Vasicek Modelによる債券ポートフォリオの価値

法政大学大学院
理工学研究科
システム工学専攻

越阪部　昭太

研究目的

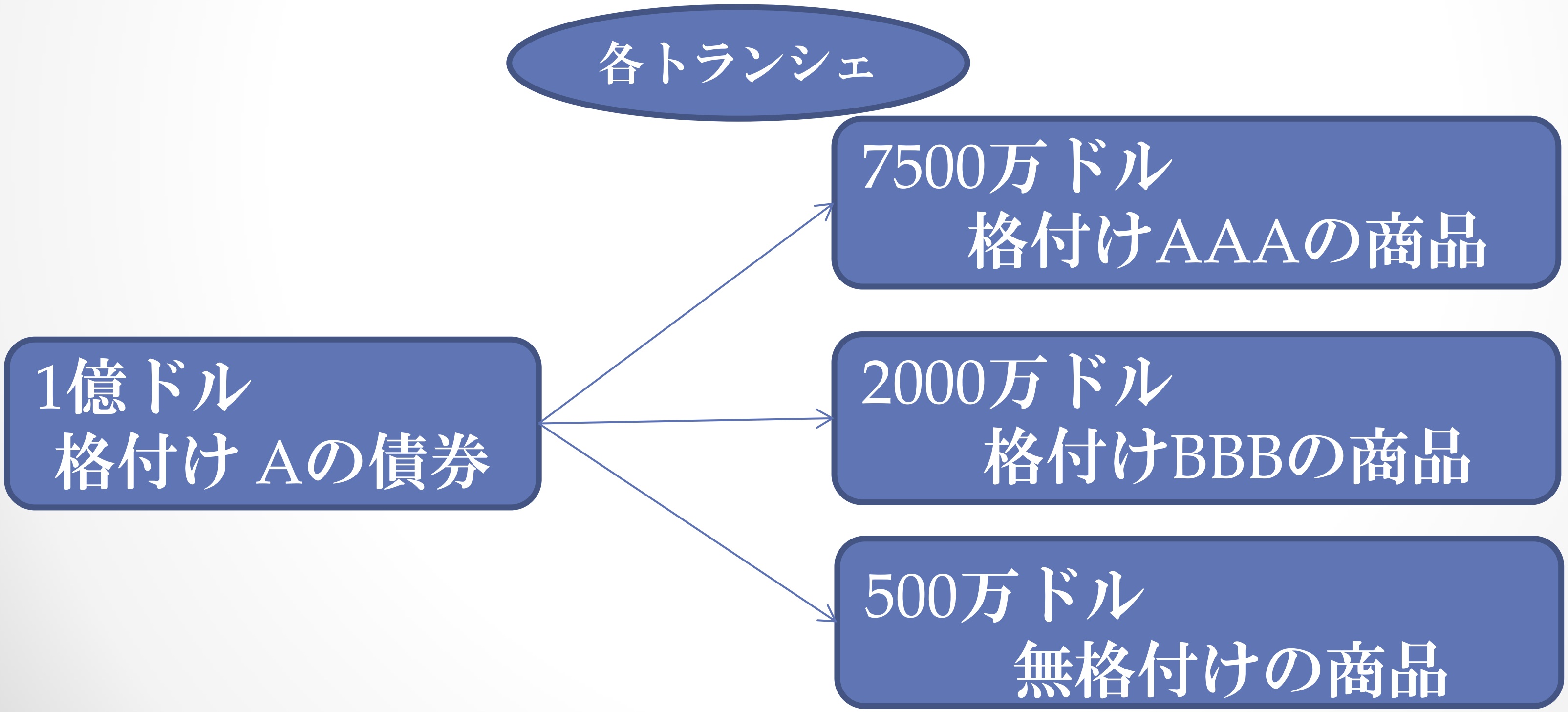
2007年夏ごろからアメリカで住宅価格が下落し、住宅バブル崩壊に至る。その状況でサブプライムローンに関わるローンが組み込まれた金融商品の信用まで失い、リーマンショックが起こった。

