 0, 0, 0, 0
Z, 0, 0, 0, 0, 0, 0
```

upperdata_multiflow2.csv

```
輸送量の上限, A, B, C, X, Y, Z
A, 0, 0, 18, 0, 3, 0
B, 3, 0, 10, 0, 0, 0
C, 0, 0, 0, 0, 10, 15
X, 15, 12, 0, 0, 0, 0
Y, 0, 0, 0, 0, 0, 0
Z, 0, 0, 0, 0, 0, 0
```

UWcost_multiflow2.csv

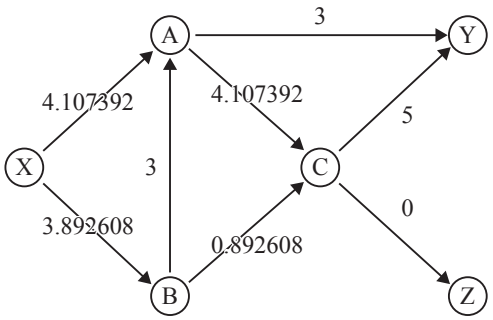
```
うどん用の小麦粉の輸送費用，A，B，C，X，
Y，Z
A，0，0，5，0，0，0
B，7，0，9，0，0，0
C，0，0，0，0，0，5
X，11，12，0，0，0，0
Y，0，0，0，0，0，0
Z，0，0，0，0，0，0
```

supplydata_multiflow2.dat

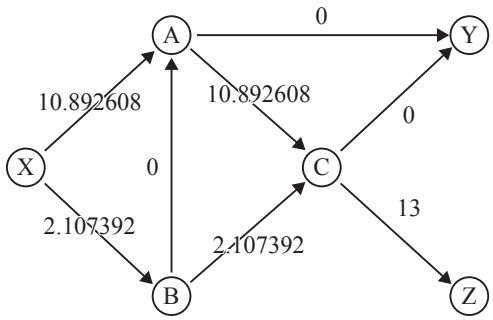
```
PWheat_supply = [A]  0 [B]  0 [C]   0
                [X]  8 [Y] -8 [Z]   0;
UWheat_supply = [A]  0 [B]  0 [C]   0
                [X] 13 [Y]  0 [Z] -13;
```

このモデルを実行した結果から，総費用が 494 になるように輸送すると最適であり，例えば次の図のようにパン用の小麦粉とうどん用の小麦粉を輸送するとよいことが分かります．

パン用の小麦粉の輸送量



うどん用の小麦粉の輸送量



2.10 p メディアン問題

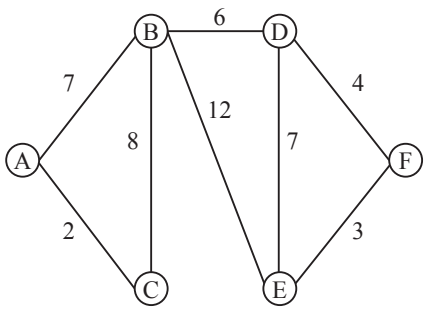
施設をどの地点に配置すると最適なのかを求める施設配置問題は，都市計画などに応用されています．施設配置問題の中から，この節で p メディアン問題を，次の節で p センター問題を取り上げます．なお，本チュートリアルでは各地点は需要を有する地点（今後は「需要点」と呼びます）でありさらに施設を配置することが可能な地点でもあると仮定します．

まず，メディアンについて説明します．メディアンとは各需要点から施設を配置した地点（今後は「施設点」と呼びます）への移動距離の総和を最小にする点のことです．そして，このメディアンを求める問題のことをメディアン問題と呼びます．なお，一般にはどの程度の需要があるかは需要点ごとに異なりますので重み付きの総移動距離を最小にすることになります．また，施設を 1 箇所ではなく p 箇所に配置するような場合に p メディアン問題と呼びます．

■■例題

ある企業は，A 市から F 市までの 6 市の中から 2 つの市に新たにデパートを出店しようと考えています．この時，出店地までの総移動距離を最小にするためにはどの市に出店すると良いでしょうか．なお，各市の人口は左下の表のようになっています．また，2 市間の距離は右下の図のようになっています．ただし，直接結ばれていない 2 都市間の距離は他の都市を経由したときの最短距離を採用します．

都市	人口
A 市	800
B 市	550
C 市	780
D 市	600
E 市	1020
F 市	360



まず，この問題では各都市に対しデパートを出店するのかどうかを表す変数が必要であることがわかります．しかし，これだけでは各都市からどちらの出店地が近いのかを求める必要があり，複雑な式になってしまいます．そこで，都市 i を都市 j のデパートに配分する場合 1，そうでない場合は 0 を取るような 0-1 変数 x_{ij} を導入します．なお，$x_{ii} = 1$ の時には都市 i にデパートを出店し，$x_{ii} = 0$ の時には出店しないという解釈をします．

次に，制約条件について考えていきます．先ほど述べたように，x_{ii} は都市 i に出店するかどうかを表しています．この例題では 2 都市に出店しますので，$\sum_i x_{ii}$ は 2 である必要があります．また，各都市について近い方のデパートに配分しなければなりません（同距離の場合には任意にどちらかを選択することになります）．x_{ij} を用いて表現すると，各 i について $\sum_j x_{ij}$ が 1 であるということになります．最後に，今のままですと出店していない都市に配分されてしまう可能性があります．これを防ぐためには，$x_{jj} = 0$ の場合に $x_{ij} = 1$ となってはいけないという制約条件が必要です．言い換えると，x_{ij} は x_{jj} より大きい値をとらないということになります．よって，式で表すと $x_{ij} \leq x_{jj}$ となります．ただし，この制約条件は $i = j$ の場合には無意味ですから $i \neq j$ の場合のみで十分であることに注意してください．

目的関数は，重み付きの総移動距離ということになります．まず，都市 i から都市 j への移動距離は $x_{ij} = 1$ の場合にのみ考慮する必要があります．よって，まず 2 市 i, j 間の距離と x_{ij} の積を求めます．そして，j について和をとることで都市 i からの重みなしの移動距離が得られます．そして，この移動距離に重みである人口を掛けあわせることで都市 i からの重みをつけた移動距離を得ます．重みをつけた移動距離を全ての都市について求め，和をとることで目的関数である重み付きの総移動距離となります．なお，図より 2 都市間の距離は次の表の通りになることが分かります．

	A 市	**B 市**	**C 市**	**D 市**	**E 市**	**F 市**
A 市	0	7	2	13	19	17
B 市	7	0	8	6	12	10
C 市	2	8	0	14	20	18
D 市	13	6	14	0	7	4
E 市	19	12	20	7	0	3
F 市	17	10	18	4	3	0

以上のことをまとめると，次のように定式化できます.

0-1 変数	
$x_{AA}, x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{AE}, x_{AF}, x_{BA}, x_{BB}, x_{BC}, x_{BD}, x_{BE}, x_{BF}, x_{CA}, x_{CB}, x_{CC}, x_{CD}, x_{CE}, x_{CF}, x_{DA}, x_{DB}, x_{DC}, x_{DD}, x_{DE}, x_{DF}, x_{EA}, x_{EB}, x_{EC}, x_{ED}, x_{EE}, x_{EF}, x_{FA}, x_{FB}, x_{FC}, x_{FD}, x_{FE}, x_{FF}$	0 または 1 をとる出店するのかと最も近い出店地はどこなのかを表す変数
目的関数（最小化）	
$800(7x_{AB}+2x_{AC}+13x_{AD}+19x_{AE}+17x_{AF})+550(7x_{BA}+8x_{BC}+6x_{BD}+12x_{BE}+10x_{BF})+780(2x_{CA}+8x_{CB}+14x_{CD}+20x_{CE}+18x_{CF})+600(13x_{DA}+6x_{DB}+14x_{DC}+7x_{DE}+4x_{DF})+1020(19x_{EA}+12x_{EB}+20x_{EC}+7x_{ED}+3x_{EF})+360(17x_{FA}+10x_{FB}+18x_{FC}+4x_{FD}+3x_{FE})$	重み付き総移動距離
制約条件	
$x_{AA}+x_{BB}+x_{CC}+x_{DD}+x_{EE}+x_{FF}=2$	2 都市に出店
$x_{AA}+x_{AB}+x_{AC}+x_{AD}+x_{AE}+x_{AF}=1$	A 市は 1 箇所に配分
$x_{BA}+x_{BB}+x_{BC}+x_{BD}+x_{BE}+x_{BF}=1$	B 市は 1 箇所に配分
$x_{CA}+x_{CB}+x_{CC}+x_{CD}+x_{CE}+x_{CF}=1$	C 市は 1 箇所に配分
$x_{DA}+x_{DB}+x_{DC}+x_{DD}+x_{DE}+x_{DF}=1$	D 市は 1 箇所に配分
$x_{EA}+x_{EB}+x_{EC}+x_{ED}+x_{EE}+x_{EF}=1$	E 市は 1 箇所に配分
$x_{FA}+x_{FB}+x_{FC}+x_{FD}+x_{FE}+x_{FF}=1$	F 市は 1 箇所に配分
$x_{AB} \le x_{BB}, x_{AC} \le x_{CC}, x_{AD} \le x_{DD}, x_{AE} \le x_{EE}, x_{AF} \le x_{FF}, x_{BA} \le x_{AA}, x_{BC} \le x_{CC}, x_{BD} \le x_{DD}, x_{BE} \le x_{EE}, x_{BF} \le x_{FF}, x_{CA} \le x_{AA}, x_{CB} \le x_{BB}, x_{CD} \le x_{DD}, x_{CE} \le x_{EE}, x_{CF} \le x_{FF}, x_{DA} \le x_{AA}, x_{DB} \le x_{BB}, x_{DC} \le x_{CC}, x_{DE} \le x_{EE}, x_{DF} \le x_{FF}, x_{EA} \le x_{AA}, x_{EB} \le x_{BB}, x_{EC} \le x_{CC}, x_{ED} \le x_{DD}, x_{EF} \le x_{FF}, x_{FA} \le x_{AA}, x_{FB} \le x_{BB}, x_{FC} \le x_{CC}, x_{FD} \le x_{DD}, x_{FE} \le x_{EE}$	出店している都市に配分

この結果をそのまま C++SIMPLE で記述すると次のようになります.

median1.smp

```
// 変数の宣言
IntegerVariable
     x_AA(type = binary), x_AB(type = binary), x_AC(type = binary),
     x_AD(type = binary), x_AE(type = binary), x_AF(type = binary),
```

```
    x_BA(type = binary), x_BB(type = binary), x_BC(type = binary),
    x_BD(type = binary), x_BE(type = binary), x_BF(type = binary),
    x_CA(type = binary), x_CB(type = binary), x_CC(type = binary),
    x_CD(type = binary), x_CE(type = binary), x_CF(type = binary),
    x_DA(type = binary), x_DB(type = binary), x_DC(type = binary),
    x_DD(type = binary), x_DE(type = binary), x_DF(type = binary),
    x_EA(type = binary), x_EB(type = binary), x_EC(type = binary),
    x_ED(type = binary), x_EE(type = binary), x_EF(type = binary),
    x_FA(type = binary), x_FB(type = binary), x_FC(type = binary),
    x_FD(type = binary), x_FE(type = binary), x_FF(type = binary);

// 重み付き総移動距離の最小化
Objective total_distance(type = minimize);
total_distance = 800 * (7 * x_AB + 2 * x_AC + 13 * x_AD + 19 * x_AE + 17 * x_AF) +
                 550 * (7 * x_BA + 8 * x_BC + 6 * x_BD + 12 * x_BE + 10 * x_BF) +
                 780 * (2 * x_CA + 8 * x_CB + 14 * x_CD + 20 * x_CE + 18 * x_CF) +
                 600 * (13 * x_DA + 6 * x_DB + 14 * x_DC + 7 * x_DE + 4 * x_DF) +
                 1020 * (19 * x_EA + 12 * x_EB + 20 * x_EC + 7 * x_ED + 3 * x_EF) +
                 360 * (17 * x_FA + 10 * x_FB + 18 * x_FC + 4 * x_FD + 3 * x_FE);

// 2 都市に出店する
x_AA + x_BB + x_CC + x_DD + x_EE + x_FF == 2;

// 各都市を配分する
x_AA + x_AB + x_AC + x_AD + x_AE + x_AF == 1;
x_BA + x_BB + x_BC + x_BD + x_BE + x_BF == 1;
x_CA + x_CB + x_CC + x_CD + x_CE + x_CF == 1;
x_DA + x_DB + x_DC + x_DD + x_DE + x_DF == 1;
x_EA + x_EB + x_EC + x_ED + x_EE + x_EF == 1;
x_FA + x_FB + x_FC + x_FD + x_FE + x_FF == 1;

// 出店しない都市には配分しない
x_AB <= x_BB; x_AC <= x_CC; x_AD <= x_DD; x_AE <= x_EE; x_AF <= x_FF;
x_BA <= x_AA; x_BC <= x_CC; x_BD <= x_DD; x_BE <= x_EE; x_BF <= x_FF;
x_CA <= x_AA; x_CB <= x_BB; x_CD <= x_DD; x_CE <= x_EE; x_CF <= x_FF;
x_DA <= x_AA; x_DB <= x_BB; x_DC <= x_CC; x_DE <= x_EE; x_DF <= x_FF;
x_EA <= x_AA; x_EB <= x_BB; x_EC <= x_CC; x_ED <= x_DD; x_EF <= x_FF;
x_FA <= x_AA; x_FB <= x_BB; x_FC <= x_CC; x_FD <= x_DD; x_FE <= x_EE;
```

ところで，この記述ですと都市の数が増えた場合に記述が大変であるなどの理由で汎用的ではありません．そこで，モデルファイルを汎用的なものにしていくことにします．そのためには，生データをできるだけ外部から与える必要があります．ここでは，人口と距離に関するデータをデータファイルから与えることにします．この時，様々なデータに対応できるように都市の集合という概念を導入しておきます．すると，定式化について次のように書き直せます．

集合	
$City = \{A, B, C, D, E, F\}$	都市の集合
0-1 変数	
$x_{ij}, i \in City, j \in City$	0 または 1 をとる出店するのかとどこに配分されるのかを表す変数
定数	
$distance_{ij}, i \in City, j \in City$	都市 i から都市 j までの距離
$population_i, i \in City$	都市 i の人口
目的関数（最小化）	
$\sum_{i \in City} \left(population_i \cdot \sum_{j \in City, i \neq j} (distance_{ij} \cdot x_{ij}) \right)$	重み付き総移動距離
制約条件	
$\sum_{i \in City} x_{ii} = 2$	2 都市に出店
$\sum_{j \in City} x_{ij} = 1, \forall i \in City$	各都市は 1 箇所に配分
$x_{ij} \leq x_{jj}, \forall i, j \in City, i \neq j$	出店している都市に配分

上記の式を C++SIMPLE で記述すると，次のようになります．なお，Nuorium Optimizer での実行時には都市の集合の具体的な要素はデータファイルから自動的に認識します．また，simple_printf() を用い出店する都市のみを表示するように工夫しました．

median2.smp

```
// 集合と添字
Set City;
Element i(set = City), j(set = City);

// パラメータ
Parameter distance(name = "2 都市間の距離", index = (i, j));
Parameter population(name = "都市の人口", index = i);
```

```
// 変数
IntegerVariable x(index = (i, j), type = binary);

// 目的関数
Objective total_distance(name = "総移動距離", type = minimize);
total_distance = sum(population[i] * sum(distance[i, j] * x[i, j], (j, i != j)), i);

// 制約条件
sum(x[i, i], i) == 2;
sum(x[i, j], j) == 1;
x[i, j] <= x[j, j], i != j;

// 求解
solve();

// 結果出力
simple_printf("%s 市に出店する．\n", i, x[i, i].val == 1);
```

なお，実行時に次の 2 都市間の距離を表す csv ファイル（左）と都市の人口を表す dat ファイル（右）を与えます．

distancedata_median2.csv

```
2 都市間の距離，A，B，C，D，E，F
A，0，7，2，13，19，17
B，7，0，8，6，12，10
C，2，8，0，14，20，18
D，13，6，14，0，7，4
E，19，12，20，7，0，3
F，17，10，18，4，3，0
```

populationdata_median2.dat

```
都市の人口 =
[A] 800
[B] 550
[C] 780
[D] 600
[E] 1020
[F] 360
;
```

このモデルを実行すると次の表示がされ，A 市と E 市に出店すると良いことがわかります．

```
A 市に出店する．
E 市に出店する．
```

2.11　p センター問題

前節の p メディアン問題は，需要点と施設点の間の（重み付き）総移動距離を最小にするという目的で作られた問題でした．このため，需要点から施設点までの平均的な移動距離を最小にするような

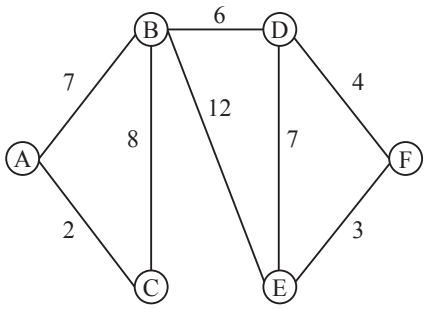
解を期待できます．しかし，解の中に需要点と施設点の間が極端に離れている組み合わせが含まれている可能性があります．この点，この節で扱う p センター問題は，（重み付き）移動距離が極端に大きい組み合わせを作らないように配置をする問題と見ることができます．

ここで，センターとは最も遠い需要点からの（重み付き）距離を最小にする施設点のことで，この点を求める問題のことをセンター問題といいます．また，p 箇所に施設を配置するような場合に p センター問題と呼び，消防署のような施設を配置するような場合に用いられています．

■■例題

ある企業は，A 市から F 市までの 6 市の中から 2 つの市に新たにデパートを出店しようと考えています．この時，都市から出店地までの重み付き移動距離の最大値を最小にするためにはどの市に出店すると良いでしょうか．なお，各市の人口は左下の表のようになっています．また，2 市間の距離は右下の図のようになっています．なお，直接結ばれていない 2 都市間の距離は他の都市を経由したときの最短距離を採用します．

都市	人口
A 市	800
B 市	550
C 市	780
D 市	600
E 市	1020
F 市	360



前節の例題との違いは目的関数の部分だけです．このため，前節の例題での変数と制約条件についてはこの例題でもそのまま使用しますので詳細は前節を参照してください．

目的関数については，都市から出店地までの重み付き移動距離の最大値ということになります．まず，都市 i から都市 j までの重み付き移動距離を求めます．これは $x_{ij} = 1$ の時に意味を持つものですから i-j 間の距離，i の人口そして x_{ij} の 3 つを掛け合わせたものとなります．なお，$i = j$ の時にはこの積は常に 0 になりますので計算には含めないことにします．次に，今回のようなミニマックス問題の定式化での一つのテクニックとして変数 v を新たに導入します．この時，重み付き移動距離がそれぞれ v 以下であるという制約条件を加えることで v に重み付き移動距離の最大値という意味を持たせることができます．よって，変数 v 自身が目的関数となります．

以上のことから，次のように定式化できます．

0-1 変数

x_{AA}, x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{AE}, x_{AF}, x_{BA}, x_{BB}, x_{BC}, x_{BD}, x_{BE}, x_{BF}, x_{CA}, x_{CB}, x_{CC}, x_{CD}, x_{CE}, x_{CF}, x_{DA}, x_{DB}, x_{DC}, x_{DD}, x_{DE}, x_{DF}, x_{EA}, x_{EB}, x_{EC}, x_{ED}, x_{EE}, x_{EF}, x_{FA}, x_{FB}, x_{FC}, x_{FD}, x_{FE}, x_{FF}	0 または 1 をとる出店するのかと最も近い出店地はどこなのかを表す変数

連続変数

v	重み付き移動距離の最大値

目的関数（最小化）

v	重み付き移動距離の最大値

制約条件

$v \geq 800 \times 7x_{AB}$, $v \geq 800 \times 2x_{AC}$, $v \geq 800 \times 13x_{AD}$, $v \geq 800 \times 19x_{AE}$, $v \geq 800 \times 17x_{AF}$, $v \geq 550 \times 7x_{BA}$, $v \geq 550 \times 8x_{BC}$, $v \geq 550 \times 6x_{BD}$, $v \geq 550 \times 12x_{BE}$, $v \geq 550 \times 10x_{BF}$, $v \geq 780 \times 2x_{CA}$, $v \geq 780 \times 8x_{CB}$, $v \geq 780 \times 14x_{CD}$, $v \geq 780 \times 20x_{CE}$, $v \geq 780 \times 18x_{CF}$, $v \geq 600 \times 13x_{DA}$, $v \geq 600 \times 6x_{DB}$, $v \geq 600 \times 14x_{DC}$, $v \geq 600 \times 7x_{DE}$, $v \geq 600 \times 4x_{DF}$, $v \geq 1020 \times 19x_{EA}$, $v \geq 1020 \times 12x_{EB}$, $v \geq 1020 \times 20x_{EC}$, $v \geq 1020 \times 7x_{ED}$, $v \geq 1020 \times 3x_{EF}$, $v \geq 360 \times 17x_{FA}$, $v \geq 360 \times 10x_{FB}$, $v \geq 360 \times 18x_{FC}$, $v \geq 360 \times 4x_{FD}$, $v \geq 360 \times 3x_{FE}$	各重み付き移動距離は最大値を越えない
$x_{AA} + x_{BB} + x_{CC} + x_{DD} + x_{EE} + x_{FF} = 2$	2 都市に出店
$x_{AA} + x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} + x_{AE} + x_{AF} = 1$	A 市は 1 箇所に配分
$x_{BA} + x_{BB} + x_{BC} + x_{BD} + x_{BE} + x_{BF} = 1$	B 市は 1 箇所に配分
$x_{CA} + x_{CB} + x_{CC} + x_{CD} + x_{CE} + x_{CF} = 1$	C 市は 1 箇所に配分
$x_{DA} + x_{DB} + x_{DC} + x_{DD} + x_{DE} + x_{DF} = 1$	D 市は 1 箇所に配分
$x_{EA} + x_{EB} + x_{EC} + x_{ED} + x_{EE} + x_{EF} = 1$	E 市は 1 箇所に配分
$x_{FA} + x_{FB} + x_{FC} + x_{FD} + x_{FE} + x_{FF} = 1$	F 市は 1 箇所に配分
$x_{AB} \leq x_{BB}$, $x_{AC} \leq x_{CC}$, $x_{AD} \leq x_{DD}$, $x_{AE} \leq x_{EE}$, $x_{AF} \leq x_{FF}$, $x_{BA} \leq x_{AA}$, $x_{BC} \leq x_{CC}$, $x_{BD} \leq x_{DD}$, $x_{BE} \leq x_{EE}$, $x_{BF} \leq x_{FF}$, $x_{CA} \leq x_{AA}$, $x_{CB} \leq x_{BB}$, $x_{CD} \leq x_{DD}$, $x_{CE} \leq x_{EE}$, $x_{CF} \leq x_{FF}$, $x_{DA} \leq x_{AA}$, $x_{DB} \leq x_{BB}$, $x_{DC} \leq x_{CC}$, $x_{DE} \leq x_{EE}$, $x_{DF} \leq x_{FF}$, $x_{EA} \leq x_{AA}$, $x_{EB} \leq x_{BB}$, $x_{EC} \leq x_{CC}$, $x_{ED} \leq x_{DD}$, $x_{EF} \leq x_{FF}$, $x_{FA} \leq x_{AA}$, $x_{FB} \leq x_{BB}$, $x_{FC} \leq x_{CC}$, $x_{FD} \leq x_{DD}$, $x_{FE} \leq x_{EE}$	出店している都市に配分

この結果を C++SIMPLE で記述すると次のようになります.

center1.smp