サブプライムローンを組み込んだポートフォリオ損失の適切なリスク管理が原因

そこで私は格付機関の評価の基礎とされるVasicekのモデルを用いて、債券ポートフォリオの価値について検証する。

CDO

CDOとは、「債務担保証券」と呼ばれ、社債やローンなどから構成される資産担保証券の一種である。



CDO

格付けに対するデフォルト確率

	1年	3年	5年	10年
Aaa	0.0001%	0.0007%	0.0029%	0.0100%
Aa	0.0006%	0.0100%	0.0310%	0.1000%
A	0.0058%	0.1170%	0.2610%	0.7000%
Baa	0.0900%	0.5600%	1.1000%	2.6000%
Ba	0.8700%	3.1300%	5.2800%	9.4000%

2009年:ムーディーズ参照

Vasicek Model

$$dA_i = \mu_i A_i dt + \sigma_i A_i dX_i$$

A_i:第i番目の借用者の資産価値

導出

X_i: ブラウン運動

$$A_i(T) = A_i e^{\mu_i T + \sigma_i X_i \sqrt{T} - \frac{1}{2}\sigma_i{}^2 T}$$

ブラウン運動

会社固有リスクのブラウン運動

$$X_i = \underline{Y\sqrt{\rho}} + \underline{Z_i\sqrt{1-\rho}}$$

全ての企業に影響を与える
共通リスクのブラウン運動

デフォルト確率

借用者の資産価値が支払うべき義務の契約値
B_i以下になるとローンがデフォルトすると仮定すると

$$p_i = P[A_i(T) < B_i]$$

$$= P[X_i < c_i]$$

$$= N(c_i)$$

N:標準正規分布

$$c_i = \frac{\log B_i - \log A_i - \mu_i T + \frac{1}{2}{\sigma_i}^2 T}{\sigma_i \sqrt{T}}$$

ポートフォリオパーセントロス

L_i： 第iローンでの総損失

デフォルトする
$L_i = 1$

デフォルトしない
$L_i = 0$

正規分布に収束

$$L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i$$

n社のローン

条件付きデフォルト確率

$$p\,(Y) = P[L_i = 1|Y] = N\left[\frac{N^{-1}(p) - Y\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

p：無条件デフォルト確率

ρ：相関係数

ローンポートフォリオ損失の累積分布関数

L_i: Yの条件で分散が有限で独立な同分布

大数の法則

$$L = p(Y)$$

ローンポートフォリオ損失の累積分布関数

$$P[L \leqq x] = P\left[Y \geqq \frac{N^{-1}(p) - \sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}}\right]$$

Y:標準正規分布

N :正規分布の累積分布関数

$$P[L \leqq x] = N\left(\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right)$$

損失分布

x の区間が 0 以上 1 以下の連続分布

累積分布関数

$$\mathrm{F}(x;p,\rho)=N\left[\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)-N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right]$$

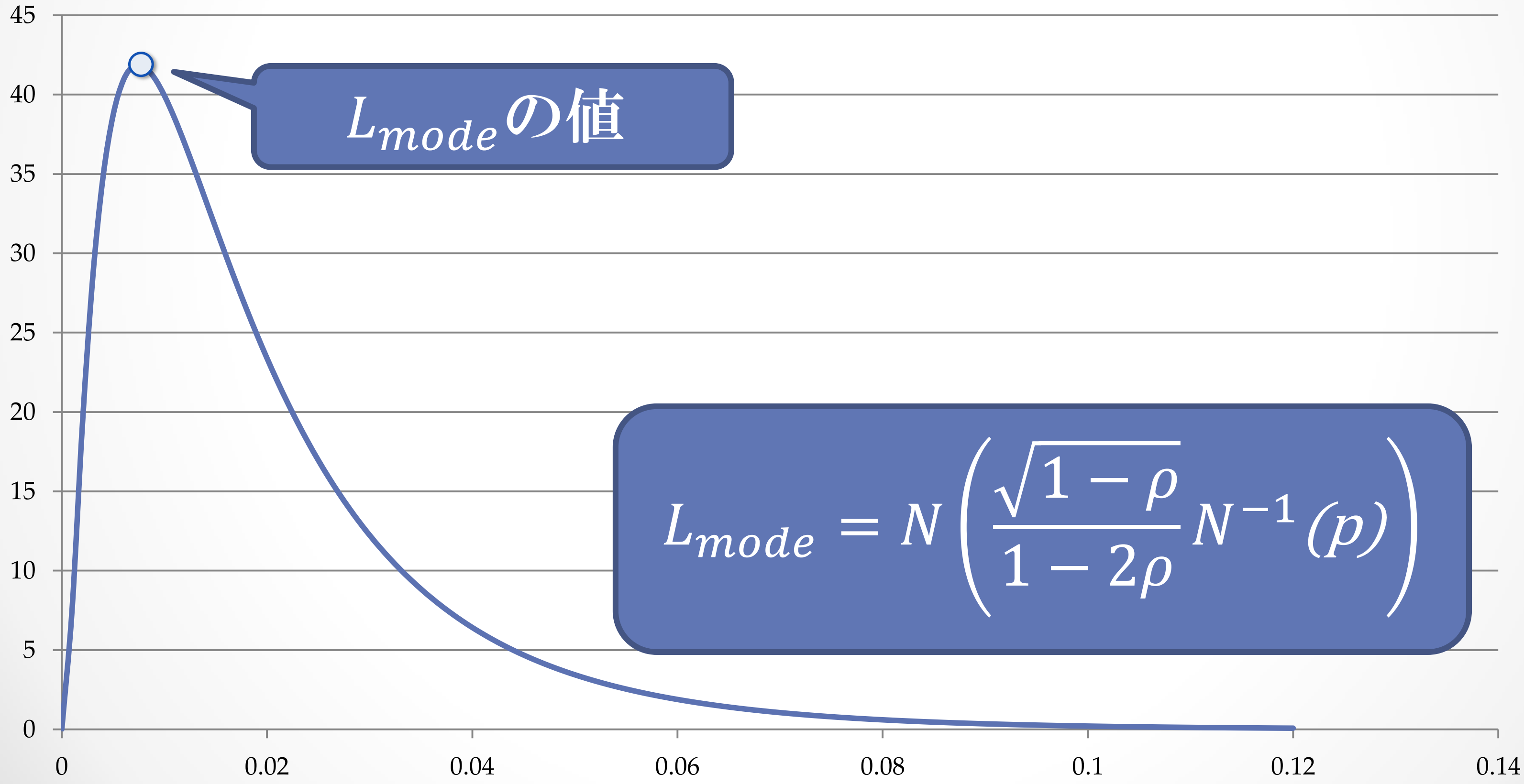
x微分

密度関数

$$f(x;p,\rho)=\sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}}exp\left(-\frac{1}{2\rho}\left(\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)-N^{-1}(p)\right)^2+\frac{1}{2}\left(N^{-1}(x)\right)^2\right)$$