```
// 変数の宣言
IntegerVariable
     x_AA(type = binary), x_AB(type = binary), x_AC(type = binary),
     x_AD(type = binary), x_AE(type = binary), x_AF(type = binary),
     x_BA(type = binary), x_BB(type = binary), x_BC(type = binary),
     x_BD(type = binary), x_BE(type = binary), x_BF(type = binary),
     x_CA(type = binary), x_CB(type = binary), x_CC(type = binary),
     x_CD(type = binary), x_CE(type = binary), x_CF(type = binary),
     x_DA(type = binary), x_DB(type = binary), x_DC(type = binary),
     x_DD(type = binary), x_DE(type = binary), x_DF(type = binary),
     x_EA(type = binary), x_EB(type = binary), x_EC(type = binary),
     x_ED(type = binary), x_EE(type = binary), x_EF(type = binary),
     x_FA(type = binary), x_FB(type = binary), x_FC(type = binary),
     x_FD(type = binary), x_FE(type = binary), x_FF(type = binary);
Variable v;

// 重み付き移動距離の最大値の最小化
Objective max_distance(type = minimize);
max_distance = v;
v >= 800 * 7 * x_AB;   v >= 800 * 2 * x_AC;   v >= 800 * 13 * x_AD;
v >= 800 * 19 * x_AE;  v >= 800 * 17 * x_AF;  v >= 550 * 7 * x_BA;
v >= 550 * 8 * x_BC;   v >= 550 * 6 * x_BD;   v >= 550 * 12 * x_BE;
v >= 550 * 10 * x_BF;  v >= 780 * 2 * x_CA;   v >= 780 * 8 * x_CB;
v >= 780 * 14 * x_CD;  v >= 780 * 20 * x_CE;  v >= 780 * 18 * x_CF;
v >= 600 * 13 * x_DA;  v >= 600 * 6 * x_DB;   v >= 600 * 14 * x_DC;
v >= 600 * 7 * x_DE;   v >= 600 * 4 * x_DF;   v >= 1020 * 19 * x_EA;
v >= 1020 * 12 * x_EB; v >= 1020 * 20 * x_EC; v >= 1020 * 7 * x_ED;
v >= 1020 * 3 * x_EF;  v >= 360 * 17 * x_FA;  v >= 360 * 10 * x_FB;
v >= 360 * 18 * x_FC;  v >= 360 * 4 * x_FD;   v >= 360 * 3 * x_FE;

// 出店と配分に関する制約条件
x_AA + x_BB + x_CC + x_DD + x_EE + x_FF == 2;
x_AA + x_AB + x_AC + x_AD + x_AE + x_AF == 1;
x_BA + x_BB + x_BC + x_BD + x_BE + x_BF == 1;
x_CA + x_CB + x_CC + x_CD + x_CE + x_CF == 1;
x_DA + x_DB + x_DC + x_DD + x_DE + x_DF == 1;
x_EA + x_EB + x_EC + x_ED + x_EE + x_EF == 1;
x_FA + x_FB + x_FC + x_FD + x_FE + x_FF == 1;
```

```
x_AB <= x_BB; x_AC <= x_CC; x_AD <= x_DD; x_AE <= x_EE; x_AF <= x_FF;
x_BA <= x_AA; x_BC <= x_CC; x_BD <= x_DD; x_BE <= x_EE; x_BF <= x_FF;
x_CA <= x_AA; x_CB <= x_BB; x_CD <= x_DD; x_CE <= x_EE; x_CF <= x_FF;
x_DA <= x_AA; x_DB <= x_BB; x_DC <= x_CC; x_DE <= x_EE; x_DF <= x_FF;
x_EA <= x_AA; x_EB <= x_BB; x_EC <= x_CC; x_ED <= x_DD; x_EF <= x_FF;
x_FA <= x_AA; x_FB <= x_BB; x_FC <= x_CC; x_FD <= x_DD; x_FE <= x_EE;
```

このままでは大変分かりにくいですので，前節と同様に C++SIMPLE での記述を簡潔なものにしていくことにします．この際，定式化については次のようなものにします．

集合	
$City = \{A, B, C, D, E, F\}$	都市の集合
0-1 変数	
$x_{ij}, i \in City, j \in City$	0 または 1 をとる出店するのかと最も近い出店地はどこなのかを表す変数
連続変数	
v	重み付き移動距離の最大値
定数	
$distance_{ij}, i \in City, j \in City$	都市 i から都市 j までの距離
$population_i, i \in City$	都市 i の人口
目的関数（最小化）	
v	重み付き移動距離の最大値
制約条件	
$v \geq population_i \cdot distance_{ij} \cdot x_{ij}, \forall i, j \in City, i \neq j$	各重み付き移動距離は最大値を越えない
$\sum_{i \in City} x_{ii} = 2$	2 都市に出店
$\sum_{j \in City} x_{ij} = 1, \forall i \in City$	各都市は 1 箇所に配分
$x_{ij} \leq x_{jj}, \forall i, j \in City, i \neq j$	出店している都市に配分

すると，C++SIMPLE では次のような簡潔な記述になります．

center2.smp

```
// 集合と添字
Set City;
```

```
Element i(set = City), j(set = City);

// パラメータ
Parameter distance(name = "2 都市間の距離", index = (i, j));
Parameter population(name = "都市の人口", index = i);

// 変数
IntegerVariable x(index = (i, j), type = binary);
Variable v;

// 目的関数
Objective max_distance(type = minimize);
max_distance = v;

// 制約条件
v >= population[i] * distance[i, j] * x[i, j];
sum(x[i, i], i) == 2;
sum(x[i, j], j) == 1;
x[i, j] <= x[j, j], i != j;

// 求解
solve();

// 結果出力
simple_printf("%s 市に出店する．\n", i, x[i,i].val == 1);
```

実行する際には，前節の例題と同様に次の 2 都市間の距離を表す csv ファイル（左）と各都市の人口を表す dat ファイル（右）を与えます．

distancedata_center2.csv

```
2 都市間の距離，A，B，C，D，E，F
A，0，7，2，13，19，17
B，7，0，8，6，12，10
C，2，8，0，14，20，18
D，13，6，14，0，7，4
E，19，12，20，7，0，3
F，17，10，18，4，3，0
```

populationdata_center2.dat

```
都市の人口 =
[A] 800
[B] 550
[C] 780
[D] 600
[E] 1020
[F] 360
;
```

このモデルを実行すると，前節の p メディアン問題の時の結果とは異なり，A 市と F 市に出店する

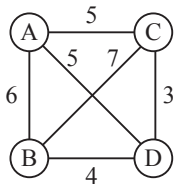
と良いことがわかります.

2.12 巡回セールスマン問題

巡回セールスマン問題とは，セールスマンがある都市から出発し，全ての都市を訪問して，出発地点に帰還する場合，どのような順番で都市を回るのが最短経路であるか，という問題です．この問題は最後に訪れる都市が出発地点でなくてもよいという設定もありますが，ここでは，最後に訪れる都市は出発地点であるという設定の問題を紹介します．また，一度訪れた都市を経由して別の都市に移動するような場合は考えないこととします.

■■例題

次のグラフは都市 A，B，C，D と，そのリンクの距離関係を表した図です.



ある都市から出発し，全ての都市を訪問して，出発地点に帰還する場合，どのような順番で都市を回ると最短経路となるでしょうか.

この問題を Nuorium Optimizer で解くために定式化を行います．本例題の定式化は文献 [4] からの引用です．“すべての都市を訪問して出発地点に帰還する”ということは，一筆書きの経路を考えるため，経路のどの都市を出発地点に解釈してもよいことになります．ここでは仮に都市 A を出発地点と解釈することにします.

変数について考えましょう．どの都市からどの都市に移っていくかを決定する問題ですので，ある都市から別のある都市に移動する場合に 1 をとり，移動しない場合に 0 をとるような 0-1 変数 x_{AB}, x_{AC}, x_{AD}, x_{BC}, x_{BD}, x_{CD}, x_{BA}, x_{CA}, x_{DA}, x_{CB}, x_{DB}, x_{DC} を導入します．例えば，x_{AB} は都市 A から都市 B に移動する場合に 1 をとり，移動しない場合には 0 をとります.

次に，最小化すべき目的関数は経路長になりますので，各都市間の距離を用いて，

$$6x_{AB} + 5x_{AC} + 5x_{AD} + 7x_{BC} + 4x_{BD} + 3x_{CD} + 6x_{BA} + 5x_{CA} + 5x_{DA} + 7x_{CB} + 4x_{DB} + 3x_{DC}$$

と表現することができます.

最後に制約条件です．巡回セールマン問題特有の制約，“すべての都市を訪問して帰還する”を定式化する必要があります．この制約は，“各都市から別都市の 1 つに移動する”，“各都市に別都市の 1 つから移動する”という制約を含みます．例えば，都市 A については，

$x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} = 1$：都市 A から別都市の 1 つに移動する

$x_{BA} + x_{CA} + x_{DA} = 1$：都市 A に別都市の 1 つから移動する

という制約が必要です.

上記の制約だけでは不十分であり，もう少し制約を加える必要があります．なぜならば，上記の場合には，$x_{AB} = x_{BA} = 1, x_{CD} = x_{DC} = 1$ となるような解，つまり一筆書きで全都市を訪問することができないような経路が許されてしまうからです．巡回セールスマン問題では，一筆書きの閉路をツアーと呼び，「都市 A →都市 B →都市 A」のような，すべての都市を訪問していないツアーを特にサブツアーと呼びます．巡回セールスマン問題では，上記制約に加えて“すべてのサブツアーを排除する”という制約が必要になります．この制約を表現するために，中間変数と呼ばれる変数 y_B, y_C, y_D を導入し，都市 B，都市 C，都市 D が関わるツアーを排除するという制約を導入します．この制約は，

$$y_B - y_C + 3x_{BC} \leq 2 \tag{1}$$

$$y_B - y_D + 3x_{BD} \leq 2 \tag{2}$$

$$y_C - y_B + 3x_{CB} \leq 2 \tag{3}$$

$$y_C - y_D + 3x_{CD} \leq 2 \tag{4}$$

$$y_D - y_B + 3x_{DB} \leq 2 \tag{5}$$

$$y_D - y_C + 3x_{DC} \leq 2 \tag{6}$$

と表現することができます．上記制約から，例えば，(1)，(3) の制約の両辺を足し合わせると，

$$3x_{BC} + 3x_{CB} \leq 4$$

となり，$x_{BC} = x_{CB} = 1$，すなわち「都市 B →都市 C →都市 B」のようなサブツアーを排除し，また，(1)，(4)，(5) の制約の両辺を足し合わせると，

$$3x_{BC} + 3x_{CD} + 3x_{DB} \leq 6$$

となり，$x_{BC} = x_{CD} = x_{DB} = 1$，すなわち，「都市 B →都市 C →都市 D →都市 B」のようなサブツアーを排除することができます．都市 A に関する情報が式に現れないのは，解となるツアーまでをも排除しないようにするためです．つまり，都市 A を含むツアーの内，都市 A 以外で構成されるツアーをすべて排除することを表現しています．

ところで中間変数 y_B, y_C, y_D は，訪れる都市の順番と考えられます．例えば，都市 B →都市 C なる経路を持つ，すなわち $x_{BC} = 1$ と仮定します．制約式 (1) は $y_C \geq y_B + 1$ を示します．また，(1)〜(6) がすべて同一の形をしていることから，$\max(y_c; c \in City) - \min(y_c; c \in City) \leq 2$ もわかるため，等号 $y_C = y_B + 1$ が成立することが導かれます．このようにして，y_c（c は B, C, D のいずれか）はステップ幅 1 をもって全順序が与えられます．次の制約式 (7)，(8)，(9) を導入することで，y_c は 1 から始まるように調整できます．このようにして全順序と，都市 A を出発してから再び都市 A に戻ってくるまでの巡回順を一致させることが可能です．

$$1 \leq y_B \leq 3 \tag{7}$$

$$1 \leq y_C \leq 3 \tag{8}$$

$$1 \leq y_D \leq 3 \tag{9}$$

以上のことから，次のように定式化することができます．

0-1 変数	
x_{AB}	都市 A から都市 B へ移動するか否か
x_{AC}	都市 A から都市 C へ移動するか否か
x_{AD}	都市 A から都市 D へ移動するか否か
x_{BC}	都市 B から都市 C へ移動するか否か
x_{BD}	都市 B から都市 D へ移動するか否か
x_{CD}	都市 C から都市 D へ移動するか否か
x_{BA}	都市 B から都市 A へ移動するか否か
x_{CA}	都市 C から都市 A へ移動するか否か
x_{DA}	都市 D から都市 A へ移動するか否か
x_{CB}	都市 C から都市 B へ移動するか否か
x_{DB}	都市 D から都市 B へ移動するか否か
x_{DC}	都市 D から都市 C へ移動するか否か

中間変数	
y_B	都市 B を巡回する順番
y_C	都市 C を巡回する順番
y_D	都市 D を巡回する順番

目的関数（最小化）	
$6x_{AB} + 5x_{AC} + 5x_{AD} + 7x_{BC} + 4x_{BD} + 3x_{CD} + 6x_{BA} + 5x_{CA} + 5x_{DA} + 7x_{CB} + 4x_{DB} + 3x_{DC}$	経路長

制約	
$x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} = 1$	都市 A から別都市の 1 つに移動する
$x_{BA} + x_{BC} + x_{BD} = 1$	都市 B から別都市の 1 つに移動する
$x_{CA} + x_{CB} + x_{CD} = 1$	都市 C から別都市の 1 つに移動する
$x_{DA} + x_{DB} + x_{DC} = 1$	都市 D から別都市の 1 つに移動する
$x_{BA} + x_{CA} + x_{DA} = 1$	都市 A に別都市の 1 つから移動する
$x_{AB} + x_{CB} + x_{DB} = 1$	都市 B に別都市の 1 つから移動する
$x_{AC} + x_{BC} + x_{DC} = 1$	都市 C に別都市の 1 つから移動する
$x_{AD} + x_{BD} + x_{CD} = 1$	都市 D に別都市の 1 つから移動する
$y_B - y_C + 3x_{BC} \leq 2$	サブツアー排除制約
$y_B - y_D + 3x_{BD} \leq 2$	サブツアー排除制約
$y_C - y_B + 3x_{CB} \leq 2$	サブツアー排除制約
$y_C - y_D + 3x_{CD} \leq 2$	サブツアー排除制約
$y_D - y_B + 3x_{DB} \leq 2$	サブツアー排除制約

$y_D - y_C + 3x_{DC} \leq 2$	サブツアー排除制約
$1 \leq y_B \leq 3$	都市 B を訪れる順番の上下限
$1 \leq y_C \leq 3$	都市 C を訪れる順番の上下限
$1 \leq y_D \leq 3$	都市 D を訪れる順番の上下限

この問題は，変数に 0-1 変数と連続変数が混ざっており，目的関数，制約式全てが線形なので，混合整数線形計画問題となります．定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります．

TSP1.smp

```
// 変数
IntegerVariable x_AB(name = "AtoB", type = binary);
IntegerVariable x_AC(name = "AtoC", type = binary);
IntegerVariable x_AD(name = "AtoD", type = binary);
IntegerVariable x_BC(name = "BtoC", type = binary);
IntegerVariable x_BD(name = "BtoD", type = binary);
IntegerVariable x_CD(name = "CtoD", type = binary);
IntegerVariable x_BA(name = "BtoA", type = binary);
IntegerVariable x_CA(name = "CtoA", type = binary);
IntegerVariable x_DA(name = "DtoA", type = binary);
IntegerVariable x_CB(name = "CtoB", type = binary);
IntegerVariable x_DB(name = "DtoB", type = binary);
IntegerVariable x_DC(name = "DtoC", type = binary);

// 目的関数
Objective route(name = "経路長", type = minimize);
route = 6 * x_AB + 5 * x_AC + 5 * x_AD + 7 * x_BC + 4 * x_BD + 3 * x_CD +
        6 * x_BA + 5 * x_CA + 5 * x_DA + 7 * x_CB + 4 * x_DB + 3 * x_DC;

// 中間変数
Variable y_B;
Variable y_C;
Variable y_D;

// 各都市から別都市の 1 つに移動する
x_AB + x_AC + x_AD == 1;
x_BA + x_BC + x_BD == 1;
x_CA + x_CB + x_CD == 1;
x_DA + x_DB + x_DC == 1;
```

```
// 各都市に別都市の 1 つから移動する
x_BA + x_CA + x_DA == 1;
x_AB + x_CB + x_DB == 1;
x_AC + x_BC + x_DC == 1;
x_AD + x_BD + x_CD == 1;

// サブツアーを排除する
y_B - y_C + 3 * x_BC <= 2;
y_B - y_D + 3 * x_BD <= 2;
y_C - y_B + 3 * x_CB <= 2;
y_C - y_D + 3 * x_CD <= 2;
y_D - y_B + 3 * x_DB <= 2;
y_D - y_C + 3 * x_DC <= 2;

// 各都市を通る順番は出発地点を除く都市数以下
1<=y_B<=3;
1<=y_C<=3;
1<=y_D<=3;

// 求解
solve();

// 出力
x_AB.val.print();
x_AC.val.print();
x_AD.val.print();
x_BC.val.print();
x_BD.val.print();
x_CD.val.print();
x_BA.val.print();
x_CA.val.print();
x_DA.val.print();
x_CB.val.print();
x_DB.val.print();
x_DC.val.print();
```

より汎用的に問題を定式化すると以下のようになります.

集合	
$City = \{A, B, C, D\}$	都市の集合
$City\_ = \{B, C, D\}$	出発地点以外の都市の集合
定数	
$dis_{c1c2}, c1 \in City, c2 \in City$	都市 $c1$ と都市 $c2$ の距離
num	集合 $City\_$ の要素数
0-1 変数	
$x_{c1c2}, c1 \in City, c2 \in City$	都市 $c1$ から都市 $c2$ に移動するか否か
中間変数	
$y_c, c \in City\_$	都市 c を通る順番
目的関数（最小化）	
$\sum_{c1 \in City, c2 \in City, c1 \neq c2} dis_{c1c2} x_{c1c2}$	経路長
制約	
$\sum_{c2 \in City, c1 \neq c2} x_{c1c2} = 1, \forall c1 \in City$	都市 $c1$ から別都市の 1 つに移動
$\sum_{c1 \in City, c1 \neq c2} x_{c1c2} = 1, \forall c2 \in City$	都市 $c2$ に別都市の 1 つから移動
$y_{c1} - y_{c2} + num \cdot x_{c1c2} \leq num - 1, c1 \in City\_, c2 \in City\_, c1 \neq c2$	サブツアーを排除
$1 \leq y_c \leq num, \forall c \in City\_$	都市 c を通る順番の上下限

次に，定数（各都市間の距離）をデータファイルから与える C++SIMPLE モデルを示します．このようにモデルとデータを分離することにより，都市数が変わったとしてもデータファイルを変更するだけで対応できるようになります．

TSP2.smp

```
// 集合と添字
Set City(name = "都市");
Element c1(set = City);
Element c2(set = City);
Set City_(name = "出発地点を除く都市");
Element c_(set = City_);
Element c1_(set = City_);
```

```
Element c2_(set = City_);

// パラメータ
Parameter dis(name = "距離", index = (c1, c2));
Parameter num = City_.card();

// 変数
IntegerVariable x(name = "移動", index = (c1, c2), type = binary);
Variable y(name = "順番", index = c_);

// 目的関数
Objective route(name = "経路長", type = minimize);
route = sum(x[c1, c2] * dis[c1, c2], ((c1, c2), c1 != c2));

// 各都市から 1 つの別都市へ移動する
sum(x[c1, c2], (c2, c1 != c2)) == 1;

// 各都市に 1 つの別都市から移動する
sum(x[c1, c2], (c1, c1 != c2)) == 1;

// サブツアーを排除する
y[c1_] - y[c2_] + num * x[c1_, c2_] <= num - 1, c1_ != c2_;

// 順番の上下限制約
1 <= y[c_] <= num;

// 求解
solve();

// 結果出力
x.val.print();
y.val.print();
route.val.print();
```

データファイル（.dat 形式）は以下のようになります.

data.dat

```
都市 = A B C D;
```

```
出発地点を除く都市 = B C D;

距離 =
[A, B] 6 [A, C] 5 [A, D] 5
[B, C] 7 [B, D] 4
[C, D] 3
[B, A] 6 [C, A] 5 [D, A] 5
[C, B] 7 [D, B] 4
[D, C] 3
;
```

このモデルを実行すると，$y[B] = 3, y[C] = 1, y[D] = 2$ となり，都市 A →都市 C →都市 D →都市 B →都市 A の順番で移動するのが最適解となります[1]．その経路長は 18 であることがわかります．

ここからは，やや上級者向けの説明です．先の説明では，変数 x は全ての都市と都市の間で定義されていました．しかしながら，この変数の立て方は冗長です．これを減らすことにより，さらに効率の良いモデルにすることができます．具体的には，変数 x は「異なる都市間」だけで定義すれば十分で同じ都市間の変数 $x_{c,c}$ は不要です．

以下は具体的なモデル例です．変数 x は二次元の集合 *CityToCity* 上で定義されています．このようにすることにより変数 x の数は「都市の数」だけ削減できています．

モデル例

```
// 集合と添字
Set City(name = "都市");
Element c1(set = City);
Element c2(set = City);
Set City_(name = "出発地点を除く都市");
Element c_(set = City_);
Element c1_(set = City_);
Element c2_(set = City_);

Set CityToCity(dim=2);
CityToCity = setOf( (c1, c2), c1 != c2 );
Element c12(set=CityToCity);

// パラメータ
Parameter dis(name = "距離", index = (c1, c2));
Parameter num = City_.card();
```

[1] 環境によっては逆回りに移動する解が出力されることがあります．

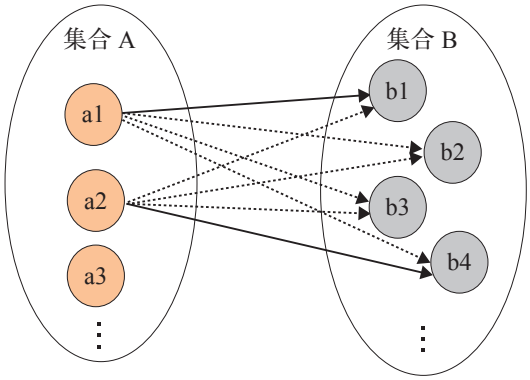
```
// 変数
IntegerVariable x(name = "移動", index = c12, type = binary);
Variable y(name = "順番", index = c_);

// 目的関数
Objective route(name = "経路長", type = minimize);
route = sum(x[c12] * dis[c12], c12);

// 各都市から 1 つの別都市へ移動する
sum(x[c1, c2], (c2, (c1, c2) < CityToCity)) == 1;