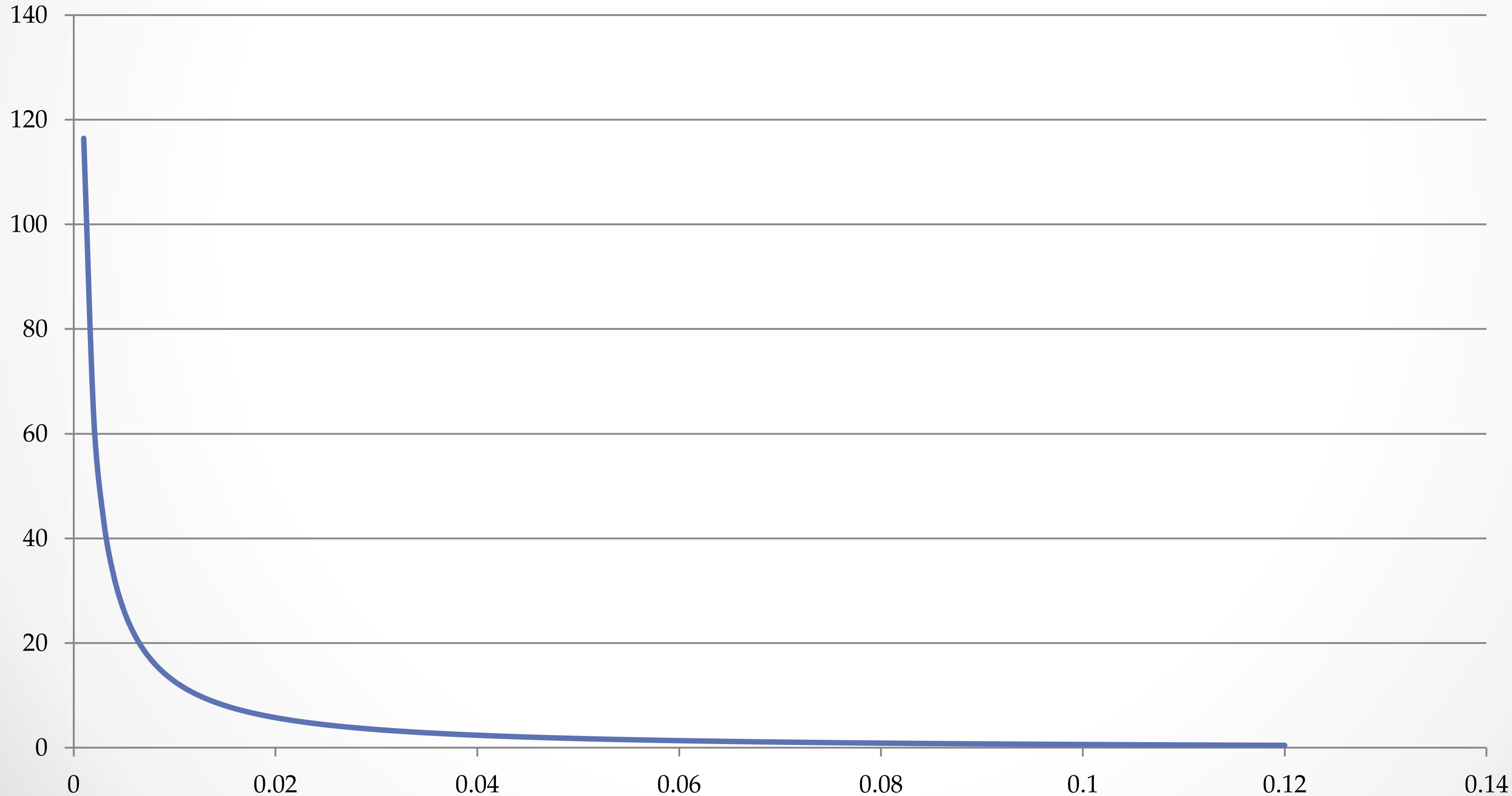
損失分布の密度関数のグラフ（1）

$\rho < \dfrac{1}{2}$のとき



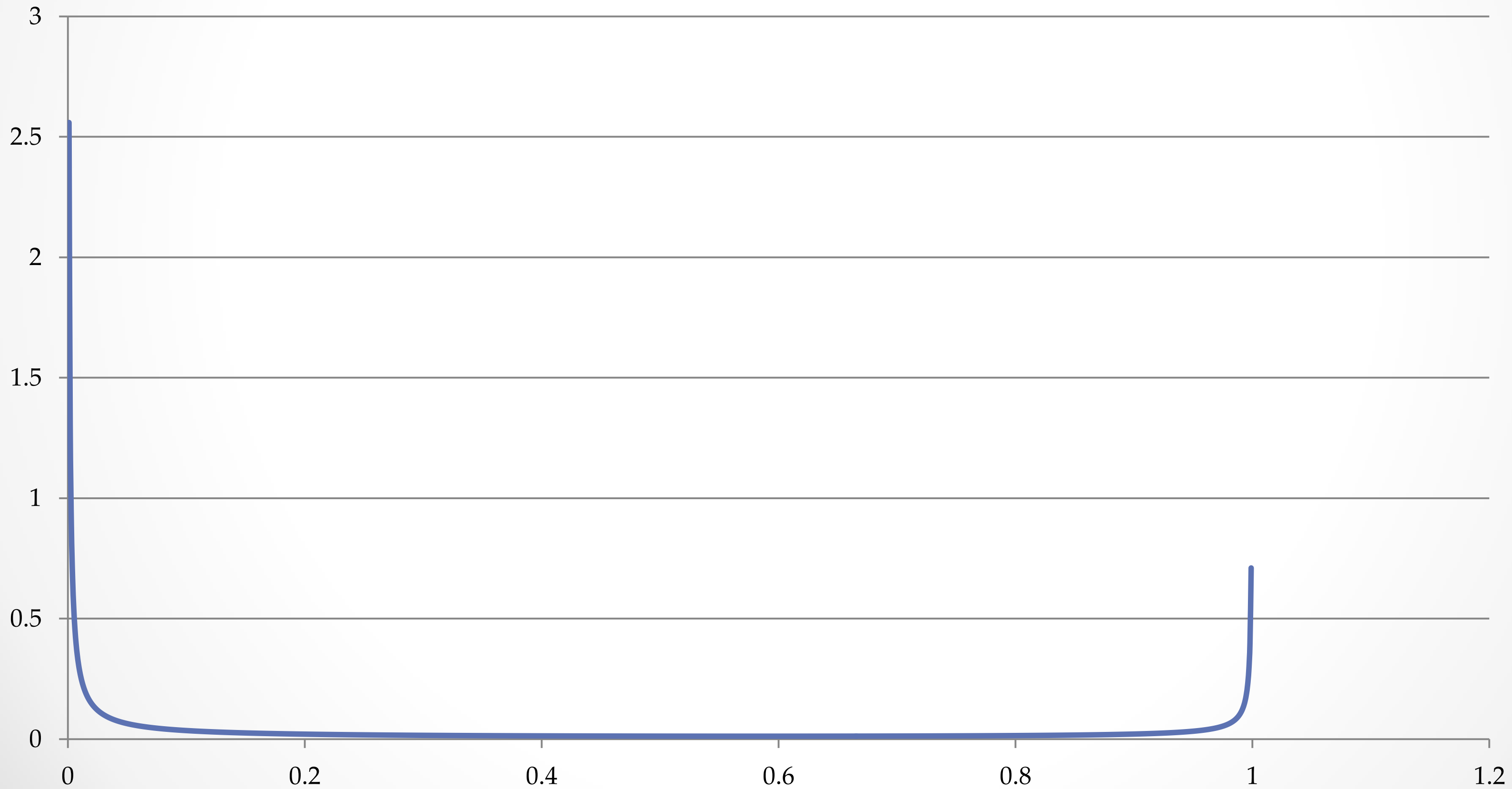
損失分布の密度関数のグラフ（2）

$\rho = \frac{1}{2}$のとき



損失分布の密度関数のグラフ（3）

$\rho > \dfrac{1}{2}$のとき



パーセンタイル値L_α

$$N\left[\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)-N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right]=\alpha$$

このxのL_αとする

$$x=N\left[\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)-N^{-1}(p)}{\sqrt{\rho}}\right]$$

N:標準正規分布

分散s^2

$E[L_\alpha] = p$とおくと

$$s^2 = V(L_\alpha) = E\left[{L_\alpha}^2\right] - (E[L_\alpha])^2$$

$$= \underline{N_2(N^{-1}(p), N^{-1}(p), \rho)} - p^2$$

二変量の標準正規分布

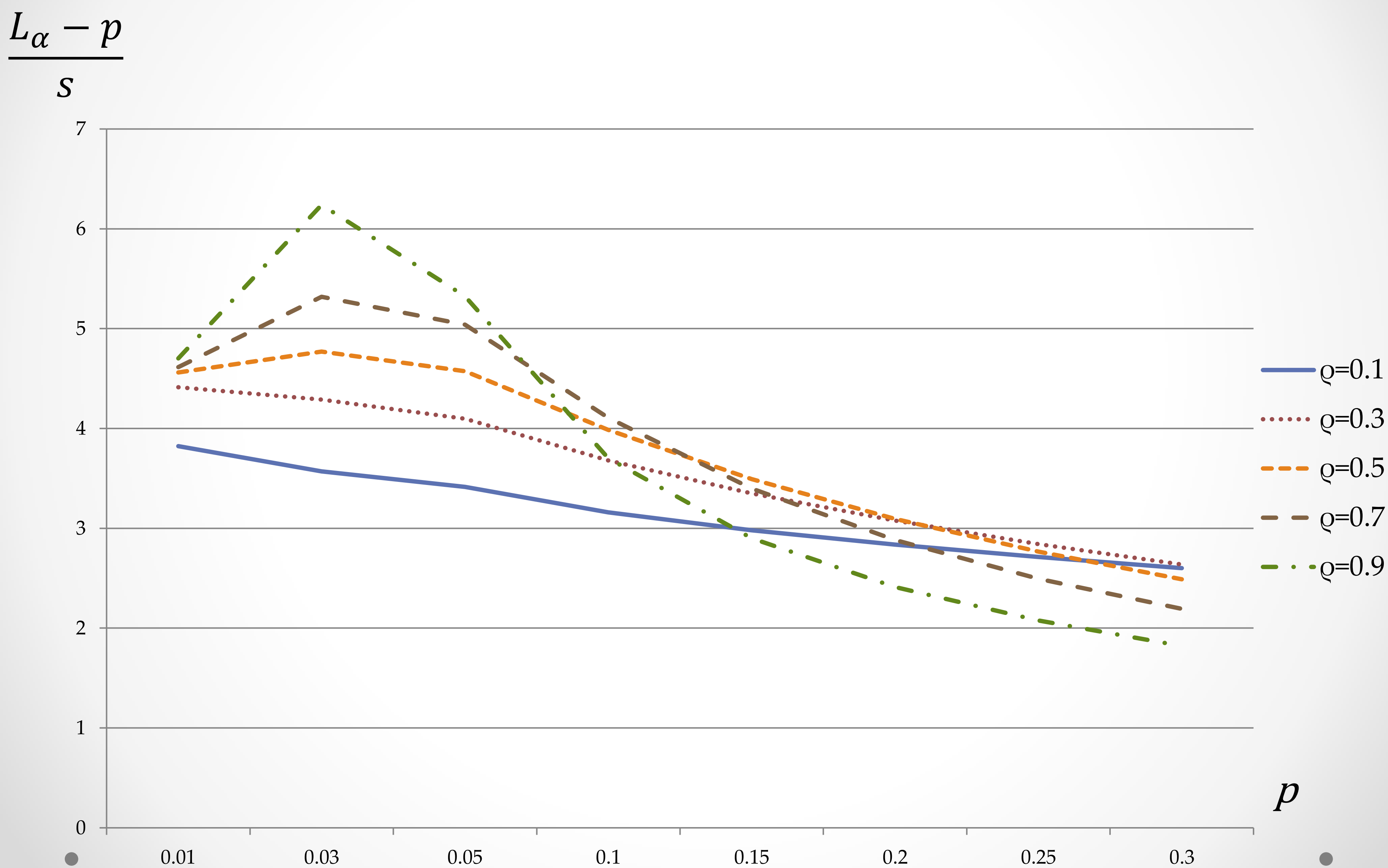
シミュレーション

$$\frac{L_\alpha - p}{s} = \frac{L_\alpha - E(L_\alpha)}{\sqrt{V(L_\alpha)}}$$

(1)信頼水準αを固定したときのポートフォリオ損失価値の変化

(2)無条件デフォルト確率pを固定したときのポートフォリオ損失価値

(1) 図1: α =0.99のときのグラフ



(1)考察

相関の強いものはポートフォリオ損失の変化が大きい

逆に、相関の弱いものはポートフォリオ損失の変化が小さい

(2) 表1: p=0.01のときの損失価値

		alpha			
p	rho	0.9	0.99	0.999	0.9999
0.01	0.1	1.188	3.823	7.012	10.665
	0.2	0.970	4.221	8.768	14.182
	0.3	0.753	4.413	10.036	16.606
	0.4	0.548	4.511	11.041	18.185
	0.5	0.356	4.562	11.890	18.987
	0.6	0.178	4.592	12.632	18.972
	0.7	0.020	4.616	13.258	18.038
	0.8	−0.096	4.646	13.638	16.135
	0.9	−0.134	4.701	13.192	13.572
	normal	1.282	2.326	3.090	3.719

(2) 表2: p=0.1のときの損失価値

		alpha			
p	rho	0.9	0.99	0.999	0.9999
0.1	0.1	1.348	3.160	4.747	6.159
	0.2	1.346	3.462	5.242	6.663
	0.3	1.338	3.679	5.459	6.650
	0.4	1.329	3.849	5.482	6.327
	0.5	1.321	3.984	5.341	5.824
	0.6	1.315	4.078	5.052	5.250
	0.7	1.310	4.107	4.648	4.691
	0.8	1.307	4.013	4.183	4.185
	0.9	1.309	3.702	3.709	3.709
	normal	1.282	2.326	3.090	3.719