// 各都市に 1 つの別都市から移動する
sum(x[c1, c2], (c1, (c1, c2) < CityToCity)) == 1;

// サブツアーを排除する
y[c1_] - y[c2_] + num * x[c1_, c2_] <= num - 1, (c1_, c2_) < CityToCity;

// 順番の上下限制約
1 <= y[c_] <= num;

// 求解
solve();

// 結果出力
x.val.print();
y.val.print();
route.val.print();
```

2.13 割当問題

割当問題は現在多くの業務に利用されています．ここでは基本的な割当問題の例題を取り上げ，割当問題の定式化のテクニック，モデル化の例，大規模な問題に対するアプローチ法を紹介します．

2.13.1 割当問題とは

割当問題とは，集合 A の要素を集合 B の要素のどれに割り当てるかを決定する問題です．



また，割当問題はマス目を埋める問題に置き換えることができます．上記の図を，マス目を埋めるイメージで表すと以下の図のようになります．

	a1	a2	a3		
b1	○				
b2			○		
b3					
b4		○			

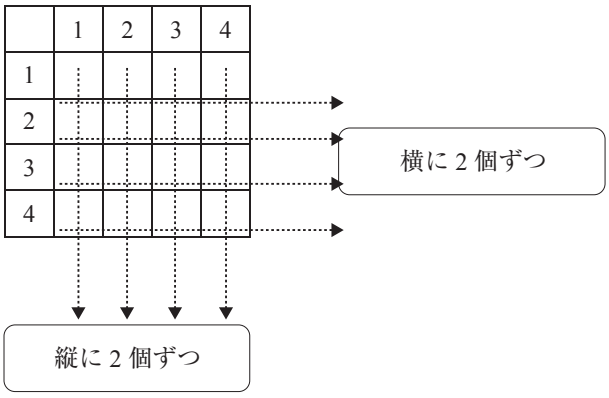
割当問題はマスの埋め方のルールを制約条件として与えることによって，個々の問題に対応する定式化を行うことができます．

2.13.2　基礎的なマス埋め割当問題

ここではまず，マス目を埋めるだけの問題を考えていきます．

例題

4×4 のマス目があります．このマスに石を置きたいのですが，全ての縦横に関して石の数が 2 つになるように配置します．さてどのように置けば良いでしょうか．



この問題を定式化するためには，0-1 変数を用いる必要があります．この問題の場合以下の図のように，各マスに対して 0-1 変数を対応させます．

	1	2	3	4
1	x11	x12	x13	x14
2	x21	x22	x23	x24
3	x31	x32	x33	x34
4	x41	x42	x43	x44

定式化をすると以下のようになります．

0-1 変数	
$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$ $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$ $x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}$ $x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}$	それぞれのマスに石を置くならば 1 置かないならば 0.
目的関数	
	この問題には目的関数はない
制約条件	
$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2$	1 行目を横に見たときに石を 2 つ置く
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 2$	2 行目を横に見たときに石を 2 つ置く
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2$	3 行目を横に見たときに石を 2 つ置く
$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 2$	4 行目を横に見たときに石を 2 つ置く
$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 2$	1 列目を縦に見たときに石を 2 つ置く
$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 2$	2 列目を縦に見たときに石を 2 つ置く
$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 2$	3 列目を縦に見たときに石を 2 つ置く
$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 2$	4 列目を縦に見たときに石を 2 つ置く

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります．

fieldassign1.smp

```
IntegerVariable x_11(type = binary);
IntegerVariable x_21(type = binary);
IntegerVariable x_31(type = binary);
IntegerVariable x_41(type = binary);

IntegerVariable x_12(type = binary);
IntegerVariable x_22(type = binary);
```

```
IntegerVariable x_32(type = binary);
IntegerVariable x_42(type = binary);

IntegerVariable x_13(type = binary);
IntegerVariable x_23(type = binary);
IntegerVariable x_33(type = binary);
IntegerVariable x_43(type = binary);

IntegerVariable x_14(type = binary);
IntegerVariable x_24(type = binary);
IntegerVariable x_34(type = binary);
IntegerVariable x_44(type = binary);

x_11 + x_12 + x_13 + x_14 == 2;
x_21 + x_22 + x_23 + x_24 == 2;
x_31 + x_32 + x_33 + x_34 == 2;
x_41 + x_42 + x_43 + x_44 == 2;

x_11 + x_21 + x_31 + x_41 == 2;
x_12 + x_22 + x_32 + x_42 == 2;
x_13 + x_23 + x_33 + x_43 == 2;
x_14 + x_24 + x_34 + x_44 == 2;

// 以下は出力用のプログラム
solve();
simple_printf("%d %d %d %d\n", x_11, x_12, x_13, x_14);
simple_printf("%d %d %d %d\n", x_21, x_22, x_23, x_24);
simple_printf("%d %d %d %d\n", x_31, x_32, x_33, x_34);
simple_printf("%d %d %d %d\n", x_41, x_42, x_43, x_44);
```

このモデルを Nuorium Optimizer で実行すると，最後に

```
0 1 0 1
0 0 1 1
1 1 0 0
1 0 1 0
```

という表示がされ，この例題の答えを確認できます．どの縦横にも二箇所ずつ石が置いてある（1 と表示されている）のが分かります．

さて，次にこの問題を C++SIMPLE の添字機能を用いてモデル化してみます．定式化は以下のよう

に変更します.

集合	
$I = \{1, 2, 3, 4\}$	行
$J = \{1, 2, 3, 4\}$	列

0-1 変数	
$x_{ij}, i \in I, j \in J$	マス (i, j) に石を置くならば $x_{ij} = 1$，置かないならば $x_{ij} = 0$ とする.

目的関数	
	この問題には目的関数はない

制約条件	
$\sum_i x_{ij} = 2, \forall j \in J$	各列 j は横に見たときに石を 2 つ置く
$\sum_j x_{ij} = 2, \forall i \in I$	各行 i は縦に見たときに石を 2 つ置く

添字を用いることにより，以下のように簡単にモデル記述することができます.

fieldassign2.smp

```
// 集合と添字
Set I = "1 2 3 4";
Element i(set = I);
Set J = "1 2 3 4";
Element j(set = J);

// 変数
IntegerVariable x(type = binary, index = (i, j));
sum(x[i, j], i) == 2;
sum(x[i, j], j) == 2;

// 求解
solve();

// 結果出力
simple_printf("%d %d %d %d\n", x[i, j], x[i, j + 1], x[i, j + 2], x[i, j + 3], j == 1);
```

2.13.3　仕事割当問題

ここでは，仕事を人に効率よく割り当てる問題を取り上げます．次の例題を考えます．

■■例題

「安藤」「佐藤」「鈴木」「山本」「渡辺」の 5 人に仕事を割り当てます．仕事は「接客」「厨房」「レジ打ち」「発注」「ごみ捨て」「買出し」「掃除」「仕込み」の 8 つです．各人を仕事に割り当てるにはコストがかかり，それは個人・仕事によって決まります．また，各人はそれぞれの仕事に対して熟練度があり，熟練度が高いほどコストがかかる傾向があります．以下は熟練度とコストをまとめたものです．

熟練度	安藤	佐藤	鈴木	山本	渡辺
接客	-1	3	-2	3	-4
厨房	5	-2	3	-4	5
レジ打ち	0	3	-2	3	-1
発注	-3	-1	1	1	2
ごみ捨て	1	-1	3	1	-1
買出し	-1	-1	1	0	2
掃除	2	-2	2	-3	4
仕込み	5	-2	0	1	5

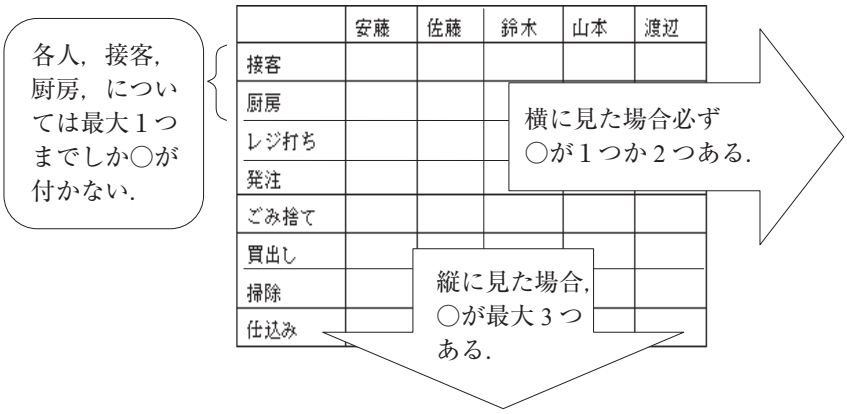
コスト	安藤	佐藤	鈴木	山本	渡辺
接客	570	1400	520	1410	450
厨房	1800	1000	1700	1050	2300
レジ打ち	800	1500	500	1500	600
発注	500	600	1000	1000	1200
ごみ捨て	800	600	1200	800	600
買出し	600	600	800	700	1300
掃除	1200	500	1200	500	1300
仕込み	1500	1000	1200	1200	1500

また，以下の点を守らなくてはいけません．

- 各人に割り振る仕事は，最大で 3 つまでとする．
- 「接客」「厨房」「レジ打ち」「掃除」「仕込み」は 2 人を割り当てる．
- 「発注」「ごみ捨て」「買出し」は 1 人を割り当てる．
- 「接客」「厨房」は別の人が担当する．
- 各仕事において，仕事を担当する人の熟練度の和を，その仕事のクオリティーとする．
- 各仕事のクオリティーは負になってはいけない．

このとき，コストの合計を最小にするような割り当て方を求めてください．

この問題も前節の問題と同様に以下のようなマス目に○をつける問題として考えることができます．



以上を踏まえて，以下のように定式化することができます．

集合	
JOB = {接客, 厨房, レジ打ち, 発注, ごみ捨て, 買出し, 掃除, 仕込み}	仕事の集合
$PEOPLE$ = {安藤, 佐藤, 鈴木, 山本, 渡辺}	人の集合
0-1 変数	
$x_{jp}, j \in JOB, p \in PEOPLE$	仕事 j を人 p に割り当てるならば $x_{jp} = 1$，そうでないならば $x_{jp} = 0$ とする
定数	
$cost_{jp}, j \in JOB, p \in PEOPLE$	仕事 j を人 p に割り当てる際のコスト
$jyukuren_{jp}, j \in JOB, p \in PEOPLE$	仕事 j を人 p が行う際の熟練度
目的関数（最小化）	
$\sum_{j,p} cost_{jp} \times x_{jp}$	コストの総和
制約条件	
$\sum_{p} x_{jp} = 2, \forall j \in$ {接客, 厨房, レジ打ち, 掃除, 仕込み}	「接客」「厨房」「レジ打ち」「掃除」「仕込み」は 2 人を割り当てる．
$\sum_{p} x_{jp} = 1, \forall j \in$ {発注, ごみ捨て, 買出し}	「発注」「ごみ捨て」「買出し」は 1 人を割り当てる．
$\sum_{j} x_{jp} \leq 3, \forall p \in PEOPLE$	各人には，最大 3 つまでの仕事を割り当てることができる

$\sum_{p} jyukuren_{jp} \times x_{jp} \geq 0, \forall j \in JOB$	各仕事のクオリティーが負になってはいけない
$\sum_{j,j \in \{接客,\ 厨房\}} x_{jp} \leq 1, \forall p \in PEOPLE$	接客，厨房は違う人が担当する（同じ人が接客と厨房を兼ねない）.

今回は定数に関してはファイルからデータを与えてみます．モデル部分は以下のようになります．

jobassign1.smp

```
// 集合と添字
Set Job;
Element j(set = Job);
Set People;
Element p(set = People);

// パラメータ
Parameter cost(index = (j, p), name = "コスト");
Parameter jyukuren(index = (j, p), name = "熟練度");

// 変数
IntegerVariable x(type = binary, index = (j, p));

// 目的関数
Objective total_cost(type = minimize, name = "総コスト");
total_cost = sum(cost[j, p] * x[j, p], (j, p));

// 制約条件
sum(x[j, p], p) == 2, j == "接客" || j == "厨房" || j == "レジ打ち" || j == "掃除" || j
== "仕込み";
sum(x[j, p], p) == 1, j == "発注" || j == "ごみ捨て" || j == "買出し";
sum(x[j, p], j) <= 3;
sum(x[j, p] * jyukuren[j, p], p) >= 0;
sum(x[j, p], (j, j == "接客" || j == "厨房")) <= 1;

// 求解
solve();

// 結果出力
total_cost.val.print();
simple_printf("%s, %s\n", j, p, x[j, p].val == 1);
```

```
simple_printf("\n");
simple_printf("%s のクオリティーは %d\n", j, sum(jyukuren[j, p] * x[j, p], p));
```

以下が csv 形式の入力ファイルです．コストに関してと熟練度に関しての二種類のファイルを用意する必要があります．

jyukuren.csv

```
熟練度，安藤，佐藤，鈴木，山本，渡辺
接客，-1，3，-2，3，-4
厨房，5，-2，3，-4，5
レジ打ち，0，3，-2，3，-1
発注，-3，-1，1，1，2
ごみ捨て，1，-1，3，1，-1
買出し，-1，-1，1，0，2
掃除，2，-2，2，-3，4
仕込み，5，-2，0，1，5
```

cost.csv

```
コスト，安藤，佐藤，鈴木，山本，渡辺
接客，570，1400，520，1410，450
厨房，1800，1000，1700，1050，2300
レジ打ち，800，1500，500，1500，600
発注，500，600，1000，1000，1200
ごみ捨て，800，600，1200，800，600
買出し，600，600，800，700，1300
掃除，1200，500，1200，500，1300
仕込み，1500，1000，1200，1200，1500
```

このモデルを Nuorium Optimizer で実行すると，最後に

```
総コスト = 13380
ごみ捨て，安藤
レジ打ち，佐藤
レジ打ち，渡辺
仕込み，山本
仕込み，鈴木
厨房，佐藤
厨房，鈴木
接客，安藤
接客，山本
```

```
掃除，安藤
掃除，佐藤
買出し，山本
発注，鈴木

ごみ捨てのクオリティーは 1
レジ打ちのクオリティーは 2
仕込みのクオリティーは 1
厨房のクオリティーは 1
接客のクオリティーは 2
掃除のクオリティーは 0
買出しのクオリティーは 0
発注のクオリティーは 1
```

という表示がされ，この例題の答えを確認できます．

■■例題

先ほどの問題に以下の条件を付け加えてください．

安藤に「接客」をさせることはできない
佐藤に「厨房」をさせることはできない
鈴木に「レジ打ち」をさせることはできない
山本に「発注」をさせることはできない
渡辺に「ごみ捨て」をさせることはできない

さて，この問題ですが通常に考えると先ほどの問題に以下の制約を付け加えることで解くことができます．また記述する位置は x の宣言以降，solve() の手前であればどこでもかまいません．

```
x["接客，安藤"] == 0;
x["厨房，佐藤"] == 0;
x["レジ打ち，鈴木"] == 0;
x["発注，山本"] == 0;
x["ごみ捨て，渡辺"] == 0;
```

上記記述を追加し，モデルを実行すると結果は以下のように変わります．

```
総コスト = 13470
ごみ捨て，安藤
レジ打ち，佐藤
レジ打ち，渡辺
仕込み，山本
```

```
仕込み，鈴木
厨房，安藤
厨房，山本
接客，佐藤
接客，鈴木
掃除，安藤
掃除，佐藤
買出し，山本
発注，鈴木

ごみ捨てのクオリティーは 1
レジ打ちのクオリティーは 2
仕込みのクオリティーは 1
厨房のクオリティーは 1
接客のクオリティーは 1
掃除のクオリティーは 0
買出しのクオリティーは 0
発注のクオリティーは 1
```

結果を見ると，総コストが多くなっていることが分かります．

以上の考え方は以下の図のように変数を準備し，色が付いているところが 0 であるという制約を設けたと考えることができます．（なお図中のレジはレジ打ち，ごみはごみ捨て，買出は買出し，仕込は仕込みです）

	安藤	佐藤	鈴木	山本	渡辺
接客	x[接客，安藤]	x[接客，佐藤]	x[接客，鈴木]	x[接客，山本]	x[接客，渡辺]
厨房	x[厨房，安藤]	x[厨房，佐藤]	x[厨房，鈴木]	x[厨房，山本]	x[厨房，渡辺]
レジ打ち	x[レジ，安藤]	x[レジ，佐藤]	x[レジ，鈴木]	x[レジ，山本]	x[レジ，渡辺]
発注	x[発注，安藤]	x[発注，佐藤]	x[発注，鈴木]	x[発注，山本]	x[発注，渡辺]
ごみ捨て	x[ごみ，安藤]	x[ごみ，佐藤]	x[ごみ，鈴木]	x[ごみ，山本]	x[ごみ，渡辺]
買出し	x[買出，安藤]	x[買出，佐藤]	x[買出，鈴木]	x[買出，山本]	x[買出，渡辺]
掃除	x[掃除，安藤]	x[掃除，佐藤]	x[掃除，鈴木]	x[掃除，山本]	x[掃除，渡辺]
仕込み	x[仕込，安藤]	x[仕込，佐藤]	x[仕込，鈴木]	x[仕込，山本]	x[仕込，渡辺]

ここで，上の図の色のついている部分は 1 になることがないので，はじめから変数を準備する必要がないと考えることが出来ます．特に大規模の割当問題においては，無駄な変数を準備することにより不用意に問題の規模を大きくしてしまうと，計算のパフォーマンスを著しく低下させてしまう要因になります．ここでは明らかな制約に関しては「制約を付け加えることなく，そのような選択肢を元々準備しない」という方法を紹介します．以下の図のようなイメージです．

	安藤	佐藤	鈴木	山本	渡辺
接客		x[接客，佐藤]	x[接客，鈴木]	x[接客，山本]	x[接客，渡辺]
厨房	x[厨房，安藤]		x[厨房，鈴木]	x[厨房，山本]	x[厨房，渡辺]
レジ打ち	x[レジ，安藤]	x[レジ，佐藤]		x[レジ，山本]	x[レジ，渡辺]
発注	x[発注，安藤]	x[発注，佐藤]	x[発注，鈴木]		x[発注，渡辺]
ごみ捨て	x[ごみ，安藤]	x[ごみ，佐藤]	x[ごみ，鈴木]	x[ごみ，山本]	
買出し	x[買出，安藤]	x[買出，佐藤]	x[買出，鈴木]	x[買出，山本]	x[買出，渡辺]
掃除	x[掃除，安藤]	x[掃除，佐藤]	x[掃除，鈴木]	x[掃除，山本]	x[掃除，渡辺]
仕込み	x[仕込，安藤]	x[仕込，佐藤]	x[仕込，鈴木]	x[仕込，山本]	x[仕込，渡辺]

定式化する際に，上記を表す集合 *JPPair* を準備する必要があります．

- $(j, p) \in JPPair \Leftrightarrow j$ を p に割り当てることができる

以下が *JPPair* を用いた定式化です．

集合	
JOB = {接客, 厨房, レジ打ち, 発注, ごみ捨て, 買出し, 掃除, 仕込み}	仕事の集合，$j \in JOB$
$PEOPLE$ = {安藤, 佐藤, 鈴木, 山本, 渡辺}	人の集合，$p \in PEOPLE$
$(j, p) \in JPPair \Leftrightarrow j$ を p に割り当てることができる	

0-1 変数	
$x_{jp}, (j, p) \in JPPair$	仕事 j を人 p に割り当てるならば $x_{jp} = 1$，そうでないならば $x_{jp} = 0$ とする

定数	
$cost_{jp}, (j, p) \in JPPair$	仕事 j を人 p に割り当てる際のコスト
$jyukuren_{jp}, (j, p) \in JPPair$	仕事 j を人 p が行う際の熟練度

目的関数（最小化）	
$\sum_{j,p,(j,p)\in JPPair} cost_{jp} \times x_{jp}$	コストの総和

制約条件	
$\sum_{p,(j,p)\in JPPair} x_{jp} = 2, \forall j \in$ {接客, 厨房, レジ打ち, 掃除, 仕込み}	「接客」「厨房」「レジ打ち」「掃除」「仕込み」は 2 人を割り当てる．
$\sum_{p,(j,p)\in JPPair} x_{jp} = 1, \forall j \in$ {発注, ごみ捨て, 買出し}	「発注」「ごみ捨て」「買出し」は 1 人を割り当てる

$\sum_{j,(j,p)\in JPPair} x_{jp} \leq 3$	各人には，最大 3 つまで仕事を割り当てることができる
$\sum_{p,(j,p)\in JPPair} jyukuren_{jp} \times x_{jp} \geq 0$	各仕事のクオリティーが負になってはいけない
$\sum_{(j,p),j\in\{接客,\ 厨房\},(j,p)\in JPPair} x_{jp} \leq 1$	接客，厨房は違う人が担当する.

モデルは以下のようになります.

jobassign3.smp

```
// 集合と添字
Set Job;
Element j(set = Job);
Set People;
Element p(set = People);
Set JPPair(dim = 2, superSet = (Job, People));
Element jp(set = JPPair);

// パラメータ
Parameter cost(index = jp, name = "コスト");
Parameter jyukuren(index = jp, name = "熟練度");

// 変数
IntegerVariable x(type = binary, index = jp);

// 目的関数
Objective total_cost(type = minimize, name = "総コスト");
total_cost = sum(cost[j, p] * x[j, p], (j, p, (j, p) < JPPair));

// 制約条件
sum(x[j, p], (p, (j, p) < JPPair)) == 2, j == "接客" || j == "厨房" || j == "レジ打ち"
|| j == "掃除" || j == "仕込み";
sum(x[j, p], (p, (j, p) < JPPair)) == 1, j == "発 注" || j == "ごみ捨て" || j == "買出
し";
sum(x[j, p], (j, (j, p) < JPPair)) <= 3;
sum(x[j, p] * jyukuren[j, p], (p, (j, p) < JPPair)) >= 0;
sum(x[j, p], (j, (j, p) < JPPair, j == "接客" || j == "厨房")) <= 1;

// 求解
```

```
solve();

// 結果出力
total_cost.val.print();
simple_printf("%s, %s\n", jp.at(1), jp.at(2), x[jp].val == 1);
simple_printf("\n");
simple_printf("%s のクオリティーは %d\n", j, sum(jyukuren[j, p] * x[j, p], (p, (j, p) <
JPPair)));
```

上記記述内の JPPair には無駄な [j, p] のペアを入れてはいけないので，入力ファイルもそれに伴い以下のように変わります.

jp.csv

```
j，p，熟練度，コスト
接客，佐藤，3，1400
接客，鈴木，-2，520
接客，山本，3，1410
接客，渡辺，-4，450
厨房，安藤，5，1800
厨房，鈴木，3，1700
厨房，山本，-4，1050
厨房，渡辺，5，2300
レジ打ち，安藤，0，800
レジ打ち，佐藤，3，1500
レジ打ち，山本，3，1500
レジ打ち，渡辺，-1，600
発注，安藤，-3，500
発注，佐藤，-1，600
発注，鈴木，1，1000
発注，渡辺，2，1200
ごみ捨て，安藤，1，800
ごみ捨て，佐藤，-1，600
ごみ捨て，鈴木，3，1200
ごみ捨て，山本，1，800
買出し，安藤，-1，600
買出し，佐藤，-1，600
買出し，鈴木，1，800
買出し，山本，0，700
買出し，渡辺，2，1300
```

```
掃除，安藤，2，1200
掃除，佐藤，-2，500
掃除，鈴木，2，1200
掃除，山本，-3，500
掃除，渡辺，4，1300
仕込み，安藤，5，1500
仕込み，佐藤，-2，1000
仕込み，鈴木，0，1200
仕込み，山本，1，1200
仕込み，渡辺，5，1500
```

またこのモデルを制約充足問題ソルバ wcsp を用いる場合にはモデルを以下のように変更する必要があります.

jobassign4.smp

```
// 集合と添字
Set Job;
Element j(set = Job);
Set People;
Element p(set = People);
Set JPPair(dim = 2, superSet = (Job, People));
Element jp(set = JPPair);

// パラメータ
Parameter cost(index = jp, name = "コスト");
Parameter jyukuren(index = jp, name = "熟練度");

// 変数
IntegerVariable x(type = binary, index = jp);

// 目的関数
Objective total_cost(type = minimize, name = "総コスト");
total_cost = sum(cost[j, p] * x[j, p], (j, p, (j, p) < JPPair));

// 制約条件
sum(x[j, p], (p, (j, p) < JPPair)) == 2, j == "接客" || j == "厨房" || j == "レジ打ち"
|| j == "掃除" || j == "仕込み";
selection(x[j, p], (p, (j, p) < JPPair)), j == "発注" || j == "ごみ捨て" || j == "買出
し"; // wcsp 特有の関数 selection
```

```
sum(x[j, p], (j, (j, p) < JPPair)) <= 3;
sum(x[j, p] * jyukuren[j, p], (p, (j, p) < JPPair)) >= 0;
sum(x[j, p], (j, (j, p) < JPPair, j == "接客" || j == "厨房")) <= 1;

// 求解
options.method = "wcsp"; // 解法に wcsp を用いる指定
options.maxtim = 10; // 計算時間の設定
solve();

// 結果出力
total_cost.val.print();
simple_printf("%s, %s\n", jp.at(1), jp.at(2), x[jp].val == 1);
simple_printf("\n");
simple_printf("%s のクオリティーは %d\n", j, sum(jyukuren[j, p] * x[j, p], (p, (j, p) <
JPPair)));
```

大規模な割当問題を解く際の問題規模に対する対応として上記で紹介した手法を試してみてください.

2.14 二次割当問題

二次割当問題とは，1957 年 Koopmans と Beckmann により考案された，目的関数が二次式となる割当問題です.

■■例題

工場 1，..，5 を地区 I，..，V に配置することを考えます．ただし，各工場間での物資を輸送する量，頻度などのフロー量，および各地区間の距離が，以下のように与えられているとします.

各工場のフロー						各地域間の距離					
	1	2	3	4	5		I	II	III	IV	V
1	0	15	12	8	7	I	0	4	7	6	10
2	15	0	14	2	4	II	4	0	2	5	4
3	12	14	0	6	6	III	7	2	0	8	7
4	8	2	6	0	11	IV	6	5	8	0	12
5	7	4	6	11	0	V	10	4	7	12	0

物資の輸送コストを（フロー）×（距離）で与えるとき，最もコストがかからない配置を求めなさい.

この問題は，工場間のフロー行列を $F = (f_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$，地区間の距離行列を $D = (d_{kl})_{1\leq k,l\leq n}$ とすると，二

次割当問題は以下の整数計画問題に定式化されます.

集合	
Fac	工場の集合
Loc	地区の集合
定数	
$f_{ij}, i, j \in Fac$	各工場間のフロー
$d_{kl}, k, l \in Loc$	各地区間の距離
変数	
$x_{ik}, i \in Fac, k \in Loc$	工場 i を地区 k に配置する場合 1 それ以外は 0
目的関数（最小化）	
$\sum_{i,j,k,l} f_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl}$	輸送コストの総和
制約条件	
$\sum_{i} x_{ik} = 1, k = 1, 2, \ldots, n$	各地区に割り当てられる工場は一つ
$\sum_{k} x_{ik} = 1, i = 1, 2, \ldots, n$	各工場に割り当てる地区は一つ

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります.

QAP.smp

```
// 集合と添字
Set Fac;
Element i(set = Fac), j(set = Fac);
Set Loc;
Element k(set = Loc), l(set = Loc);

// パラメータ
Parameter f(index=(i,j));
Parameter d(index=(k,l));

// 変数
IntegerVariable x(index = (i, k), type = binary);

// 目的関数
Objective total_cost(type = minimize);
```

```
total_cost = sum(f[i,j]*d[k,l]*x[i,k]*x[j,l],(i,j,k,l));

// 制約条件
sum(x[i,k], k) == 1;
sum(x[i,k], i) == 1;

// 求解
options.method = "wcsp";
options.maxtim = 10;
solve();

// 結果出力
simple_printf("工場 %d を地区 %s に配置する\n", i, k, x[i,k].val == 1);
```

以下が csv 形式の入力ファイルです.

F.csv

```
f, 1, 2, 3, 4, 5
1, 0, 15, 12, 8, 7
2, 15, 0, 14, 2, 4
3, 12, 14, 0, 6, 6
4, 8, 2, 6, 0, 11
5, 7, 4, 6, 11, 0
```

D.csv

```
d, I, II, III, IV, V
I, 0, 4, 7, 6, 10
II, 4, 0, 2, 5, 4
III, 7, 2, 0, 8, 7
IV, 6, 5, 8, 0, 12
V, 10, 4, 7, 12, 0
```

このモデルを実行すると次のような結果が得られます.

```
工場 1 を地区 II に配置する
工場 2 を地区 V に配置する
工場 3 を地区 III に配置する
工場 4 を地区 IV に配置する
工場 5 を地区 I に配置する
```

2.15 設備計画問題

設備計画問題として以下の例題では，電力を購入して生産を行っている工場が，自家発電用の発電機を導入する問題を考えます.

■■例題

電力を購入して生産を行っているある工場が，自家発電用の発電機の導入を計画しています．ただしその際，購入したスポット電力と自家発電の電力の和が，想定されるすべての時刻で電力需要を

上回らなければなりません．なお，購入を想定するスポット電力商品は次の 3 つとします．スポット電力ですので，時刻毎に購入する商品を変更することが可能です．ただし，各時刻において必ず 1 つの商品を選択して購入しなければなりません．

商品	1	2	3
出力電力（kWh）	5	10	20
単位時間あたりのコスト	10	20	30

また，新たに導入する候補となる発電機は，以下の 6 種類とします．発電機を導入しますと，以下のような定常的な出力が得られるものとします．

発電機	1	2	3	4	5	6
出力電力（kWh）	5	6	8	10	15	20
導入コスト	100	120	150	160	280	300

時刻 t = 1,...,24 について電力需要予想 D_t は以下のように与えられているものとします．スポット電力購入コストと発電機導入コストの和を最小化するような，発電機の導入方法およびスポット電力の購入方法を求めてください．

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D_t	10	10	12	12	15	20	30	30	35	40	50	56

t	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
D_t	52	47	40	35	42	50	48	40	30	20	15	12

この問題の定式化は，以下のようになります．

集合	
Product	商品集合
Dynamo	発電機集合
Time	時刻集合

定数	
$costS_i, i \in Product$	各商品に対する単位時間あたりのコスト
$costP_j, j \in Dynamo$	各発電機に対する導入コスト
$p_i, i \in Product$	各商品の単位時間あたりの出力電力
$q_j, j \in Dynamo$	各発電機の単位時間あたりの出力電力
$D_t, t \in Time$	時刻ごとの電力需要

0-1 整数変数

$u_i^t, i \in Product, t \in Time$	各時刻ごとに各商品について，利用するならば 1，利用しないならば 0
$x_j, j \in Dynamo$	各発電機に関して，導入するならば 1，しないならば 0

目的関数（最小化）

$\sum_{i,t} costS_i \times u_i^t + \sum_j costP_j \times x_j$	総コスト（スポット電力購入コストと発電機導入コストの和）の最小化

制約条件

$\sum_i u_i^t = 1, \forall t \in Time$	各時刻における商品の使用は 1 つのみ
$D_t - \sum_i p_i \times u_i^t \leq \sum_j q_j \times x_j, \forall t \in Time$	すべての時刻において，購入したスポット電力と自家発電の出力電力の和が電力需要を上回らないといけない

定式化の結果を C++SIMPLE で記述すると次のようになります.

FPP.smp

```
// 集合と添字
Set Product;
Element i(set = Product);
Set Time;
Element t(set = Time);
Set Dynamo;
Element j(set = Dynamo);

// パラメータ
Parameter costS(name = "costS", index = i); // 各商品に対する単位時間あたりのコスト
Parameter costP(name = "costP", index = j); // 各発電機に対する導入コスト
Parameter p(name = "p", index=i); // 各商品の単位時間あたりの出力電力
Parameter q(name = "q", index=j); // 各発電機の単位時間あたりの出力電力
Parameter D(name = "D", index=t); // 時刻ごとの電力需要

// 変数
IntegerVariable u(name = "商品", index = (i, t), type = binary); // 各時間ごとに，どの商品を利用するか
IntegerVariable x(name = "発電機", index = j, type = binary); // どの発電機を導入するか
```

```
// 目的関数
Objective cost(name = "総コスト", type = minimize);
cost = sum(costS[i] * u[i, t], (i, t)) + sum(costP[j] * x[j], j);

// 各時間における商品の使用は 1 つのみ
selection(u[i, t], i);

// すべての時刻において，購入したスポット電力と自家発電の出力電力の和が電力需要を上回らないといけない
D[t] - sum(p[i] * u[i, t], i) <= sum(q[j] * x[j], j);

// 求解
options.maxtim = 5; // 最大求解時間の設定
solve();

// 結果出力
cost.val.print();
x.val.print();
u.val.print();
```

データファイル（dat 形式）は以下のようになります.

data.dat

```
costS = [1] 10 [2] 20 [3] 30;
costP = [1] 100 [2] 120 [3] 150 [4] 160 [5] 280 [6] 300;

p = [1] 5 [2] 10 [3] 20;
q = [1] 5 [2] 6 [3] 8 [4] 10 [5] 15 [6] 20;

D = [1] 10 [2] 10 [3] 12 [4] 12 [5] 15 [6] 20 [7] 30 [8] 30
    [9] 35 [10] 40 [11] 50 [12] 56 [13] 52 [14] 47 [15] 40 [16] 35
    [17] 42 [18] 50 [19] 48 [20] 40 [21] 30 [22] 20 [23] 15 [24] 12
;
```

このモデルを実行すると，以下のような解が得られ，発電機の導入方法および電力の購入方法が求まりました.

```
総コスト = 950
発電機[1] = 0
発電機[2] = 0
発電機[3] = 1
発電機[4] = 1
発電機[5] = 0
発電機[6] = 1
```

```
商品[1,1] = 1
商品[1,2] = 1
商品[1,3] = 1
商品[1,4] = 1
商品[1,5] = 1
商品[1,6] = 1
商品[1,7] = 1
商品[1,8] = 1
商品[1,9] = 1
商品[1,10] = 1
商品[1,11] = 0
商品[1,12] = 0
商品[1,13] = 0
商品[1,14] = 0
商品[1,15] = 1
商品[1,16] = 1
商品[1,17] = 1
商品[1,18] = 0
商品[1,19] = 0
商品[1,20] = 1
商品[1,21] = 1
商品[1,22] = 1
商品[1,23] = 1
商品[1,24] = 1
```

```
商品[2,1] = 0
商品[2,2] = 0
商品[2,3] = 0
商品[2,4] = 0
商品[2,5] = 0
商品[2,6] = 0
商品[2,7] = 0
商品[2,8] = 0
商品[2,9] = 0
商品[2,10] = 0
商品[2,11] = 0
商品[2,12] = 0
商品[2,13] = 0
商品[2,14] = 1
商品[2,15] = 0
商品[2,16] = 0
商品[2,17] = 0
商品[2,18] = 0
商品[2,19] = 1
商品[2,20] = 0
商品[2,21] = 0
商品[2,22] = 0
商品[2,23] = 0
商品[2,24] = 0
```

```
商品[3,1] = 0
商品[3,2] = 0
商品[3,3] = 0
商品[3,4] = 0
商品[3,5] = 0
商品[3,6] = 0
商品[3,7] = 0
商品[3,8] = 0
商品[3,9] = 0
商品[3,10] = 0
商品[3,11] = 1
商品[3,12] = 1
商品[3,13] = 1
商品[3,14] = 0
商品[3,15] = 0
商品[3,16] = 0
商品[3,17] = 0
商品[3,18] = 1
商品[3,19] = 0
商品[3,20] = 0
商品[3,21] = 0
商品[3,22] = 0
商品[3,23] = 0
商品[3,24] = 0
```

2.16 最小二乗問題

最小二乗問題は，科学や工学の分野でよく利用される基本的な問題です．この問題の典型的な例としては，曲線の当てはめがあります．実験により得られたデータをモデル曲線に当てはめ定数を推定していくことを考えます．すると，一般に各観測点においてデータとモデルの間には誤差が発生してしまいます．この時，「各観測点における誤差の二乗和を最小にする」という基準を採用しなるべく良い曲線に当てはめようとすると最小二乗問題となります．

■■例題

A さんは，実験開始から t 秒後の y という値を計測するという実験を行いました．その結果をまとめると，下の表のようになりました．A さんはこの結果をプロットしたところ，$f(t) = at^2 + bt + c$ という二次関数モデルに当てはめられることに気付きました．そこで，各計測時刻でのデータ値とモデルから得られる値との誤差の二乗和が最小になるように a, b, c を推定してください．

t	y
0.5	1.22470
1.0	0.87334
1.5	0.99577
2.0	1.34215
2.5	2.12172
3.0	3.22933
3.5	4.44744
4.0	6.13509
4.5	8.14697
5.0	10.50759

この例題において，変数となるのは推定する a, b, c の 3 つです．また，ある計測時刻 t でのデータ値 $y(t)$ とモデルから得られる値 $f(t)$ との誤差は $at^2+bt+c-y(t)$ となります．よって，各計測時刻について誤差の二乗を求め，その総和をとることで最小化する目的関数が得られます．

以上のことから，この例題は次のように定式化できます．

変数	
a	2 次の項の係数
b	1 次の項の係数
c	定数項

目的関数（最小化）	
$(0.5^2a+0.5b+c-1.22470)^2+(1.0^2a+1.0b+c-0.87334)^2+(1.5^2a+1.5b+c-0.99577)^2+(2.0^2a+2.0b+c-1.34215)^2+(2.5^2a+2.5b+c-2.12172)^2+(3.0^2a+3.0b+c-3.22933)^2+(3.5^2a+3.5b+c-4.44744)^2+(4.0^2a+4.0b+c-6.13509)^2+(4.5^2a+4.5b+c-8.14697)^2+(5.0^2a+5.0b+c-10.50759)^2$	各計測時刻における誤差の二乗和

ここで，この結果を C++SIMPLE で何も工夫せずに記述すると次のようになります．

leastsquare1.smp

```
// 変数の宣言
Variable a(name = "2 次の項の係数");
Variable b(name = "1 次の項の係数");
Variable c(name = "定数項");
```

```
// 誤差の二乗和の最小化
Objective err(type = minimize);
err =
    (0.5 * 0.5 * a + 0.5 * b + c - 1.2247) * (0.5 * 0.5 * a + 0.5 * b + c - 1.2247) +
    (1.0 * 1.0 * a + 1.0 * b + c - 0.87334) * (1.0 * 1.0 * a + 1.0 * b + c - 0.87334) +
    (1.5 * 1.5 * a + 1.5 * b + c - 0.99577) * (1.5 * 1.5 * a + 1.5 * b + c - 0.99577) +
    (2.0 * 2.0 * a + 2.0 * b + c - 1.34215) * (2.0 * 2.0 * a + 2.0 * b + c - 1.34215) +
    (2.5 * 2.5 * a + 2.5 * b + c - 2.12172) * (2.5 * 2.5 * a + 2.5 * b + c - 2.12172) +
    (3.0 * 3.0 * a + 3.0 * b + c - 3.22933) * (3.0 * 3.0 * a + 3.0 * b + c - 3.22933) +
    (3.5 * 3.5 * a + 3.5 * b + c - 4.44744) * (3.5 * 3.5 * a + 3.5 * b + c - 4.44744) +
    (4.0 * 4.0 * a + 4.0 * b + c - 6.13509) * (4.0 * 4.0 * a + 4.0 * b + c - 6.13509) +
    (4.5 * 4.5 * a + 4.5 * b + c - 8.14697) * (4.5 * 4.5 * a + 4.5 * b + c - 8.14697) +
    (5.0 * 5.0 * a + 5.0 * b + c - 10.50759) * (5.0 * 5.0 * a + 5.0 * b + c - 10.50759);

// 求解し結果を表示する
solve();
a.val.print();
b.val.print();
c.val.print();
```

これでは，何回も実験を行うような場合モデルファイルの修正に大変な手間がかかってしまい効率的ではありません．そこで，C++SIMPLE の特長を生かし様々な測定結果に対応できるように定式化から見直していきます．

まず，ある計測時刻 t でのデータ値 $y(t)$ とモデルから得られる値 $f(t)$ との誤差を $e(t)$ と表すことにします．すると，先ほどの議論から $e(t) = at^2 + bt + c - y(t)$ となります．これより，目的関数は $e(t)^2$ を t について和をとったものと言えます．C++SIMPLE においては，Expression を用いることで数式を宣言できます．よって，$e(t)$ を Expression で記述することでモデルファイルをより簡潔なものにできます．また，二乗和を求める部分についても観測時間の集合を導入することで sum() を用い簡単に記述できます．最後に，各計測時刻 t における $y(t)$ の値は直接モデルファイルに記述するのではなく csv ファイルから与えることにします．

以上のことから，次のように定式化しなおすことができます．

集合	
$ObserveTime$ = {0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0}	観測時間の集合

変数	
a	2 次の項の係数
b	1 次の項の係数

c	定数項

定数

$y(t), t \in ObserveTime$	時刻 t における観測値

目的関数（最小化）

$\sum_{t \in ObserveTime} e(t)^2 = \sum_{t \in ObserveTime} (at^2 + bt + c - y(t))^2$	各観測時刻における誤差の二乗和

この結果を C++SIMPLE で記述すると次のようになり，先ほどのものに比べ汎用性が高くさらに見やすいものになっています.

leastsquare2.smp

```
// 集合と添字
Set ObserveTime;
Element t(set = ObserveTime);

// パラメータ
Parameter y(index = t); // 観測値

// 変数
Variable a(name = "2 次の項の係数");
Variable b(name = "1 次の項の係数");
Variable c(name = "定数項");

// 誤差を Expression を用いて表現する
Expression e(index = t);
e[t] = a * t * t + b * t + c - y[t];

// 目的関数
Objective err(type = minimize);
err = sum(e[t] * e[t], t);

// 求解
solve();

// 結果出力
a.val.print();
```

```
b.val.print();
c.val.print();
```

なお，実行させる際には次のような csv ファイルを与えます．

data_leastsquare2.csv

```
t, y
0.5, 1.22470
1.0, 0.87334
1.5, 0.99577
2.0, 1.34215
2.5, 2.12172
3.0, 3.22933
3.5, 4.44744
4.0, 6.13509
4.5, 8.14697
5.0, 10.50759
```

このモデルを実行すると，最後に

```
2 次の項の係数 = 0.644402
1 次の項の係数 = -1.47656
定数項 = 1.76057
```

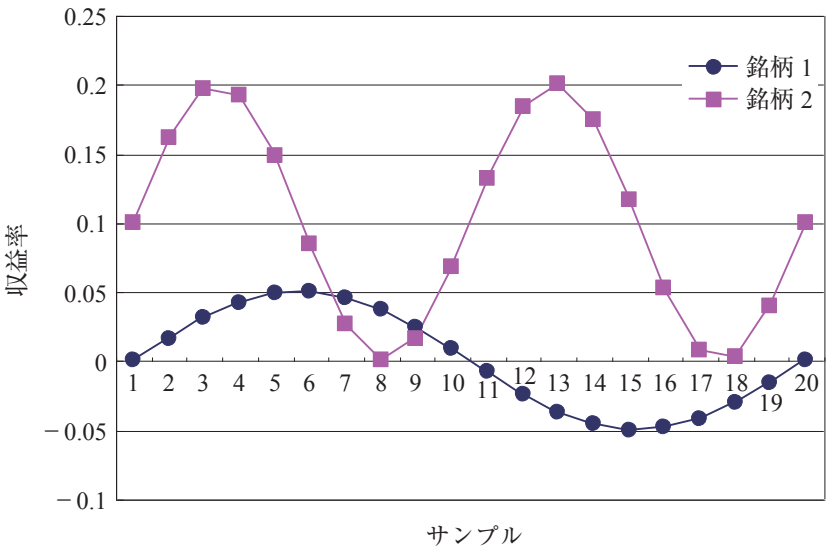
という表示がされます．このことから，$f(t) = 0.644402t^2 - 1.47656t + 1.76057$ という二次関数モデルが推定できたことになります．

2.17 ポートフォリオ最適化問題

ここでは，ポートフォリオが与える収益率の分布を評価する統計量として平均と分散を用いるマルコビッツモデルの例を示します．具体的にはポートフォリオのもたらす収益率の変動の大きさ（リスク）を分散で計測することにし，それを最小化するような資産配分を求めます．

例題

銘柄 1，2 に対する収益率のサンプル 20 期分が以下の図のように得られているとします．



この収益率のサンプルを用いてポートフォリオの収益率の分散が最小となる投資配分を求めます．ただし，空売りはできないものとし，またポートフォリオの収益率の期待値は 0 以上とします．

この問題を定式化すると以下のようになります．

集合	
$Asset = \{1, 2\}$	銘柄の集合
$Sample = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$	サンプルの集合

定数	
$r_{tj}, t \in Sample, j \in Asset$	サンプル t における銘柄 j の収益率
$\bar{r}_j = \sum_{t \in Sample} r_{tj} / \lvert Sample \rvert, j \in Asset$	銘柄 j の平均収益率

変数	
$x_j, j \in Asset$	銘柄 j の組入比率

目的関数（最小化）	
$\sum_{t \in Sample} dev_t^2 / \lvert Sample \rvert$	ポートフォリオが与える期待収益率の分散（リスク）
$dev_t = \sum_{j \in Asset} r_{tj} x_j - \overline{rp}, \forall t \in Sample$	サンプル t における平均からのぶれ
$\overline{rp} = \sum_{j \in Asset} \bar{r}_j x_j$	ポートフォリオの期待収益率

制約条件

$x_j \geq 0, \forall j \in Asset$	非負制約（空売り禁止）
$\sum_{j \in Asset} x_j = 1$	組入比率の総和は 1
$\overline{rp} \geq 0$	ポートフォリオが与える期待収益率は 0 以上

この問題は目的関数が二次であり制約式は全て線形ですので二次計画問題になります.

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります.

portfolio1.smp

```
// 集合と添字
Set Asset(name = "銘柄");
Element j(set = Asset);
Set Sample(name = "サンプル");
Element t(set = Sample);

// パラメータ
Parameter r(name = "収益率", index = (t, j));
Parameter rb(name = "平均収益率", index = j);
rb[j] = sum(r[t, j], t) / Sample.card(); // Sample.card()：集合 Sample の要素数

// 変数
Variable x(name = "組入比率", index = j);

// 式
Expression rpb(name = "期待収益率");
rpb = sum(rb[j] * x[j], j);
Expression dev(name = "偏差", index = t);
dev[t] = sum(r[t, j] * x[j], j) - rpb;

// 目的関数
Objective V(name = "リスク");
V = sum(dev[t] * dev[t], t) / Sample.card();

// 制約条件
x[j] >= 0.0;
sum(x[j], j) == 1.0;
rpb >= 0.0;
```

```
// 求解
solve();

// 結果出力
V.val.print();
rpb.val.print();
x.val.print();
```

データファイル（.dat 形式）は以下のようになります.

data.dat

```
収益率 =
[ 1, 1]  0.0000 [ 1, 2] 0.100
[ 2, 1]  0.0162 [ 2, 2] 0.161
[ 3, 1]  0.0307 [ 3, 2] 0.197
[ 4, 1]  0.0419 [ 4, 2] 0.192
[ 5, 1]  0.0485 [ 5, 2] 0.148
[ 6, 1]  0.0498 [ 6, 2] 0.084
[ 7, 1]  0.0458 [ 7, 2] 0.026
[ 8, 1]  0.0368 [ 8, 2] 0.000
[ 9, 1]  0.0238 [ 9, 2] 0.016
[10, 1]  0.0082 [10, 2] 0.068
[11, 1] -0.0082 [11, 2] 0.132
[12, 1] -0.0238 [12, 2] 0.184
[13, 1] -0.0368 [13, 2] 0.200
[14, 1] -0.0458 [14, 2] 0.174
[15, 1] -0.0498 [15, 2] 0.116
[16, 1] -0.0485 [16, 2] 0.052
[17, 1] -0.0419 [17, 2] 0.008
[18, 1] -0.0307 [18, 2] 0.003
[19, 1] -0.0162 [19, 2] 0.039
[20, 1]  0.0000 [20, 2] 0.100
;
```

このモデルを実行すると以下のような解が得られます.