⑵考察

デフォルト確率が低いとき

標準化損失価値は標準正規分布の値よりも変動が大きい

デフォルト確率が高いとき

⑴相関が弱いと標準化損失価値は標準正規分布の値より変動が大きい

⑵相関が強いと標準損失価値は標準正規分布の値に近くなる

結論

Vasicekモデルは標準正規分布のモデルよりも標準化損失の変動が大きくなっている

つまりVasicekモデルでは標準化損失価値を正しく評価することができる

参考文献

- Vasicek.O, “The Distribution of Loan Portfolio Value”, KMV Corporation, (2002)

プログラム１

```
# 頂点を求めるLmode
nakami2<-sqrt(1-rho)/(1-2*rho)*qnorm(p)
Lmode<-pnorm(nakami2)
plot(nakami2)


# CDF
rho=0.1
p=0.02
x<-seq(0,1,0.01)
nakami<-(sqrt(1-rho)*qnorm(x)-qnorm(p))/sqrt(rho)
loss<-pnorm(nakami)
plot(loss,type="l")
```

```
# ポートフォリオの標準化損失価値
pl = function(p,rho,x){
        A=qnorm(x, 0, 1)
        B=qnorm(p,0,1)
        C=(sqrt(1-rho)*A-B)/sqrt(rho)
        Fx=pnorm(C,0,1)
        print(Fx)
}
pl(p=0.1,rho=0,x)
```

プログラム２

```
# 密度関数
rho<-0.99
p<-0.02
x<-seq(0,1,0.001)
frequency<-sqrt((1-rho)/rho)*exp((-1)/(2*rho)*(sqrt(1-rho)*qnorm(x)-qnorm(p))^2+1/2*qnorm(x)^2)
probability<-x
plot(probability,frequency,type="l") ##rho=0.99の時の全体描く
```

```
rho<-0.1
p<-0.02
x<-seq(0,1,0.001)
f<-sqrt((1-rho)/rho)*exp((-1)/(2*rho)*(sqrt(1-rho)*qnorm(x)-qnorm(p))^2+1/2*qnorm(x)^2)
f1<-replace(f,1,0)
frequency<-f1[0:110]
probability<-x[0:110]
plot(probability,frequency,type="l")
abline(h=0)
```