```
リスク = 0.000951734
期待収益率 = 0.0199126
組入比率[1] = 0.800874
組入比率[2] = 0.199126
```

2.18 ロジスティック回帰モデル

本章では，ロジスティック回帰モデルによるパラメータ推定方法を，アヤメの識別問題を例に紹介します．

■■例題

同じアヤメ科の Iris setosa と Iris versicolor に関して，がくの長さ，がくの幅，花弁の長さ，花弁の幅に関する各々 50 個のデータが存在する．これらの 4 つを説明変数として，Iris setosa と Iris versicolor を判別するようなロジスティック回帰モデルを構築せよ．

この問題の定式化は次のようになります．

集合	
I	サンプル集合
J	説明変数集合

定数	
$d_{i,j}, i \in I, j \in J$	計測データ
$k_i, i \in I$	アヤメの種類（0：Iris setosa，1：Iris versicolor）

変数	
$a0$	推定したいパラメータ
$a_j, j \in J$	
$x_i, i \in I$（中間変数） $\left(x_i = a0 + \sum_j a_j d_{ij} \right)$	

目的関数（最大化）	
$\sum_i (k_i x_i - \log(1 + \exp(x_i)))$	対数尤度

サンプル集合の要素 $i \in I$ に対し，ロジスティック関数 $L(x_i)$ は，以下のような式で表わすことができます．

$$L(x_i) = \frac{\exp(x_i)}{1 + \exp(x_i)}$$

ただし x_i は，$x_i = a0 + \sum_j a_j d_{ij}$ で表わされるものとします．

次に，ロジスティック関数を用いた $a0, a_j$ のパラメータ推定方法の説明を行います．対象データ全てに対する尤もらしさを考え，それが最大となるような $a0, a_j$ を求めます．即ち，目的関数 f を

$$f = \prod_i L(x_i)^{k_i} (1 - L(x_i))^{1-k_i}$$

で定義し，これを最大化する問題を考えることにより，$a0, a_j$ の推定を行います．

なお，このままでは目的関数の形状が複雑なため，目的関数 f に対して対数をとった $\tilde{f}$

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \log f \\ &= \sum_i (k_i \log L(x_i) + (1 - k_i) \log(1 - L(x_i))) \\ &= \sum_i \left(k_i \log \frac{\exp(x_i)}{1 + \exp(x_i)} + (1 - k_i) \log \frac{1}{1 + \exp(x_i)} \right) \\ &= \sum_i \left(k_i \log(\exp(x_i)) + \log \frac{1}{1 + \exp(x_i)} \right) \\ &= \sum_i (k_i x_i - \log(1 + \exp(x_i)))\end{aligned}$$

で目的関数を置きなおしても一般性は失われない性質を利用して，対象となる問題の置き換えを行います．

以上が定式化の説明となります．

次に，アヤメの計測データですが，これは [5] の文献にあるデータ（Iris setosa，Iris versicolor，各々 50 個）を使用します．

具体的には，以下のような 2 種類の csv ファイルを用意します．

data.csv

```
計測データ，がくの長さ，がくの幅，花弁の長さ，花弁の幅
1，5.1，3.5，1.4，0.2
2，4.9，3，1.4，0.2
3，4.7，3.2，1.3，0.2
4，4.6，3.1，1.5，0.2
5，5，3.6，1.4，0.2
6，5.4，3.9，1.7，0.4
7，4.6，3.4，1.4，0.3
8，5，3.4，1.5，0.2
9，4.4，2.9，1.4，0.2
10，4.9，3.1，1.5，0.1
11，5.4，3.7，1.5，0.2
12，4.8，3.4，1.6，0.2
13，4.8，3，1.4，0.1
14，4.3，3，1.1，0.1
15，5.8，4，1.2，0.2
16，5.7，4.4，1.5，0.4
17，5.4，3.9，1.3，0.4
18，5.1，3.5，1.4，0.3
19，5.7，3.8，1.7，0.3
20，5.1，3.8，1.5，0.3
21，5.4，3.4，1.7，0.2
```

```
22, 5.1, 3.7, 1.5, 0.4
23, 4.6, 3.6, 1, 0.2
24, 5.1, 3.3, 1.7, 0.5
25, 4.8, 3.4, 1.9, 0.2
26, 5, 3, 1.6, 0.2
27, 5, 3.4, 1.6, 0.4
28, 5.2, 3.5, 1.5, 0.2
29, 5.2, 3.4, 1.4, 0.2
30, 4.7, 3.2, 1.6, 0.2
31, 4.8, 3.1, 1.6, 0.2
32, 5.4, 3.4, 1.5, 0.4
33, 5.2, 4.1, 1.5, 0.1
34, 5.5, 4.2, 1.4, 0.2
35, 4.9, 3.1, 1.5, 0.2
36, 5, 3.2, 1.2, 0.2
37, 5.5, 3.5, 1.3, 0.2
38, 4.9, 3.6, 1.4, 0.1
39, 4.4, 3, 1.3, 0.2
40, 5.1, 3.4, 1.5, 0.2
41, 5, 3.5, 1.3, 0.3
42, 4.5, 2.3, 1.3, 0.3
43, 4.4, 3.2, 1.3, 0.2
44, 5, 3.5, 1.6, 0.6
45, 5.1, 3.8, 1.9, 0.4
46, 4.8, 3, 1.4, 0.3
47, 5.1, 3.8, 1.6, 0.2
48, 4.6, 3.2, 1.4, 0.2
49, 5.3, 3.7, 1.5, 0.2
50, 5, 3.3, 1.4, 0.2
51, 7, 3.2, 4.7, 1.4
52, 6.4, 3.2, 4.5, 1.5
53, 6.9, 3.1, 4.9, 1.5
54, 5.5, 2.3, 4, 1.3
55, 6.5, 2.8, 4.6, 1.5
56, 5.7, 2.8, 4.5, 1.3
57, 6.3, 3.3, 4.7, 1.6
58, 4.9, 2.4, 3.3, 1
59, 6.6, 2.9, 4.6, 1.3
```

```
60, 5.2, 2.7, 3.9, 1.4
61, 5, 2, 3.5, 1
62, 5.9, 3, 4.2, 1.5
63, 6, 2.2, 4, 1
64, 6.1, 2.9, 4.7, 1.4
65, 5.6, 2.9, 3.6, 1.3
66, 6.7, 3.1, 4.4, 1.4
67, 5.6, 3, 4.5, 1.5
68, 5.8, 2.7, 4.1, 1
69, 6.2, 2.2, 4.5, 1.5
70, 5.6, 2.5, 3.9, 1.1
71, 5.9, 3.2, 4.8, 1.8
72, 6.1, 2.8, 4, 1.3
73, 6.3, 2.5, 4.9, 1.5
74, 6.1, 2.8, 4.7, 1.2
75, 6.4, 2.9, 4.3, 1.3
76, 6.6, 3, 4.4, 1.4
77, 6.8, 2.8, 4.8, 1.4
78, 6.7, 3, 5, 1.7
79, 6, 2.9, 4.5, 1.5
80, 5.7, 2.6, 3.5, 1
81, 5.5, 2.4, 3.8, 1.1
82, 5.5, 2.4, 3.7, 1
83, 5.8, 2.7, 3.9, 1.2
84, 6, 2.7, 5.1, 1.6
85, 5.4, 3, 4.5, 1.5
86, 6, 3.4, 4.5, 1.6
87, 6.7, 3.1, 4.7, 1.5
88, 6.3, 2.3, 4.4, 1.3
89, 5.6, 3, 4.1, 1.3
90, 5.5, 2.5, 4, 1.3
91, 5.5, 2.6, 4.4, 1.2
92, 6.1, 3, 4.6, 1.4
93, 5.8, 2.6, 4, 1.2
94, 5, 2.3, 3.3, 1
95, 5.6, 2.7, 4.2, 1.3
96, 5.7, 3, 4.2, 1.2
97, 5.7, 2.9, 4.2, 1.3
```

```
98, 6.2, 2.9, 4.3, 1.3
99, 5.1, 2.5, 3, 1.1
100, 5.7, 2.8, 4.1, 1.3
```

kind.csv

```
i, 種類
1, 1
2, 1
3, 1
4, 1
5, 1
6, 1
7, 1
8, 1
9, 1
10, 1
11, 1
12, 1
13, 1
14, 1
15, 1
16, 1
17, 1
18, 1
19, 1
20, 1
21, 1
22, 1
23, 1
24, 1
25, 1
26, 1
27, 1
28, 1
29, 1
30, 1
31, 1
32, 1
```

```
33, 1
34, 1
35, 1
36, 1
37, 1
38, 1
39, 1
40, 1
41, 1
42, 1
43, 1
44, 1
45, 1
46, 1
47, 1
48, 1
49, 1
50, 1
51, 0
52, 0
53, 0
54, 0
55, 0
56, 0
57, 0
58, 0
59, 0
60, 0
61, 0
62, 0
63, 0
64, 0
65, 0
66, 0
67, 0
68, 0
69, 0
70, 0
```

```
71, 0
72, 0
73, 0
74, 0
75, 0
76, 0
77, 0
78, 0
79, 0
80, 0
81, 0
82, 0
83, 0
84, 0
85, 0
86, 0
87, 0
88, 0
89, 0
90, 0
91, 0
92, 0
93, 0
94, 0
95, 0
96, 0
97, 0
98, 0
99, 0
100, 0
```

以上をもとに C++SIMPLE で記述すると，以下のようになります.

LogisticRegression.smp

```
// 集合と添字
Set I(name = "サンプル集合");
Element i(set = I);
Set J(name = "説明変数集合");
Element j(set = J);
```

```
// パラメータ
Parameter d(name = "計測データ", index = (i, j));
Parameter k(name = "種 類", index = i); // ア ヤ メ の 種 類（0 : Iris setosa, 1 : Iris versicolor）

// 変数
Variable a(name = "a", index = j);
Variable a0(name = "a0");
Variable x(name = "x", index = i); // 中間変数

// 制約条件
x[i] == a0 + sum(a[j] * d[i, j], j);

// 目的関数
Objective f(name = "対数尤度", type = maximize);
f = sum(k[i] * x[i] - log(1 + exp(x[i])), i);

// 求解
solve();

// 結果出力
a0.val.print();
a.val.print();
```

このモデルを実行すると，以下のような解が得られます．

```
a0 = -3.37151
a["がくの長さ"] = 6.43568
a["がくの幅"] = 5.8427
a["花弁の長さ"] = -13.2033
a["花弁の幅"] = -18.566
```

2.19 イールドカーブ推定問題

イールドカーブとは，償還期間の異なる利回りをもつ債券等について，利回りと償還期間の相関を描いた曲線（縦軸：利回り，横軸：償還期間）のことをいいます．ここでは，この利回りがスポットレート（現時点から将来のある時点まで保有される資産にかかる金利のこと）である場合を対象とします．なお，イールドカーブの形状には順イールド（右上がりの曲線）と逆イールド（右下がりの曲

線）があり，前者は短期金利よりも長期金利のほうが高くなることを意味し，後者は逆に短期金利よりも長期金利のほうが低くなることを意味しています．

以下の例題では，現時点での観測価格からスポットレートを推定する問題を考え，イールドカーブの推定を行います．

■■例題

期間（償還期間）が 1〜10 期まであり，各々に対するスポットレート r_t を用いて，償還期間 t における額面価格 100，クーポンレート 1%の利付債の理論価格 $S(t; r_1, \ldots, r_t)$ が

$$S(t; r_1, \ldots, r_t) \equiv \frac{100}{(1 + 0.01 \cdot r_t)^t} + \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{(1 + 0.01 \cdot r_k)^k}$$

のように定義されているとする．観測結果 $(t, S(t))$ の組

$$(t_i, S_i) \quad i \in \{1, \ldots, 60\}$$

が与えられているとき，

$$\sum_i \{S(t_i) - S_i\}^2$$

を最小化するようなスポットレートを推定せよ．

この問題を定式化すると以下のようになります．

なお，求めるスポットレートの単位は%（パーセント）とし，非負であるものとします．

集合	
$Term$	期間（償還期間）集合
$Point$	観測点の集合

定数	
$tvalue_i, i \in Point$	観測点が何期目か
$Svalue_i, i \in Point$	観測値

変数	
$r_t, t \in Term$	t 期に対するスポットレート

目的関数（最小化）	
$\sum_i \{S(tvalue_i) - Svalue_i\}^2, S(t; r_1, \ldots, r_t) \equiv \frac{100}{(1 + 0.01 \cdot r_t)^t} + \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{(1 + 0.01 \cdot r_k)^k}$	理論値と観測値の誤差の二乗和

制約条件	
$0 \le r_t, \forall t \in Term$	スポットレートの非負条件

この問題は目的関数が非線形ですので，非線形計画問題になります．

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります．

YieldCurve.smp

```
// 集合と添字
Set Term(name = "期間"); // 期間集合
Term = "1 .. 10";
Element t(set = Term);
Set Point;
Element i(set = Point);

// パラメータ
Parameter tvalue(name = "tvalue", index = i); // 何期目か
Parameter Svalue(name = "Svalue", index = i); // 観測値(S)

// 変数
Variable r(name = "スポットレート", index = t);

// t 期の価値から現在価値への変換レート
Expression d(index = t);
d[t] = 1 / pow(1 + 0.01 * r[t], t);

// tvalue[i] 期における S の理論値
Expression S(index = i);
S[i] = 100 * d[tvalue[i]] + sum(d[t], (t, t <= tvalue[i]));

// 理論値と観測値の誤差
Expression diff(index = i);
diff[i] = S[i] - Svalue[i];

// 目的関数
Objective err(name = "理論値と観測値の誤差の二乗和", type = minimize);
err = sum(diff[i] * diff[i], i);

// 制約条件
0 <= r[t]; // スポットレートの非負条件

// 求解
```

```
solve();

// 結果出力
err.val.print();
r.val.print();
```

データファイル（tSvalue.csv）は以下のようになります.

tSvalue.csv

```
i, tvalue, Svalue
1, 1, 100.39
2, 1, 102.15
3, 1, 99.24
4, 1, 101.32
5, 1, 99.72
6, 1, 101.51
7, 2, 100.62
8, 2, 99.34
9, 2, 98.27
10, 2, 98.31
11, 2, 100.97
12, 2, 101.73
13, 3, 99.78
14, 3, 100.47
15, 3, 98.19
16, 3, 99.55
17, 3, 99.79
18, 3, 98.4
19, 4, 96.6
20, 4, 96.93
21, 4, 96.8
22, 4, 94.91
23, 4, 96.28
24, 4, 95.33
25, 5, 95.13
26, 5, 93.5
27, 5, 93.42
28, 5, 91.56
29, 5, 92.67
```

```
30, 5, 96.28
31, 6, 89.66
32, 6, 89.46
33, 6, 91.21
34, 6, 91.42
35, 6, 93.32
36, 6, 89.76
37, 7, 90.18
38, 7, 88.58
39, 7, 87.41
40, 7, 90.33
41, 7, 87.5
42, 7, 87.66
43, 8, 86.06
44, 8, 85.55
45, 8, 84.74
46, 8, 88.78
47, 8, 86.79
48, 8, 88.76
49, 9, 84.95
50, 9, 84.31
51, 9, 87.24
52, 9, 84.73
53, 9, 83.76
54, 9, 84.02
55, 10, 81.75
56, 10, 84.46
57, 10, 82.51
58, 10, 85.42
59, 10, 81.45
60, 10, 85.36
```

このモデルを実行すると，以下のような解が得られます．

```
理論値と観測値の誤差の二乗和 = 97.061
スポットレート [1] = 0.276339
スポットレート [2] = 1.06832
スポットレート [3] = 1.22162
スポットレート [4] = 2.02931
```

```
スポットレート [5] = 2.35651
スポットレート [6] = 2.70549
スポットレート [7] = 2.84285
スポットレート [8] = 2.89991
スポットレート [9] = 2.96985
スポットレート [10] = 2.95256
```

2.20 格付け推移行列推定問題

格付け（rating）とは，企業の発行する社債の元本，利息の支払い能力をランク形式で表示したものです．格付け会社は独自の調査結果のもと，A，B，C や +，− などの記号を用いて対象社債のリスク度合いを示します．格付けは，社債の購入者側からすると購入判断時の評価指標になりますし，発行体となる企業側からすると，資金調達の際の利回り決定の基準となります．

格付け推移行列とは，ある格付け評価を受けている企業が，一定期間後にどのような格付けとなるかについての確率を表す行列のことをいいます．

以下では，この格付け推移行列の推定に関する例題を考えます．

■■例題

格付けとして，{AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C} の 9 種類があるものとして，格付けに関する 1 年後の推移行列 Q_0 が以下のように与えられているものとする．

		推移後の格付け								
	Q0	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	C
推移前の格付け	AAA	0.9651	0.0349	0	0	0	0	0	0	0
	AA	0.0356	0.9382	0.0262	0	0	0	0	0	0
	A	0.0014	0.0433	0.9364	0.0186	0.0003	0	0	0	0
	BBB	0	0	0.0352	0.9456	0.0154	0.0038	0	0	0
	BB	0	0	0	0.1078	0.872	0.0049	0.0153	0	0
	B	0	0	0	0	0.0747	0.8762	0.041	0.0081	0
	CCC	0	0	0	0	0	0.0278	0.9654	0.0068	0
	CC	0	0	0	0	0	0	0.0083	0.9675	0.0242
	C	0	0	0	0	0	0	0	0.0266	0.9734

Q_0 を基に，1 ヶ月単位期間の格付け推移行列 Q を推定せよ．

推移確率行列 Q はマルコフ過程に従うものとします．そのとき，題意より行列 Q^{12} は行列 Q_0 と本来一致するはずです．従って，行列 Q を推定するとは，$\|Q_0 - Q^{12}\|_F$ を最小にするような Q を求めるということになります．なお $\|\cdot\|_F$ は，Frobenius（フロベニウス）ノルムのことで，行列の各成分の二乗和の平方根を表すものとします．

また，格付け推移行列の性質として，行列 Q の各行の和は 1 で各成分は非負であるものとします．

以上を踏まえると，定式化は以下のようになります．

順序集合	
Rating	格付けの集合

定数	
$q^0_{ij}, i, j \in Rating$	1 年後の格付け推移行列（Q_0）の各要素

変数	
$q_{ij}, i, j \in Rating$	1 ヶ月単位の格付け推移行列（Q）の各要素

目的関数（最小化）	
$\|Q_0 - Q^{12}\|^2_F$	行列 Q_0 と Q^{12} の差のフロベニウスノルムの二乗

制約条件	
$\sum_{j \in Rating} q_{ij} = 1, \forall i \in Rating$	行列 Q の各行の和は 1
$0 \le q_{ij} \le 1, \forall i, j \in Rating$	行列 Q の各要素条件

この問題は目的関数が非線形ですので，非線形計画問題になります．
定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります．
なお，行列 Q^{12} に関しては，

$$Q^{12} = Q^8 \cdot Q^4 = (Q^2 \cdot Q^2)^2 \cdot (Q^2 \cdot Q^2)$$

で表現することにより，演算の回数を節約することができます．

また，局所解に陥ることを回避するため，および収束までの反復回数を軽減するため，行列 Q の初期値として，対角成分に 0.9 を与え，非対角要素の上限値を 0.05 としておきます．

Rating1.smp

```
// 集合と添字
OrderedSet Rating; // 格付け集合
Element i(set = Rating), j(set = Rating), k(set = Rating);

// パラメータ
Parameter q0(name = "Q0", index = (i,j)); // 1 年後の格付け推移行列の各要素

// 変数
Variable q(name = "Q", index = (i, j)); // 1 ヶ月単位の格付け推移行列の各要素

// 定式の定義に利用する演算の回数を節約する記法
Expression q2(name = "q2", index=(i, j));
Expression q4(name = "q4", index=(i, j));
Expression q8(name = "q8", index=(i, j));
```

```
Expression q12(name = "q12", index=(i, j));
q2[i, j] = sum(q[i, k] * q[k, j], k);
q4[i, j] = sum(q2[i, k] * q2[k, j], k);
q8[i, j] = sum(q4[i, k] * q4[k, j], k);
q12[i, j] = sum(q8[i, k] * q4[k, j], k);

Expression diff(name = "diff", index = (i, j));
diff[i, j] = q0[i, j] - q12[i, j];

// 目的関数
Objective diffnrm(name="行列 Q0 と 行列 Q の 12 乗 の差ノルムの二乗", type = minimize);
diffnrm = sum(pow(diff[i, j], 2), (i, j));

// 制約条件
sum(q[i, j], j) == 1; // 行列 Q について，各行の和は 1
0 <= q[i, i] <= 1; // 行列 Q の対角要素条件
0 <= q[i, j] <= 0.05, i != j; // 行列 Q の非対角要素条件

// 初期値設定
q[k, k] = 0.9;

// 求解
solve();

// 結果出力
diffnrm.val.print();
simple_printf("\n");
simple_printf("Q");
simple_printf(", %s", k);
simple_printf("\n");
Element k_tmp;
for(k_tmp = Rating.first(); k_tmp < Rating; k_tmp = Rating.next(k_tmp)){
  simple_printf("%s", k_tmp);
  simple_printf(", %7.5f", q[k_tmp, j]);
  simple_printf("\n");
}
```

データファイル（csv 形式）は以下のようになります.

Q0.csv

```
Q0, AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C
AAA, 0.9651, 0.0349, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
AA, 0.0356, 0.9382, 0.0262, 0, 0, 0, 0, 0, 0
A, 0.0014, 0.0433, 0.9364, 0.0186, 0.0003, 0, 0, 0, 0
BBB, 0, 0, 0.0352, 0.9456, 0.0154, 0.0038, 0, 0, 0
BB, 0, 0, 0, 0.1078, 0.872, 0.0049, 0.0153, 0, 0
B, 0, 0, 0, 0, 0.0747, 0.8762, 0.041, 0.0081, 0
CCC, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0278, 0.9654, 0.0068, 0
CC, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0083, 0.9675, 0.0242
C, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0266, 0.9734
```

このモデルを実行すると以下のような解が得られます.

```
行列 Q0 と 行列 Q の 12 乗 の差ノルムの二乗 = 2.82001e-005


Q, AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C
AAA, 0.99697, 0.00303, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000
AA, 0.00310, 0.99459, 0.00231, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000
A, 0.00006, 0.00383, 0.99446, 0.00164, 0.00001, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000
BBB, 0.00000, 0.00000, 0.00307, 0.99523, 0.00137, 0.00032, 0.00000, 0.00000, 0.00000
BB, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00976, 0.98852, 0.00039, 0.00133, 0.00000, 0.00000
B, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00693, 0.98889, 0.00355, 0.00063, 0.00000
CCC, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00247, 0.99699, 0.00054, 0.00000
CC, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00071, 0.99722, 0.00207
C, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00000, 0.00227, 0.99772
```

2.21　相関行列取得問題

複数の株価の時系列データ等，相関を持った乱数列を発生させる際に，元の相関行列内の要素をある程度任意に変更したい場合があります．しかし，相関を持った乱数列を適切に発生させるためには，相関行列は半正定値である必要があります．そこで，与えられた行列に一番近く，かつ，半正定値であるような相関行列を作成する問題を考えます.

■■例題

以下の対称行列 A に対してフロベニウスノルムの意味で一番近く，かつ，半正定値であるような相関行列 X を求めよ.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.00	0.17	0.17	0.90	0.90	0.00	0.10	0.00	0.80	0.70
2	0.17	1.00	0.10	0.90	0.20	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.17	0.10	1.00	0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.90	0.90	0.20	1.00	0.20	0.20	0.20	0.20	0.00	0.00
5	0.90	0.20	0.00	0.20	1.00	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.40	0.00	0.20	0.40	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.10	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.00	0.00	0.20	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00
9	0.80	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
10	0.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

この問題を定式化すると以下のようになります．

集合	
$N = \{1, 2, \ldots, 10\}$	相関行列の行及び列の集合

定数	
$A_{ij}, i \in N, j \in N$	所与の行列の要素
$minEig$	相関行列の最小固有値

変数	
$X_{ij}, i \in N, j \in N$	相関行列の要素

目的関数（最小化）	
$\sum_{i,j \in N} (X_{ij} - A_{ij})^2$	元の行列と相関行列の差のフロベニウスノルムの二乗

制約条件	
$X \succeq minEig$	半正定値制約
$X_{ii} = 1, \forall i \in N$	対角要素は 1

この問題は半正定値制約が入っているので，半正定値計画問題になります．

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります．なお，ここでは相関行列の最小固有値 `minEig` を 10^{-3} としています．

CorrelationMatrix.smp

```
// 集合と添字
OrderedSet N;
Element i(set = N), j(set = N);
```

```
// パラメータ
Parameter A(index = (i, j)); // 与えられた行列の要素
Parameter minEig = 1.0e-3; // 出力される相関行列の最小固有値

// 変数
Variable  X(index = (i, j));

// 対称行列
SymmetricMatrix M((i, j));
M[i, j] = X[i, j], i <= j; // 上三角部分のみ定義

// 目的関数
Objective diffnrm(type = minimize); // 差の行列のノルム
diffnrm = sum((X[i, j] - A[i, j]) * (X[i, j] - A[i, j]), (i, j));

// 制約条件
M >= minEig;                // 半正定値制約
X[j, i] == X[i, j], i < j; // X は対称行列
X[i, i] == 1;               // 対角要素は 1

// 求解
solve();

// 結果出力（CSV 形式）
simple_printf(" X");
simple_printf(",%5d", i);
simple_printf("\n");
Element i_tmp;
for(i_tmp = N.first(); i_tmp < N; i_tmp = N.next(i_tmp)){
  simple_printf("%2d", i_tmp);
  simple_printf(",%5.2f", X[i_tmp, j]);
  simple_printf("\n");
}
```

データファイル（.csv 形式）は以下のようになります.

A.csv

```
A, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
1, 1.00, 0.17, 0.17, 0.90, 0.90, 0.00, 0.10, 0.00, 0.80, 0.70
```

```
2, 0.17, 1.00, 0.10, 0.90, 0.20, 0.40, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00
3, 0.17, 0.10, 1.00, 0.20, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00
4, 0.90, 0.90, 0.20, 1.00, 0.20, 0.20, 0.20, 0.20, 0.00, 0.00
5, 0.90, 0.20, 0.00, 0.20, 1.00, 0.40, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00
6, 0.00, 0.40, 0.00, 0.20, 0.40, 1.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00
7, 0.10, 0.00, 0.00, 0.20, 0.00, 0.00, 1.00, 0.00, 0.00, 0.00
8, 0.00, 0.00, 0.00, 0.20, 0.00, 0.00, 0.00, 1.00, 0.00, 0.00
9, 0.80, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 1.00, 0.00
10, 0.70, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 1.00
```

このモデルを実行すると以下のような解が得られます.

```
 X,    1,    2,    3,    4,    5,    6,    7,    8,    9,   10
 1, 1.00, 0.27, 0.15, 0.61, 0.65, 0.06, 0.10, 0.03, 0.57, 0.50
 2, 0.27, 1.00, 0.10, 0.85, 0.15, 0.41, 0.00, 0.01,-0.04,-0.04
 3, 0.15, 0.10, 1.00, 0.21, 0.01,-0.00,-0.00,-0.00, 0.01, 0.01
 4, 0.61, 0.85, 0.21, 1.00, 0.34, 0.17, 0.20, 0.18, 0.12, 0.11
 5, 0.65, 0.15, 0.01, 0.34, 1.00, 0.37,-0.00,-0.01, 0.10, 0.09
 6, 0.06, 0.41,-0.00, 0.17, 0.37, 1.00, 0.00, 0.00,-0.02,-0.02
 7, 0.10, 0.00,-0.00, 0.20,-0.00, 0.00, 1.00, 0.00,-0.00,-0.00
 8, 0.03, 0.01,-0.00, 0.18,-0.01, 0.00, 0.00, 1.00,-0.01,-0.01
 9, 0.57,-0.04, 0.01, 0.12, 0.10,-0.02,-0.00,-0.01, 1.00, 0.08
10, 0.50,-0.04, 0.01, 0.11, 0.09,-0.02,-0.00,-0.01, 0.08, 1.00
```

2.22 ロバストポートフォリオ最適化問題

ポートフォリオのリスクを投資対象の収益率の分散共分散行列を用いて計測するマルコビッツモデルにおいて，与えられた分散共分散行列は，しばしば不確実性を伴います．この不確実性に対してロバストな解を得る以下の問題を考えます.

以下の典型的な平均・分散モデルを考えます.

$$\begin{aligned} &\max_{x} \mu^T x - \lambda x^T \Sigma x \\ &s.t. \quad x^T e = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，μ を期待リターン，Σ をリターンの分散共分散行列，x をポートフォリオの重み，λ をリスク回避係数とします.

分散共分散行列 Σ に不確実性が伴うとして，以下のロバストポートフォリオ最適化問題を考えます. なお U_Σ は，不確実性が伴うことによって取りうる Σ に関する行列の集合とします.

$$\begin{aligned} &\max_{x} \left\{ \mu^T x - \lambda \max_{\Sigma \in U_\Sigma} \left\{ x^T \Sigma x \right\} \right\} \\ &s.t. \quad x^T e = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

U_Σ として，分散共分散行列 Σ の各要素が

$$\underline{\Sigma} \leq \Sigma \leq \overline{\Sigma}$$

のような区間を持つとします．このとき (2) は，新たに行列 U, L を用いて以下のような問題に置き換えることができます [6]．なお行列 A，B に対し，$A \bullet B$ は，A と B の内積を表すものとします．

$$\begin{aligned} \max_x \ & \mu^T x - \lambda\left(\overline{\Sigma} \bullet U - \underline{\Sigma} \bullet L\right) \\ s.t. \ & x^T e = 1 \\ & \begin{pmatrix} U - L & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \geq 0 \\ & U \geq 0, L \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

■■例題

分散共分散行列 Σ の各要素の下限を表す行列 *sigL*，上限を表す行列 *sigU* が以下のように与えられているとき，上記 (3) を解きなさい．

sigL	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1.900	−1.400	−1.000	−1.000	−1.000	−0.500	−1.000	0.100
2	−1.400	3.500	−1.500	0.500	−1.200	−1.200	0.400	0.600
3	−1.000	−1.500	5.000	−1.125	1.100	0.900	0.300	−0.200
4	−1.000	0.500	−1.125	6.000	1.500	0.400	1.200	−0.900
5	−1.000	−1.200	1.100	1.500	4.500	−1.400	0.150	−2.000
6	−0.500	−1.200	0.900	0.400	−1.400	9.000	−1.000	0.500
7	−1.000	0.400	0.300	1.200	0.150	−1.000	5.500	−1.250
8	0.100	0.600	−0.200	−0.900	−2.000	0.500	−1.250	11.500

sigU	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3.000	1.000	2.500	−0.900	1.000	−0.400	2.500	2.000
2	1.000	4.500	−1.400	1.200	0.500	−1.100	0.500	2.600
3	2.500	−1.400	6.000	−0.500	1.200	1.000	0.400	−0.100
4	−0.900	1.200	−0.500	6.500	1.600	0.500	1.300	−0.800
5	1.000	0.500	1.200	1.600	5.500	−1.300	0.160	−1.900
6	−0.400	−1.100	1.000	0.500	−1.300	11.000	−0.900	0.600
7	2.500	0.500	0.400	1.300	0.160	−0.900	6.500	−1.200
8	2.000	2.600	−0.100	−0.800	−1.900	0.600	−1.200	13.500

ただし，$\lambda = 1$，$\mu^T = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ とします．

この問題を定式化すると以下のようになります．

集合	
$A = \{1, 2, \ldots, 8\}$	投資対象の集合

定数	
$sigL_{ij}, i \in A, j \in A$	分散共分散行列の各要素の下限

$sigU_{ij}, i \in A, j \in A$	分散共分散行列の各要素の上限
λ	リスク回避係数
$\mu_i, i \in A$	各投資対象の平均収益率

変数

$x_i, i \in A$	組入比率
$L_{ij}, i \in A, j \in A$	
$U_{ij}, i \in A, j \in A$	

目的関数（最大化）

$\mu^T x - \lambda(sigU \bullet U - sigL \bullet L)$	$\bullet$ は要素ごとの積の和

制約条件

$\begin{pmatrix} U-L & x \\ x^T & 1 \end{pmatrix} \geq 0$	半正定値制約
$\sum_{i \in A} x_i = 1$	組入比率の総和は 1
$L_{ij} \geq 0, \forall i \in A, j \in A$	行列 L の各要素に関する非負条件
$U_{ij} \geq 0, \forall i \in A, j \in A$	行列 U の各要素に関する非負条件

この問題は半正定値制約が入っているので，半正定値計画問題になります．定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります．

RobustPortfolio.smp

```
// 集合と添字
Parameter nA; // 銘柄数
Sequence Asset(from = 1, to = nA);
Element i(set = Asset);
Element j(set = Asset);

// パラメータ
Parameter sigL(index = (i, j));
Parameter sigU(index = (i, j));
Parameter lambda;
Parameter mu(index = i);

// 変数
Variable U(index = (i, j));
Variable L(index = (i, j));
```

```
Variable x(index = i);

// 対称行列
Sequence V(from = 1, to = nA + 1);
Element v(set = V);
Element w(set = V);
SymmetricMatrix M((v, w));

// M の要素の定義（上三角部分のみ）
M[i, j] = U[i, j] - L[i, j], i <= j; // 左上（の上三角部分）
M[j, nA + 1] = x[j];                 // 右上
M[nA + 1, nA + 1] = 1;               // 右下

// 目的関数
Objective f(type = maximize);
f = sum(mu[i] * x[i], i) - lambda * sum(sigU[i, j] * U[i, j] - sigL[i, j] * L[i, j],
(i, j));

// 制約条件
M >= 0; // 半正定値制約
sum(x[i], i) == 1;
U[i, j] == U[j, i], i > j;
L[i, j] == L[j, i], i > j;
U[i, j] >= 0;
L[i, j] >= 0;

// 求解
solve();

// 結果出力
x.val.print();
```

データファイルは以下の三つです.

sigL.csv

```
sigL, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
1, 1.9, -1.4, -1, -1, -1, -0.5, -1, 0.1
2, -1.4, 3.5, -1.5, 0.5, -1.2, -1.2, 0.4, 0.6
3, -1, -1.5, 5, -1.125, 1.1, 0.9, 0.3, -0.2
```

```
4, -1, 0.5, -1.125, 6, 1.5, 0.4, 1.2, -0.9
5, -1, -1.2, 1.1, 1.5, 4.5, -1.4, 0.15, -2
6, -0.5, -1.2, 0.9, 0.4, -1.4, 9, -1, 0.5
7, -1, 0.4, 0.3, 1.2, 0.15, -1, 5.5, -1.25
8, 0.1, 0.6, -0.2, -0.9, -2, 0.5, -1.25, 11.5
```

sigU.csv

```
sigU, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
1, 3, 1, 2.5, -0.9, 1, -0.4, 2.5, 2
2, 1, 4.5, -1.4, 1.2, 0.5, -1.1, 0.5, 2.6
3, 2.5, -1.4, 6, -0.5, 1.2, 1, 0.4, -0.1
4, -0.9, 1.2, -0.5, 6.5, 1.6, 0.5, 1.3, -0.8
5, 1, 0.5, 1.2, 1.6, 5.5, -1.3, 0.16, -1.9
6, -0.4, -1.1, 1, 0.5, -1.3, 11, -0.9, 0.6
7, 2.5, 0.5, 0.4, 1.3, 0.16, -0.9, 6.5, -1.2
8, 2, 2.6, -0.1, -0.8, -1.9, 0.6, -1.2, 13.5
```

data.dat

```
nA = 8;
lambda = 1;
mu = [1] 0.1 [2] 0.1 [3] 0.1 [4] 0.1 [5] 0.1 [6] 0.1 [7] 0.1 [8] 0.1;
```

このモデルを実行すると以下のような解が得られます.

```
x[1] = 1.86393e-06
x[2] = 0.233168
x[3] = 0.175305
x[4] = 0.0633979
x[5] = 0.171047
x[6] = 0.131893
x[7] = 0.152883
x[8] = 0.0723034
```

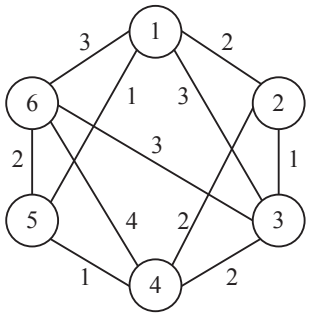
2.23 最大カット問題

最大カット問題とは，重み付きグラフのノードを 2 つのグループに分割する問題で，グループ分けをした際にカットされるエッジの重み総和を最大化する問題です．ここで，2 つのノードが異なるグループに属したとき，その 2 点をつなぐエッジがカットされると言います.

この問題は，半正定値計画（SDP）との関連が知られています.

例題

次のグラフは，ノードとして 1，2，3，4，5，6 を持つ重み付きグラフです．エッジがない場合は，重みを 0 とします．



ノードを二つのグループに分けて，カットされるエッジの重みの総和を最大化したい場合，どのようなグループとなるでしょうか．

この問題を Nuorium Optimizer で解くために定式化を行います．まずは SDP 緩和問題として定式化し，目的関数値の上界値を求めてみましょう．以下で紹介する定式化は参考文献 [7] によります．

まず，ノードの集合として N を与え，変数として $x_i \in \{-1, 1\}, (i \in N)$ を与えます．このとき，ノード $i, j \in N$ に対して，$x_i = x_j$ で i, j が同じグループに属していることを，$x_i \neq x_j$ で i, j が異なるグループに属していることを表すことにすると，次のように（凸とは限らない）二次計画問題として定式化することができます．

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \sum_{i,j \in N, i<j} G_{ij}(1 - x_i x_j) \\ s.t. \quad & x_i \in \{-1, 1\} \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

上記定式化に対し，変数 $x_i, i \in N$ を $X_{ij} = x_i x_j$ で置き換える変数 $X_{ij}, i \in N, j \in N$ を導入すると，次の問題と同値になることが知られています．

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \sum_{i,j \in N, i<j} G_{ij}(1 - X_{ij}) \\ s.t. \quad & X \geq 0 \\ & \mathrm{rank}(X) = 1 \\ & X_{ii} = 1 \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

ここで X は $(X_{ij})_{i,j \in N}$ からなる行列を表し，$\mathrm{rank}(X)$ は行列の階数，$X \geq 0$ は行列 X が半正定値であることを表します．上式において $x_i \in \{-1, 1\}$ は，$X_{ii} (= x_i x_i) = 1$ に対応し，x_i，x_j の値の整合性は $X \geq 0$, $\mathrm{rank}(X) = 1$ に対応します．

ここで制約式 $\mathrm{rank}(X) = 1$ を緩和した問題が次の SDP 緩和問題となります．

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2} \sum_{i,j \in N, i<j} G_{ij}(1 - X_{ij}) \\ s.t. \quad & X \geq 0 \\ & X_{ii} = 1 \quad \forall i \in N \end{aligned}$$

もとの二次計画問題の定式化の詳細は以下になります．

集合	
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	ノードの集合

定数	
$G_{ij}, i \in N, j \in N$	グラフのエッジ (i, j) の重み

変数	
$x_{ij} \in \{-1, 1\}, i \in N, j \in N$	ノード $i \in N$ が一方のグループに含まれている場合 1，もう一方のグループに含まれている場合-1

目的関数（最大化）	
$\frac{1}{2} \sum_{i,j \in N, i<j} G_{ij}(1 - x_i x_j)$	カットされるエッジの重みの総和

次に，行列をデータファイルから与える C++SIMPLE モデルを示します．以下のモデルでは不要な変数を可能な限り消去するため，変数を上三角部分しか定義していないモデルになります．

maxcut1.smp

```
// 集合と添字
Set N;
Element i(set = N);
Element j(set = N);
Set NN(dim = 2); // 上三角部分
Element ij(set = NN);

// パラメータ
Parameter G(index=(i, j)); // 重み付き隣接行列

NN = setOf((i, j), i <= j);

// 変数
Variable x(index = ij);
SymmetricMatrix X((i, j));
X[i, j] = x[i, j], i <= j;
X[j, i] = x[i, j], i < j;
x[i, i] == 1; // 対角要素は 1
X >= 0;       // 半正定値制約

// 目的関数
```

```
Objective obj(type = maximize);
obj = 0.5 * sum(G[i,j] * ( 1 - X[i,j]), ((i,j), i<j));

// 求解
solve();

// 結果出力
obj.val.print();
```

データファイル（.csv 形式）は以下のようになります.

G.csv

```
G, 1, 2, 3, 4, 5, 6
1, 0, 2, 3, 0, 1, 3
2, 2, 0, 1, 2, 0, 0
3, 3, 1, 0, 2, 0, 3
4, 0, 2, 2, 0, 1, 4
5, 1, 0, 0, 1, 0, 2
6, 3, 0, 3, 4, 2, 0
```

このモデルを実行すると，目的関数値 18.7437 が得られます．これは最大化問題の緩和問題ですので，本問題の上界値となります.

次に 0-1 整数計画問題としての定式化を紹介します．SDP 緩和問題で得られた上界値の精度を調べてみましょう.

まず変数は，各ノードに対し 0-1 変数 $x_i, (i \in N)$ を用意して「2 つのグループに分割する」を「0 の値をとるグループ」と「1 の値をとるグループ」に対応させます．また，ノード i とノード j が異なるグループのときに 1 をとり，同じグループのときに 0 をとる変数 $y_{ij}, (i \in N, j \in N)$ を用意します．このとき，目的関数はカットされたエッジの重みの総和ですから，$\sum_{i<j} G_{ij} y_{ij}$ で表現されます．注意するべきこととして x_i と y_{ij} の整合性をとる制約を追加する必要があります．具体的に $(x_i, x_j, y_{ij}) = (0,1,1), (1,0,1), (0,0,0), (1,1,0)$ となる組合せを残せばよいので，この組合せの補集合を考えて $(x_i, x_j, y_{ij}) = (0,1,0), (1,0,0), (0,0,1), (1,1,1)$ となる組合せを排除する制約を導入します．このような制約を導入した定式化は次のようになります.

集合	
$N = \{1,2,3,4,5,6\}$	ノードの集合

行列	
$G_{ij}, i \in N, j \in N$	ノード $i \in N$ とノード $j \in N$ がつくるエッジの重みを表現する隣接行列

0-1 変数

$x_i, i \in N$	0-1 の 2 つのグループのどちらに入るかを表す変数

変数

$y_{ij}, i \in N, j \in N$	カットされたエッジの情報を x_i, x_j から得るための変数

目的関数（最大化）

$\sum_{i<j} G_{ij} y_{ij}$	カットされるエッジの重みの総和

制約

$-x_i - x_j + y_{ij} \leq 0 \quad (1)$	$(x_i, x_j, y_{ij}) = (0, 0, 1)$ の排除
$-x_i + x_j - y_{ij} \leq 0 \quad (2)$	$(x_i, x_j, y_{ij}) = (0, 1, 0)$ の排除
$x_i - x_j - y_{ij} \leq 0 \quad (3)$	$(x_i, x_j, y_{ij}) = (1, 0, 0)$ の排除
$x_i + x_j + y_{ij} \leq 2 \quad (4)$	$(x_i, x_j, y_{ij}) = (1, 1, 1)$ の排除

上記にて変数 y_{ij} は連続変数として定義されていますが，実際には 0-1 しかとらない変数となります．これは，式 (1)(4) より $y_{ij} \leq 1$ が，式 (2)(3) より，$y_{ij} \geq 0$ が導かれ，さらに (x_i, x_j) の組合せが $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ しかとらないことと式 (1)(2)(3)(4) から，$y_{ij} = 0$ *or* 1 が導かれます．また，上記の不必要な組合せを排除する方法の代用として 0-1 変数 z_{ij} を追加して，

$$x_i + x_j + y_{ij} = 2z_{ij}$$

と表現する方法もあります．次に，C++SIMPLE モデルを示します．以下のモデルでは不要な変数を可能な限り消去するため，変数を上三角部分しか定義していないモデルになります．

maxcut2.smp

```
// 集合と添字
Set N;
Element i(set = N);
Element j(set = N);
Set NN(dim = 2);
Element ij(set = NN);

// パラメータ
Parameter G(index=(i, j));

NN = setOf((i, j), i < j);
```

```
// 変数
IntegerVariable x(index = i, type = binary);
Variable y(index = ij);

// x[i] x[j] y[i, j] の整合性をとる制約
- x[i] - x[j] + y[i, j] <= 0, (i, j) < NN;
- x[i] + x[j] - y[i, j] <= 0, (i, j) < NN;
x[i] - x[j] - y[i, j] <= 0, (i, j) < NN;
x[i] + x[j] + y[i, j] <= 2, (i, j) < NN;

// 目的関数
Objective obj(type = maximize);
obj = sum(G[ij] * y[ij], ij);

// 大規模問題には以下の近似解法を用いる
// ※ その際，y を 0-1 整数変数にする必要がある
// options.method = "wcsp";

// 求解
solve();

// 結果出力
x.val.print();
obj.val.print();
```

このモデルを実行すると，目的関数値 18，ノード 1，4，5 のグループとノード 2, 3, 6 のグループが得られます．SDP 緩和問題で求められた目的関数値が 18.7437 であったことを考えると，SDP 緩和問題が非常に良質な上界値を与えていることがわかります．

上記のように SDP 緩和問題で良質な上界値を得られることがわかっていれば，上界値を用いて WCSP アルゴリズムの精度保証に利用したり，終了条件を設定する際に利用したりもできます．参考までに SDP 緩和問題，単体法（＋分枝限定法），WCSP でそれぞれ解いた結果を以下に示します．以下の表は SDP 緩和の上界値の精度と近似解法 WCSP の安定性を示す十分な結果を表しています．

	SDP		SIMPLEX		WCSP	
Graph	TIME	Upper	TIME	Optimal	TIME	Lower
G20.csv	0.2	464.39	0.2	452	0.05	452
G30.csv	1.2	825.64	1.2	797	2.1	797
G40.csv	6.5	1215.86	6.0	1164	1.7	1164
G50.csv	23.1	1736.33	23.7	1651	7.6	1651
G60.csv	55.5	2156.71	153.2	2068	27.4	2068

Graph データ G**.csv の「**」はノード数を表す．上記データはすべてノードに対して平均 10 のリンクが存在するように乱数を発生させたデータ．

WCSP アルゴリズムの設定は，最大探索時間 10 秒，乱数を用いた 3 回の探索試行を行った．

2.24 セミナー割当問題

資源制約付きスケジューリング問題の例として，本節ではセミナー会場提供会社におけるスケジュール計画を以下で考えていきます．

■■例題 1

あるセミナー会場提供会社は，以下の 1〜6 までのセミナーに対し，会場を提供するものとします．

セミナー名	各セミナーのコマ数
1	4
2	6
3	5
4	3
5	10
6	7

例題 1 では，各セミナーにおいて 1 日あたりに消化できるコマ数は 1 つとします．別のセミナーを同一の会場で行うことはできないものとし，1 日あたりの会場使用数の最大を 4 とするとき，これらすべてのセミナーが完了する時刻が最小となるようなスケジュールを求めてください．

なお，すべてのセミナーが終了するまでの日数は最大でも 20 日までとします．

この問題を定式化すると，以下のようになります．なお，セミナー会場に関しては区別がないので，一つの資源とみなすことに注意してください．

セミナー集合	
Se	セミナー名 1〜6

資源	
1	セミナー会場，供給量:常に 4

モード	
A_1	セミナー 1 のコマ数消化方法 処理時間:4 必要量：資源 1 を処理時間中常に 1
A_2	セミナー 2 のコマ数消化方法 処理時間:6 必要量：資源 1 を処理時間中常に 1
A_3	セミナー 3 のコマ数消化方法 処理時間:5 必要量：資源 1 を処理時間中常に 1
A_4	セミナー 4 のコマ数消化方法 処理時間:3 必要量：資源 1 を処理時間中常に 1
A_5	セミナー 5 のコマ数消化方法 処理時間:10 必要量：資源 1 を処理時間中常に 1
A_6	セミナー 6 のコマ数消化方法 処理時間:7 必要量：資源 1 を処理時間中常に 1

モード集合族	
$MM_i, i \in Se$	セミナー i がとりうるモード集合

アクティビティ	
$act_i, i \in Se$	セミナー i をこなす作業 処理モード：A_i

目的関数（最小化）	
completionTime	最後の作業の完了時刻

スケジュール期間	
T	最大で 20 日とする

定式化した結果を C++SIMPLE で記述すると以下のようになります.

SeminarAssign1.smp

```
// 全体のスケジューリング期間
Set T(name = "T");

// 作業（セミナー）集合
Set Se(name = "Se");
Element se(set = Se);

// モード集合
Set M(name = "M");

// 各セミナーがとりうるモード
Set MM(name = "MM", index = se);

// 資源（部屋）集合
Set Ro(name = "Ro");

// 各モード中の最大開催期間までの期間集合
Set TT(name = "TT");

// 必要資源
ResourceRequire req(name = "req", mode = M, resource = Ro, duration = TT);

// 資源供給量
ResourceCapacity cap(name = "cap", resource = Ro, timeStep = T);

// アクティビティ
Activity act(name = "セミナー", index = se, mode = MM[se]);

// 目的関数（すべてのセミナーの完了時刻の最小化）
Objective f(name = "最小完了日数", type = minimize);
f = completionTime;

// 求解最大時間
options.maxtim = 5;

// 求解
```

```
solve();

// 結果の出力
f.val.print();
simple_printf("セミナー [%s] = %d\n", se, act[se].startTime);
```

入力データ（dat 形式）は，以下のようになります.

Data_SeminarAssign1A.dat

```
cap = [1, 0] 4 [1, 1] 4 [1, 2] 4 [1, 3] 4 [1, 4] 4 [1, 5] 4 [1, 6] 4
      [1, 7] 4 [1, 8] 4 [1, 9] 4 [1, 10] 4 [1, 11] 4 [1, 12] 4
      [1, 13] 4 [1, 14] 4 [1, 15] 4 [1, 16] 4 [1, 17] 4 [1, 18] 4
      [1, 19] 4 [1, 20] 4
;

MM  = [1] A1 [2] A2 [3] A3 [4] A4 [5] A5 [6] A6;

req = [A1, 1, 1] 1 [A1, 1, 2] 1 [A1, 1, 3] 1 [A1, 1, 4] 1
      [A2, 1, 1] 1 [A2, 1, 2] 1 [A2, 1, 3] 1 [A2, 1, 4] 1 [A2, 1, 5] 1
      [A2, 1, 6] 1
      [A3, 1, 1] 1 [A3, 1, 2] 1 [A3, 1, 3] 1 [A3, 1, 4] 1 [A3, 1, 5] 1
      [A4, 1, 1] 1 [A4, 1, 2] 1 [A4, 1, 3] 1
      [A5, 1, 1] 1 [A5, 1, 2] 1 [A5, 1, 3] 1 [A5, 1, 4] 1 [A5, 1, 5] 1
      [A5, 1, 6] 1 [A5, 1, 7] 1 [A5, 1, 8] 1 [A5, 1, 9] 1 [A5, 1, 10] 1
      [A6, 1, 1] 1 [A6, 1, 2] 1 [A6, 1, 3] 1 [A6, 1, 4] 1 [A6, 1, 5] 1
      [A6, 1, 6] 1 [A6, 1, 7] 1
;
```

結果は，以下のようになります.

```
最小完了日数 = 10
セミナー [1] = 0
セミナー [2] = 4
セミナー [3] = 0
セミナー [4] = 5
セミナー [5] = 0
セミナー [6] = 0
```

上記結果のセミナーの値は，各セミナーの開始日時を表しています.

例題 1 では，各セミナーにおけるモードは 1 種類（一日一コマずつ消化していく）のみでしたが，続く例題 2 では，各セミナーに対していくつかのモードを用意し，例題 1 からの結果の推移を検証し

ます.

■■例題 2

例題 1 の条件のもと，各セミナーにおいて，コマ数の消化方法の選択肢をいくつか与えるものとします．具体的には，以下の表の通りです.

セミナー名	モード	セミナーコマ数の消化方法
1	A1_1	1-1-1-1
2	A2_1	1-1-1-1-1-1
	A2_2	2-2-2
	A2_3	1-1-2-2
3	A3_1	1-1-1-1-1
	A3_2	2-2-1
4	A4_1	1-1-1
5	A5_1	1-1-1-1-1-1-1-1-1-1
	A5_2	1-2-2-2-2-1
	A5_3	2-2-2-2-2
6	A6_1	1-1-1-1-1-1-1
	A6_2	1-2-2-2
	A6_3	2-2-2-1

表の見方ですが，例えば A2_2 でしたら，セミナー 2 が全コマ数 6 を 3 日に渡って各々 2 ずつ消化する，ということになります．各セミナーは，そのセミナー特有に用意されたモードのうちどれか一つを選択しなければなりません．例えばセミナー 3 に対するモードは A3_1，A3_2 の 2 つがあるので，それらのうちのどちらかを選択してセミナーのコマ数を消化するということになります.

すべてのセミナーが完了する時刻が最小となるように，適切なモードを選択してスケジュールを求めてください.

定式化に関しましては，例題 1 と同様です．ですので，モデルファイルの記述も例題 1 と同一になります.

入力データ（dat 形式）は，以下のようになります.

Data_SeminarAssign1B.dat

```
cap = [1, 0] 4 [1, 1] 4 [1, 2] 4 [1, 3] 4 [1, 4] 4 [1, 5] 4 [1, 6] 4
      [1, 7] 4 [1, 8] 4 [1, 9] 4 [1, 10] 4 [1, 11] 4 [1, 12] 4
      [1, 13] 4 [1, 14] 4 [1, 15] 4 [1, 16] 4 [1, 17] 4 [1, 18] 4
      [1, 19] 4 [1, 20] 4
;

MM  = [1] A1_1 [2] A2_1 A2_2 A2_3 [3] A3_1 A3_2 [4] A4_1
```

```
      [5] A5_1 A5_2 A5_3 [6] A6_1 A6_2 A6_3
;

req = [A1_1, 1, 1] 1 [A1_1, 1, 2] 1 [A1_1, 1, 3] 1 [A1_1, 1, 4] 1
      [A2_1, 1, 1] 1 [A2_1, 1, 2] 1 [A2_1, 1, 3] 1 [A2_1, 1, 4] 1 [A2_1, 1, 5] 1
      [A2_1, 1, 6] 1
      [A2_2, 1, 1] 2 [A2_2, 1, 2] 2 [A2_2, 1, 3] 2
      [A2_3, 1, 1] 1 [A2_3, 1, 2] 1 [A2_3, 1, 3] 2 [A2_3, 1, 4] 2
      [A3_1, 1, 1] 1 [A3_1, 1, 2] 1 [A3_1, 1, 3] 1 [A3_1, 1, 4] 1 [A3_1, 1, 5] 1
      [A3_2, 1, 1] 2 [A3_2, 1, 2] 2 [A3_2, 1, 3] 1
      [A4_1, 1, 1] 1 [A4_1, 1, 2] 1 [A4_1, 1, 3] 1
      [A5_1, 1, 1] 1 [A5_1, 1, 2] 1 [A5_1, 1, 3] 1 [A5_1, 1, 4] 1 [A5_1, 1, 5] 1
      [A5_1, 1, 6] 1 [A5_1, 1, 7] 1 [A5_1, 1, 8] 1 [A5_1, 1, 9] 1 [A5_1, 1, 10] 1
      [A5_2, 1, 1] 1 [A5_2, 1, 2] 2 [A5_2, 1, 3] 2 [A5_2, 1, 4] 2 [A5_2, 1, 5] 2
      [A5_2, 1, 6] 1
      [A5_3, 1, 1] 2 [A5_3, 1, 2] 2 [A5_3, 1, 3] 2 [A5_3, 1, 4] 2 [A5_3, 1, 5] 2
      [A6_1, 1, 1] 1 [A6_1, 1, 2] 1 [A6_1, 1, 3] 1 [A6_1, 1, 4] 1 [A6_1, 1, 5] 1
      [A6_1, 1, 6] 1 [A6_1, 1, 7] 1
      [A6_2, 1, 1] 1 [A6_2, 1, 2] 2 [A6_2, 1, 3] 2 [A6_2, 1, 4] 2
      [A6_3, 1, 1] 2 [A6_3, 1, 2] 2 [A6_3, 1, 3] 2 [A6_3, 1, 4] 1
;
```

例題 1 と比較すると，各セミナーにおいてとりうるモードの数が増えたことがおわかりになると思います．

結果は，以下のようになります．

```
最小完了日数 = 9
セミナー[1] = 0
セミナー[2] = 5
セミナー[3] = 0
セミナー[4] = 4
セミナー[5] = 0
セミナー[6] = 5
```

結果から明らかなように，例題 1 に比べて，例題 2 ではセミナー完了時刻を短縮できるようなスケジュール計画を立てることができました．これは，各セミナーがとりうるモードの数が例題 1 と比較して増えたことによるためです．

この節の最後に，今までは資源となる会場は一つのみでしたが，もう一つ資源となる会場を追加してみましょう．セミナーを実施するメイン会場（大部屋）とサブ会場（小部屋）のようなものを想定していただければ，おわかりになるかと思います．

■■例題 3

例題 2 の条件のもと，さらにメイン会場を用意します．

各セミナーともにメイン会場で 1 日セミナーを行った後，その他の会場（以下では，サブ会場と呼ぶことにします）において各個別のセミナーを行うものとします．サブ会場でのセミナー実施方法は，例題 2 と同一とします．1 日あたりのサブ会場使用数の最大に関しましても，例題 1・例題 2 同様，4 とします．

メイン会場では 1 日 1 種類のセミナーしか行うことができず，しかもメイン会場は各セミナーのはじめの 1 コマのみしか利用することができないものとするとき，すべてのセミナーが完了する時刻が最小となるようなスケジュールを求めてください．

定式化としては以下のように，各セミナーともに，メイン会場でセミナーを行った後にサブ会場で行うという先行制約が加わります．なお先行関係は $\prec$ により表すものとします．

資源	
0	メイン会場，供給量:常に 1
1	サブ会場，供給量:常に 4

先行制約	
$act_{i,0} \prec act_{i,1}, \forall i \in Se$	任意のセミナー i において，メイン会場でのセミナーを終えた後にメイン以外の会場でのセミナーに移行する

上記定式化の追加を反映した C++SIMPLE でのモデル記述は，以下のようになります．

SeminarAssign1B.smp

```
// 全体のスケジューリング期間
Set T(name = "T");

// 作業 (セミナー) 集合
Set Se(name = "Se");
Element se(set = Se);

// モード集合
Set M(name = "M");

// 資源 (部屋) 集合
Set Ro(name = "Ro");
Element ro(set = Ro);
```

```
// 各セミナーがとりうるモード
Set MM(name = "MM", index = (se, ro));

// 各モード中の最大開催期間までの期間集合
Set TT(name = "TT");

// 資源供給量
ResourceCapacity cap(name = "cap", resource = Ro, timeStep = T);

// 必要資源
ResourceRequire req(name = "req", mode = M, resource = Ro, duration = TT);

// アクティビティ
Activity act(name = "セミナー", index = (se, ro), mode = MM[se, ro]);
// 先行制約
act[se, ro - 1] < act[se, ro], ro > 0;

// 目的関数（すべてのセミナーの完了時刻の最小化）
Objective f(name = "最小完了日数", type = minimize);
f = completionTime;

// 求解最大時間
options.maxtim = 5;

// 求解
solve();

// 結果の出力
f.val.print();
simple_printf("セミナー [%s,%s] = %d\n", se, ro, act[se, ro].startTime);
```

入力データ（dat 形式）は，以下のようになります.

Data_SeminarAssign2.dat

```
cap = [0, 0] 1 [0, 1] 1 [0, 2] 1 [0, 3] 1 [0, 4] 1 [0, 5] 1 [0, 6] 1
      [0, 7] 1 [0, 8] 1 [0, 9] 1 [0, 10] 1 [0, 11] 1 [0, 12] 1
      [0, 13] 1 [0, 14] 1 [0, 15] 1 [0, 16] 1 [0, 17] 1 [0, 18] 1
      [0, 19] 1 [0, 20] 1
      [1, 0] 4 [1, 1] 4 [1, 2] 4 [1, 3] 4 [1, 4] 4 [1, 5] 4 [1, 6] 4
```

```
      [1, 7] 4 [1, 8] 4 [1, 9] 4 [1, 10] 4 [1, 11] 4 [1, 12] 4
      [1, 13] 4 [1, 14] 4 [1, 15] 4 [1, 16] 4 [1, 17] 4 [1, 18] 4
      [1, 19] 4 [1, 20] 4
;

MM  = [1, 0] large_room [1, 1] A1_1
      [2, 0] large_room [2, 1] A2_1 A2_2 A2_3
      [3, 0] large_room [3, 1] A3_1 A3_2
      [4, 0] large_room [4, 1] A4_1
      [5, 0] large_room [5, 1] A5_1 A5_2 A5_3
      [6, 0] large_room [6, 1] A6_1 A6_2 A6_3
;

req = [large_room, 0, 1] 1
      [A1_1, 1, 1] 1 [A1_1, 1, 2] 1 [A1_1, 1, 3] 1 [A1_1, 1, 4] 1
      [A2_1, 1, 1] 1 [A2_1, 1, 2] 1 [A2_1, 1, 3] 1 [A2_1, 1, 4] 1 [A2_1, 1, 5] 1
      [A2_1, 1, 6] 1
      [A2_2, 1, 1] 2 [A2_2, 1, 2] 2 [A2_2, 1, 3] 2
      [A2_3, 1, 1] 1 [A2_3, 1, 2] 1 [A2_3, 1, 3] 2 [A2_3, 1, 4] 2
      [A3_1, 1, 1] 1 [A3_1, 1, 2] 1 [A3_1, 1, 3] 1 [A3_1, 1, 4] 1 [A3_1, 1, 5] 1
      [A3_2, 1, 1] 2 [A3_2, 1, 2] 2 [A3_2, 1, 3] 1
      [A4_1, 1, 1] 1 [A4_1, 1, 2] 1 [A4_1, 1, 3] 1
      [A5_1, 1, 1] 1 [A5_1, 1, 2] 1 [A5_1, 1, 3] 1 [A5_1, 1, 4] 1 [A5_1, 1, 5] 1
      [A5_1, 1, 6] 1 [A5_1, 1, 7] 1 [A5_1, 1, 8] 1 [A5_1, 1, 9] 1 [A5_1, 1, 10] 1
      [A5_2, 1, 1] 1 [A5_2, 1, 2] 2 [A5_2, 1, 3] 2 [A5_2, 1, 4] 2 [A5_2, 1, 5] 2
      [A5_2, 1, 6] 1
      [A5_3, 1, 1] 2 [A5_3, 1, 2] 2 [A5_3, 1, 3] 2 [A5_3, 1, 4] 2 [A5_3, 1, 5] 2
      [A6_1, 1, 1] 1 [A6_1, 1, 2] 1 [A6_1, 1, 3] 1 [A6_1, 1, 4] 1 [A6_1, 1, 5] 1
      [A6_1, 1, 6] 1 [A6_1, 1, 7] 1
      [A6_2, 1, 1] 1 [A6_2, 1, 2] 2 [A6_2, 1, 3] 2 [A6_2, 1, 4] 2
      [A6_3, 1, 1] 2 [A6_3, 1, 2] 2 [A6_3, 1, 3] 2 [A6_3, 1, 4] 1
;
```

結果は，以下のようになります.

```
最小完了日数 = 11
セミナー [1,0] = 2
セミナー [1,1] = 3
セミナー [2,0] = 4
```

```
セミナー[2,1] = 5
セミナー[3,0] = 1
セミナー[3,1] = 2
セミナー[4,0] = 5
セミナー[4,1] = 7
セミナー[5,0] = 0
セミナー[5,1] = 1
セミナー[6,0] = 3
セミナー[6,1] = 4
```

2.25　ジョブショップスケジューリング問題

ジョブショップスケジューリング問題とは，生産計画等の現場で現れる問題です．各々決まった作業を行う機械に仕事 (ジョブ) を効率的に割り振る事で，完了時刻，納期遅れ等の最小化を目的としたスケジュールを作成する問題です．本節では，以下のようなジョブショップスケジューリング問題を考えます．

- 機械の数が複数
- 仕事は複数の作業から構成される
- 各仕事における全ての作業が処理されると，全体の処理が完了する

本問題は，作業が処理される順序によって，以下の 3 つに大別されます．

1. オープンショップ問題（2.25.1 節）
   全ての仕事は作業の順序が決まっていない．
2. フローショップ問題（2.25.2 節）
   全ての仕事は作業の順序が決まっていて，その順序は仕事に関わらず全て同じ．
3. ジョブショップ問題（2.25.3 節）
   全ての仕事は作業の順序が決まっていて，その順序は仕事により異なる．フローショップ問題の一般形．

以下で，上記 1〜3 の例題を紹介します．必要に応じて「Nuorium Optimizer マニュアル」内にある rcpsp の解説も併せてご覧ください．

2.25.1　オープンショップ問題

■■例題　オープンショップ問題

3 つの作業から構成される，3 つの仕事があるとします．各作業を処理する機械と処理時間は以下のように与えられています．

	作業 1（機械 1）	作業 2（機械 2）	作業 3（機械 3）
仕事 a	5 時間	8 時間	4 時間

仕事 b	5 時間	4 時間	6 時間
仕事 c	6 時間	5 時間	5 時間

各機械が作業を処理している間は，他の作業を処理する事は出来ません．また，各作業を処理する順番に制限はありません．この場合の最後の作業の完了時刻が最小となるようにするには，各仕事をどのように機械に割り振ればいいでしょうか．なお，すべての仕事を終えるまでの所要時間は最大で 30 時間までとします．

この問題を資源制約付きスケジューリング問題で定式化すると，例えば以下の様になります．

各仕事の各作業は同時には 2 つ以上処理出来ない事を，ダミー資源を用いて表現している事に注意してください．

資源	
machine1	機械 1，供給量:常に 1
machine2	機械 2，供給量:常に 1
machine3	機械 3，供給量:常に 1
d1	ダミー資源 1，供給量:常に 1
d2	ダミー資源 2，供給量:常に 1
d3	ダミー資源 3，供給量:常に 1

モード	
mode_a_1	処理時間:5 必要量：machine1, d1 を処理時間中常に 1
mode_a_2	処理時間:8 必要量：machine2, d1 を処理時間中常に 1
mode_a_3	処理時間:4 必要量：machine3, d1 を処理時間中常に 1
mode_b_1	処理時間:5 必要量：machine1, d2 を処理時間中常に 1
mode_b_2	処理時間:4 必要量：machine2, d2 を処理時間中常に 1
mode_b_3	処理時間:6 必要量：machine3, d2 を処理時間中常に 1
mode_c_1	処理時間:6 必要量：machine1, d3 を処理時間中常に 1
mode_c_2	処理時間:5 必要量：machine2, d3 を処理時間中常に 1
mode_c_3	処理時間:5 必要量：machine3, d3 を処理時間中常に 1

アクティビティ	
$act_{a,1}$	仕事 a の作業 1 処理モード：mode_a_1
$act_{a,2}$	仕事 a の作業 2 処理モード：mode_a_2
$act_{a,3}$	仕事 a の作業 3 処理モード：mode_a_3
$act_{b,1}$	仕事 b の作業 1 処理モード：mode_b_1
$act_{b,2}$	仕事 b の作業 2 処理モード：mode_b_2
$act_{b,3}$	仕事 b の作業 3 処理モード：mode_b_3
$act_{c,1}$	仕事 c の作業 1 処理モード：mode_c_1
$act_{c,2}$	仕事 c の作業 2 処理モード：mode_c_2
$act_{c,3}$	仕事 c の作業 3 処理モード：mode_c_3

目的関数（最小化）	
completionTime	最後の作業の完了時刻

スケジュール期間	
T	最大で 30 時間とする

これを C++SIMPLE で記述すると次のようになります.

なお，アクティビティの引数に渡すモード集合ですが，仕事・作業の各組み合わせに対してどのモードが対応するかという集合 AvailMode を用意し，それを引数として渡します.

openshop.smp

```
// 作業集合
Set J; // 仕事
Element j(set = J);
Set S; // 作業
Element s(set = S);
// モード集合
```

```
Set M;
Element m(set = M);
Set AvailMode(name = "AvailMode", index=(j, s)); // 各仕事のオペレーションにおいて処理されるモード
// 資源集合
Set R;
Element r(set = R);
// 作業時間集合
Set D; // 各モードの作業時間の最大
Element d(set = D);
// 期間集合
Set T; // スケジュール期間
T = "0 .. 30";
Element t(set = T);

// アクティビティ(変数)
Activity act(name = "act", index = (j, s), mode = AvailMode[j, s]);

// 定数
// 必要資源量
ResourceRequire req(name = "req", mode = M, resource = R, duration = D);
// 資源供給量
ResourceCapacity cap(name = "cap", resource = R, timeStep = T);
cap[r, t] = 1;

// 目的関数
Objective f(type = minimize);
f = completionTime; // 最後の作業の完了時刻最小化

// 求解最大時間の設定
options.maxtim = 15;

// 求解
solve();

// 結果の標準出力
simple_printf("act[%s, %d] = %d\n", j, s, act[j, s].startTime);
```

データファイルは次のようになります.

data.dat

```
AvailMode =
[a, 1] mode_a_1
[a, 2] mode_a_2
[a, 3] mode_a_3
[b, 1] mode_b_1
[b, 2] mode_b_2
[b, 3] mode_b_3
[c, 1] mode_c_1
[c, 2] mode_c_2
[c, 3] mode_c_3
;
```

req.dat

```
req =
[mode_a_1, machine1, 1] 1 [mode_a_2, machine2, 1] 1 [mode_a_3, machine3, 1] 1
[mode_a_1, machine1, 2] 1 [mode_a_2, machine2, 2] 1 [mode_a_3, machine3, 2] 1
[mode_a_1, machine1, 3] 1 [mode_a_2, machine2, 3] 1 [mode_a_3, machine3, 3] 1
[mode_a_1, machine1, 4] 1 [mode_a_2, machine2, 4] 1 [mode_a_3, machine3, 4] 1
[mode_a_1, machine1, 5] 1 [mode_a_2, machine2, 5] 1
                          [mode_a_2, machine2, 6] 1
                          [mode_a_2, machine2, 7] 1
                          [mode_a_2, machine2, 8] 1

[mode_b_1, machine1, 1] 1 [mode_b_2, machine2, 1] 1 [mode_b_3, machine3, 1] 1
[mode_b_1, machine1, 2] 1 [mode_b_2, machine2, 2] 1 [mode_b_3, machine3, 2] 1
[mode_b_1, machine1, 3] 1 [mode_b_2, machine2, 3] 1 [mode_b_3, machine3, 3] 1
[mode_b_1, machine1, 4] 1 [mode_b_2, machine2, 4] 1 [mode_b_3, machine3, 4] 1
[mode_b_1, machine1, 5] 1                           [mode_b_3, machine3, 5] 1
                                                    [mode_b_3, machine3, 6] 1

[mode_c_1, machine1, 1] 1 [mode_c_2, machine2, 1] 1 [mode_c_3, machine3, 1] 1
[mode_c_1, machine1, 2] 1 [mode_c_2, machine2, 2] 1 [mode_c_3, machine3, 2] 1
[mode_c_1, machine1, 3] 1 [mode_c_2, machine2, 3] 1 [mode_c_3, machine3, 3] 1
[mode_c_1, machine1, 4] 1 [mode_c_2, machine2, 4] 1 [mode_c_3, machine3, 4] 1
[mode_c_1, machine1, 5] 1 [mode_c_2, machine2, 5] 1 [mode_c_3, machine3, 5] 1
[mode_c_1, machine1, 6] 1
```

```
[mode_a_1, d1, 1] 1 [mode_a_2, d1, 1] 1 [mode_a_3, d1, 1] 1
[mode_a_1, d1, 2] 1 [mode_a_2, d1, 2] 1 [mode_a_3, d1, 2] 1
[mode_a_1, d1, 3] 1 [mode_a_2, d1, 3] 1 [mode_a_3, d1, 3] 1
[mode_a_1, d1, 4] 1 [mode_a_2, d1, 4] 1 [mode_a_3, d1, 4] 1
[mode_a_1, d1, 5] 1 [mode_a_2, d1, 5] 1
                    [mode_a_2, d1, 6] 1
                    [mode_a_2, d1, 7] 1
                    [mode_a_2, d1, 8] 1

[mode_b_1, d2, 1] 1 [mode_b_2, d2, 1] 1 [mode_b_3, d2, 1] 1
[mode_b_1, d2, 2] 1 [mode_b_2, d2, 2] 1 [mode_b_3, d2, 2] 1
[mode_b_1, d2, 3] 1 [mode_b_2, d2, 3] 1 [mode_b_3, d2, 3] 1
[mode_b_1, d2, 4] 1 [mode_b_2, d2, 4] 1 [mode_b_3, d2, 4] 1
[mode_b_1, d2, 5] 1                     [mode_b_3, d2, 5] 1
                                        [mode_b_3, d2, 6] 1

[mode_c_1, d3, 1] 1 [mode_c_2, d3, 1] 1 [mode_c_3, d3, 1] 1
[mode_c_1, d3, 2] 1 [mode_c_2, d3, 2] 1 [mode_c_3, d3, 2] 1
[mode_c_1, d3, 3] 1 [mode_c_2, d3, 3] 1 [mode_c_3, d3, 3] 1
[mode_c_1, d3, 4] 1 [mode_c_2, d3, 4] 1 [mode_c_3, d3, 4] 1
[mode_c_1, d3, 5] 1 [mode_c_2, d3, 5] 1 [mode_c_3, d3, 5] 1
[mode_c_1, d3, 6] 1
;
```

実行すると，各作業の開始時刻

```
act[a, 1] = 0
act[a, 2] = 5
act[a, 3] = 13
act[b, 1] = 6
act[b, 2] = 13
act[b, 3] = 0
act[c, 1] = 11
act[c, 2] = 0
act[c, 3] = 6
```

が出力されます．

2.25.2 フローショップ問題

例題 フローショップ問題

前節のオープンショップ問題の条件の下，各仕事は，作業 1, 作業 2, 作業 3 の順で処理されなければならないとします．この場合の最後の作業の完了時刻が最小となるようにするには，どのように機械を割り振ればよいでしょうか.

この問題を記述するには，各作業の処理順序を制約する以下の先行制約を加える必要があります．なお，以下で用いている $\prec$ は先行関係を表す記号とします.

先行制約	
$act_{a,1} \prec act_{a,2}$	仕事 a の作業 1 は，仕事 a の作業 2 に先行する
$act_{a,2} \prec act_{a,3}$	仕事 a の作業 2 は，仕事 a の作業 3 に先行する
$act_{b,1} \prec act_{b,2}$	仕事 b の作業 1 は，仕事 b の作業 2 に先行する
$act_{b,2} \prec act_{b,3}$	仕事 b の作業 2 は，仕事 b の作業 3 に先行する
$act_{c,1} \prec act_{c,2}$	仕事 c の作業 1 は，仕事 c の作業 2 に先行する
$act_{c,2} \prec act_{c,3}$	仕事 c の作業 2 は，仕事 c の作業 3 に先行する

上記の先行制約を加えた C++SIMPLE のモデルは以下の様になります．尚，各仕事の各作業を同時に 2 つ以上処理出来ない事は，先行制約で表現されている事に注意してください.

flowshop.smp

```
// 作業集合
Set J; // 仕事
Element j(set = J);
Set S; // 作業
Element s(set = S);
// モード集合
Set M;
Element m(set = M);
Set AvailMode(name = "AvailMode", index = (j, s)); // 各仕事のオペレーションにおいて処理されるモード
// 資源集合
Set R;
Element r(set = R);
// 作業時間集合
Set D; // 各モードの作業時間の最大
Element d(set = D);
// 期間集合
```

```
Set T; // スケジュール期間
T = "0 .. 30";
Element t(set = T);

// アクティビティ（変数）
Activity act(name = "act", index = (j, s), mode = AvailMode[j, s]);

// 定数
// 必要資源量
ResourceRequire req(name = "req", mode = M, resource = R, duration = D);
// 資源供給量
ResourceCapacity cap(name = "cap", resource = R, timeStep = T);
cap[r, t] = 1;

// 目的関数（最後の作業の完了時刻の最小化）
Objective f(type = minimize);
f = completionTime;

// 先行制約
act[j, s - 1] < act[j, s], 1 < s;

// 求解最大時間の設定
options.maxtim = 15;

// 求解
solve();

// 結果の標準出力
simple_printf("act[%s, %d] = %d\n", j, s, act[j, s].startTime);
```

データファイルは「2.25.1 オープンショップ問題」で使用した data.dat と次の req.dat を使用します. req.dat は先行制約を設けた事により，ダミー資源を用いる必要が無くなった為に修正されています.

req.dat

```
req =
[mode_a_1, machine1, 1] 1 [mode_a_2, machine2, 1] 1 [mode_a_3, machine3, 1] 1
[mode_a_1, machine1, 2] 1 [mode_a_2, machine2, 2] 1 [mode_a_3, machine3, 2] 1
[mode_a_1, machine1, 3] 1 [mode_a_2, machine2, 3] 1 [mode_a_3, machine3, 3] 1
[mode_a_1, machine1, 4] 1 [mode_a_2, machine2, 4] 1 [mode_a_3, machine3, 4] 1
```

```
[mode_a_1, machine1, 5] 1 [mode_a_2, machine2, 5] 1
                          [mode_a_2, machine2, 6] 1
                          [mode_a_2, machine2, 7] 1
                          [mode_a_2, machine2, 8] 1

[mode_b_1, machine1, 1] 1 [mode_b_2, machine2, 1] 1 [mode_b_3, machine3, 1] 1
[mode_b_1, machine1, 2] 1 [mode_b_2, machine2, 2] 1 [mode_b_3, machine3, 2] 1
[mode_b_1, machine1, 3] 1 [mode_b_2, machine2, 3] 1 [mode_b_3, machine3, 3] 1
[mode_b_1, machine1, 4] 1 [mode_b_2, machine2, 4] 1 [mode_b_3, machine3, 4] 1
[mode_b_1, machine1, 5] 1                           [mode_b_3, machine3, 5] 1
                                                    [mode_b_3, machine3, 6] 1

[mode_c_1, machine1, 1] 1 [mode_c_2, machine2, 1] 1 [mode_c_3, machine3, 1] 1
[mode_c_1, machine1, 2] 1 [mode_c_2, machine2, 2] 1 [mode_c_3, machine3, 2] 1
[mode_c_1, machine1, 3] 1 [mode_c_2, machine2, 3] 1 [mode_c_3, machine3, 3] 1
[mode_c_1, machine1, 4] 1 [mode_c_2, machine2, 4] 1 [mode_c_3, machine3, 4] 1
[mode_c_1, machine1, 5] 1 [mode_c_2, machine2, 5] 1 [mode_c_3, machine3, 5] 1
[mode_c_1, machine1, 6] 1
;
```

実行すると，各作業の開始時刻が以下のように出力されます.

```
act[a, 1] = 11
act[a, 2] = 16
act[a, 3] = 24
act[b, 1] = 6
act[b, 2] = 11
act[b, 3] = 16
act[c, 1] = 0
act[c, 2] = 6
act[c, 3] = 11
```

2.25.3 ジョブショップ問題

例題　ジョブショップ問題

前節のオープンショップ問題の条件の下，各仕事は以下の順に処理されなければならないものとします.

	作業 1（機械 1）	作業 2（機械 2）	作業 3（機械 3）
仕事 a	1	3	2
仕事 b	1	2	3
仕事 c	2	1	3

この場合の最後の作業の完了時刻が最小となるようにするには，どのように機械を割り振ればよいでしょうか.

この問題は，先行制約が以下の様に変更されます.

先行制約	
$act_{a,1} \prec act_{a,3}$	仕事 a の作業 1 は，仕事 a の作業 3 に先行する
$act_{a,3} \prec act_{a,2}$	仕事 a の作業 3 は，仕事 a の作業 2 に先行する
$act_{b,1} \prec act_{b,2}$	仕事 b の作業 1 は，仕事 b の作業 2 に先行する
$act_{b,2} \prec act_{b,3}$	仕事 b の作業 2 は，仕事 b の作業 3 に先行する
$act_{c,2} \prec act_{c,1}$	仕事 c の作業 2 は，仕事 c の作業 1 に先行する
$act_{c,1} \prec act_{c,3}$	仕事 c の作業 1 は，仕事 c の作業 3 に先行する

上記の先行制約をデータから与えられるように C++SIMPLE のモデルとデータを修正します.

jobshop.smp

```
// 作業集合
Set J; // 仕事
Element j(set = J);
Set S; // 作業
Element s(set = S);
// モード集合
Set M;
Element m(set = M);
Set AvailMode(name = "AvailMode", index = (j, s)); // 各仕事のオペレーションにおいて処理されるモード
// 資源集合
Set R;
Element r(set = R);
// 作業時間集合
Set D; // 各モードの作業時間の最大
Element d(set = D);
// 期間集合
Set T; // スケジュール期間
T = "0 .. 30";
```

```
Element t(set = T);

// アクティビティ(変数)
Activity act(name = "act", index = (j, s), mode = AvailMode[j, s]);

// 定数
// 必要資源量
ResourceRequire req(name = "req", mode = M, resource = R, duration = D);
// 資源供給量
ResourceCapacity cap(name = "cap", resource = R, timeStep = T);
cap[r, t] = 1;

// 目的関数(最後の作業の完了時刻の最小化)
Objective f(type = minimize);
f = completionTime;

// 先行制約
Set Prec(name = "Prec", dim = 3);
Element u(set = S);
Element v(set = S);
act[j, u] < act[j, v], (j, u, v) < Prec;

// 求解最大時間の設定
options.maxtim = 15;

// 求解
solve();

// 結果の標準出力
simple_printf("act[%s, %d] = %d\n", j, s, act[j, s].startTime);
```

データファイルは「2.25.2 フローショップ問題」で使用した req.dat と次の data.dat を使用します.

data.dat

```
AvailMode =
[a, 1] mode_a_1
[a, 2] mode_a_2
[a, 3] mode_a_3
[b, 1] mode_b_1
```

```
[b, 2] mode_b_2
[b, 3] mode_b_3
[c, 1] mode_c_1
[c, 2] mode_c_2
[c, 3] mode_c_3
;

Prec =
a 1 3
a 3 2
b 1 2
b 2 3
c 2 1
c 1 3
;
```

実行すると，各作業の開始時刻が以下のように出力されます．

```
act[a, 1] = 0
act[a, 2] = 14
act[a, 3] = 5
act[b, 1] = 5
act[b, 2] = 10
act[b, 3] = 14
act[c, 1] = 10
act[c, 2] = 0
act[c, 3] = 20
```

2.25.4　リスケジューリング問題

実際の現場では，ある時機械が故障した等の突発事故が起こる事がしばしばあります．その場合，過去のスケジュールを固定し，条件を変更した後，再度スケジュールを組み直します．このような問題をリスケジューリング問題と呼ぶ事にします．

■■例題　リスケジューリング問題

前節のジョブショップ問題を解いた結果，各作業の開始時刻は，

	作業 1（機械 1）	作業 2（機械 2）	作業 3（機械 3）
仕事 a	0	14	5
仕事 b	5	10	14

仕事 c	10	0	20

となりました．このスケジュールに基づいて機械を運転していた所，10 時間が過ぎた所で，機械 2 が故障し，5 時間停止する事になりました．この場合の最後の作業の完了時刻が最小となるようにはどのようにスケジュールを組み直せばよいでしょうか．

この問題を記述するには，過去のスケジュールを固定する為，アクティビティ固定関数（fixActivity）を使用する必要があります．また，未来のスケジュールが過去に来ないようにする為，全ての作業に先行する sourceActivity（自動で定義されている）という先行制約を記述する必要があります．

以上のことを踏まえると，制約としては新たに以下のものが加わります．

アクティビティの開始時刻固定	
$fixActivity(act_{a,1}.startTime)$	仕事 a の作業 1 の開始時刻を 0 に固定する
$fixActivity(act_{a,3}.startTime)$	仕事 a の作業 3 の開始時刻を 5 に固定する
$fixActivity(act_{b,1}.startTime)$	仕事 b の作業 1 の開始時刻を 5 に固定する
$fixActivity(act_{c,2}.startTime)$	仕事 c の作業 2 の開始時刻を 0 に固定する

アクティビティのモード固定	
$fixActivity(act_{a,1})$	仕事 a の作業 1 のモードを mode_a_1 に固定する
$fixActivity(act_{a,3})$	仕事 a の作業 3 のモードを mode_a_3 に固定する
$fixActivity(act_{b,1})$	仕事 b の作業 1 のモードを mode_b_1 に固定する
$fixActivity(act_{c,2})$	仕事 c の作業 2 のモードを mode_c_2 に固定する

先行制約	
$sourceActivity \prec act_{a,2}, 10$	仕事 a の作業 2 は，時刻 10 以前には処理されない
$sourceActivity \prec act_{b,2}, 10$	仕事 b の作業 2 は，時刻 10 以前には処理されない
$sourceActivity \prec act_{b,3}, 10$	仕事 b の作業 3 は，時刻 10 以前には処理されない
$sourceActivity \prec act_{c,1}, 10$	仕事 c の作業 1 は，時刻 10 以前には処理されない
$sourceActivity \prec act_{c,3}, 10$	仕事 c の作業 3 は，時刻 10 以前には処理されない

また，機械 2 は，時刻 10 から 5 時間停止するので，資源が以下の様に修正されます．

資源	
machine1	機械 1，供給量:常に 1

machine2	機械 2，供給量:時刻 10 以上 15 未満 0，その他常に 1
machine3	機械 3，供給量:常に 1

これを C++SIMPLE で記述すると以下の様になります.

jobShopRsch.smp

```
// 作業集合
Set J; // 仕事
Element j(set = J);
Set S; // 作業
Element s(set = S);
// モード集合
Set M;
Element m(set = M);
Set AvailMode(name = "AvailMode", index = (j, s)); // 各仕事のオペレーションにおいて処理されるモード
// 資源集合
Set R;
Element r(set = R);
// 作業時間集合
Set D; // 各モードの作業時間の最大
Element d(set = D);
// 期間集合
Set T; // スケジュール期間
T = "0 .. 30";
Element t(set = T);
// アクティビティ (変数)
Activity act(name = "act", index = (j, s), mode = AvailMode[j, s]);

// 必要資源量（定数）
ResourceRequire req(name = "req", mode = M, resource = R, duration = D);
// 資源供給量（定数）
ResourceCapacity cap(name = "cap", resource = R, timeStep = T);
cap[r, t] = 1;
cap["machine2", t] = 0, 10 <= t <=14; // 故障に対応

// 目的関数 (最後の作業の完了時刻の最小化)
```

```
Objective f(type = minimize);
f = completionTime;

// 先行制約
Set Prec(name = "Prec", dim = 3);
Element u(set = S);
Element v(set = S);
act[j, u] < act[j, v], (j, u, v) < Prec;

/* --- リスケジューリングの為の制約 --- */
// 過去(0 .. 10)のスケジュールを固定
Set FixAct(name = "FixAct", dim = 2);
Parameter fixTime(name = "fixTime", index = (j, s));
act[j, s].startTime = fixTime[j, s], (j, s) < FixAct;
Parameter fixMode(name = "fixMode", index = (j, s));
act[j, s] = fixMode[j, s], (j, s) < FixAct;
fixActivity(act[j, s].startTime, (j, s) < FixAct);
fixActivity(act[j, s], (j, s) < FixAct);
// 過去のジョブ以外はステップ 10 以前に来てはならない
Set NotFixAct(name = "NotFixAct", dim = 2);
NotFixAct = setOf((j, s), (j < J, s < S)) - FixAct;
sourceActivity < act[j, s], (j, s) < NotFixAct, 10;
/* ---------------------------------- */

options.maxtim = 15;
solve();

simple_printf("act[%s, %d] = %d\n", j, s, act[j, s].startTime);
```

データファイルは「2.25.2 フローショップ問題」で使用した req.dat と次の data.dat を使用します.

data.dat

```
AvailMode =
[a, 1] mode_a_1
[a, 2] mode_a_2
[a, 3] mode_a_3
[b, 1] mode_b_1
[b, 2] mode_b_2
[b, 3] mode_b_3
```

```
[c, 1] mode_c_1
[c, 2] mode_c_2
[c, 3] mode_c_3
;

Prec =
a 1 3
a 3 2
b 1 2
b 2 3
c 2 1
c 1 3
;

FixAct =
a 1
a 3
b 1
c 2
;

fixTime = [a, 1] 0 [a, 3] 5 [b, 1] 5 [c, 2] 0;
fixMode = [a, 1] mode_a_1 [a, 3] mode_a_3 [b, 1] mode_b_1 [c, 2] mode_c_2;
```

実行すると，各作業の開始時刻が以下のように出力されます．

```
act[a, 1] = 0
act[a, 2] = 19
act[a, 3] = 5
act[b, 1] = 5
act[b, 2] = 15
act[b, 3] = 21
act[c, 1] = 10
act[c, 2] = 0
act[c, 3] = 16
```

参考文献

[1] George B. Dantzig, Mukund N.Thapa, Linear Programming 1:Introduction, Springer, 1997

[2] 福島雅夫，数理計画入門，朝倉書店，1996

[3] 刀根薫，数理計画，朝倉書店，2007

[4] H.P. ウイリアムス，数理計画モデルの作成法，産業図書，1995

[5] Fisher,R.A., The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems. Annals of Eugenics, 7, 179-188, 1936

[6] Frank J.Fabozzi, Petter N.Kolm, Dessislava A. Pachamanova, Sergio M. Focardi, Robust Portfolio Optimization and Management, John Wiley & Sons, Inc., 2007

[7] Christoph Helmberg, Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization, Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin, January 2000

[8] 柳井春夫・竹内啓，射影行列 一般逆行列 特異値分解，東京大学出版会

[9] 枇々木規雄・田辺隆人，ポートフォリオ最適化と数理計画法，朝倉書店

索　引