金融工学における極値理論とリスク管理

浦谷　規

平成 15 年 11 月 10 日

1　はじめに

経済的リスクとは、許容学以上の経済的損失が起こる可能性である。企業はその損益を、一定期間ごとに損益計算書（P/L) として公表する。この情報を基に、企業のリスクを判断する。リスクを管理する最大の方法は、損金に対する資本金の積み増しである。

本論ではリスク事象の確率分布の推定に極値理論を用いる。極値理論は１９５３年のオランダの大洪水の経験から、長期間にわたって海抜０メートル以下の国土の安全性を保つために、防潮堤の高さをいくらにすればいいかを数学的に求めたことが、この理論の出発点である。つまり、年間の最大値の１００年間にわたっての分布はどんなものになるかの研究であり、その分布の推定方法が研究の中心になる。

金融工学におけるリスク管理では、モルガン銀行の Risk Metrics などのバリューアットリスク (VaR) など資産のリスク管理の方法が試みられている。また、金融業の国際的リスク管理標準を策定する国際決済銀行のバーゼル委員会のリスク管理基準を定めている。本論では、この VaR と理論的に整合性がある期待不足額（Expected Shortfall, Tail-VaR) などのリスク管理基準値を求める統計的方法を述べる。

次章では、リスク管理のための数学的準備として、極値理論を紹介する。

2　数学的準備

X_i は独立に同一分布 F に従う確率変数とする。また、

$$\mathbb{E}[X_i] = \mu$$

とする。いま n 個の X_i 最大値 (Extreme) を

$$M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$$

と定義する

対数の強法則は

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

とすると、

$$\frac{S_n}{n} \to \mu$$

である。また、中心極限定理は

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to y$$

となる $b_n > 0$ と $a_n \in R$ が存在する。

例 2.1 $\mathbb{E}[X_i] = \mu$ かつ $Var(X_i) = \sigma^2$ のとき、

$$a_n = n\mu, b_n = \sigma\sqrt{n}$$

とおくと、

$$\frac{S_n - a_n}{b_n} \to y \sim N(0,1)$$

と標準正規分布に分布収束する。

X_i は独立に同一分布 F に従うから、

$$P(M_n \le x) = P(X_1 \le x, \cdots, X_n \le x) = (F(x))^n$$

定義 2.2 右端点とは

$$x_F = \sup\{x \in R \ : \ F(x) < 1\}$$

である。

したがって、$x < x_F$ に対して、$n \to \infty$ のとき、

$$P(M_n \le x) \to 0$$

$x \ge x_F$ に対して、$n \to \infty$ のとき、

$$P(M_n \le x) \to 1$$

であるから、$n \to \infty$ のとき、

$$M_n \to x_F$$

に確率収束する。さらに、M_n は n に関して非減少であるから、

$$M_n \to x_F, a.s.$$

は概収束である。

3 アフィン変換最大値の弱収束

非退化確率分布 H に従う確率変数 y に

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \to y$$

と分布収束する $c_n > 0$ と $d_n \in R$ を求める問題を考えてみよう。

例 3.1 X_i がつぎの指数分布に従うとき、

$$F(x) = 1 - e^{-x}$$

に対して、

$$c_n = 1, d_n = \log n$$

とすると、

$$\begin{aligned} P(\frac{M_n - d_n}{c_n} \le x) &= P(M_n \le x + \log n) \\ &= (1 - e^{-(x+\log n)})^n \\ &= (1 - \frac{e^{-x}}{n})^n \to \exp\{-e^{-x}\} \end{aligned}$$

定義 3.2 確率変数 X と Y が同じタイプであるとは、

$$X \text{ と } bY + a \text{ が同じ分布}$$

である。$b > 0$ をスケールパラメタ、$a \in R$ を位置パラメータという。

たとえば $X \sim N(0,1)$ は $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ は同じタイプである。

定理 3.3 (タイプ収束) $A, B, A_1, A_2, \cdots$ が確率変数であり、

$$\frac{A_n - a_n}{b_n} \to A$$

ならば

$$\frac{A_n - \alpha_n}{\beta_n} \to B$$

となる $b_n, \beta_n > 0$ および $a_n, \alpha_n \in R$ が存在することの必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\beta_n} = b \in [0, \infty)$$

および

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - \alpha_n}{\beta_n} = a \in R$$

このとき、

$$B \text{ と } bA + a \text{ は同じ分布}$$

証明

$$\begin{aligned} \frac{A_n - a_n}{b_n} &= \frac{\beta_n(A_n - \alpha_n)}{\beta_n b_n} + \frac{\beta_n(\alpha_n - a_n)}{\beta_n b_n} \\ &= \frac{A_n - \alpha_n}{\beta_n}\frac{\beta_n}{b_n} + \frac{(\alpha_n - a_n)}{\beta_n}\frac{\beta_n}{b_n} \end{aligned}$$

両辺の特性関数は

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\exp\{is\frac{A_n - a_n}{b_n}\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{is(\frac{A_n - \alpha_n}{\beta_n}\frac{\beta_n}{b_n} \quad + \quad \frac{(\alpha_n - a_n)}{\beta_n}\frac{\beta_n}{b_n})\}] \\ &= \mathbb{E}[\exp\{is\frac{A_n - \alpha_n}{\beta_n}\frac{\beta_n}{b_n}\}] \quad \cdot \quad \mathbb{E}[\exp\{is\frac{(\alpha_n - a_n)}{\beta_n}\frac{\beta_n}{b_n}\}] \end{aligned}$$

$n \to\to \infty$ のとき

$$\mathbb{E}[\exp\{isA\}] = \mathbb{E}[\exp\{isB\frac{\beta_n}{b_n}\}]\mathbb{E}[\exp\{is\frac{(\alpha_n - a_n)}{\beta_n}\frac{\beta_n}{b_n}\}]$$

から必要十分条件が求まる。

極値理論の基本定理を述べよう。

定理 3.4 (Fischer-Tippett) X_i を独立な F に従う確率変数とする。$n \to \infty$ のとき、

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \to H \tag{1}$$

と収束する非退化の分布 H とパラメータ $c_n > 0, d_n \in R$ が存在し、その分布は次の１つである。$\alpha > 0$ とする。

1. *Frechet*

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & x > 0 \end{cases}$$

2. *Weibull*

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

3. *Gumbel*

$$\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$$

これらの分布を極値分布という。

証明　すべての t に対して、*(1)* は

$$F^{[nt]}(c_{[nt]x+d_{[nt]}}) \to H(x), x \in R$$

を意味する。ただし $[\cdot]$ はガウス記号一方、

$$F^{[nt]}(c_n x + d_n) = (F^n(c_n x + d_n))^{[nt]/n} \to H^t(x)$$

であるから、タイプ定理より、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{[nt]}} = \gamma, \lim_{n\to\infty} \frac{d_n - d_{[nt]}}{c_{[nt]}} = \delta(t), t > 0$$

となる $\gamma(t), \delta(t)$ が存在する。しかも、

$$H^t(x) = H(\gamma(t)x + \delta(t))$$

$$\gamma(st) = \gamma(s)\gamma(t), \delta(st) = \gamma(t)\delta(s) + \gamma(t)$$

注意 1 つぎは同値である。
(i)

$$X \sim \Phi_\alpha(x) : Frechet$$

(ii)

$$\log X^\alpha \sim \Lambda(x) : Gumbel$$

(iii)

$$-\frac{1}{X} \sim \Psi(x) : Weibull$$

(i) から (ii)

$$\begin{aligned} P(\log X^\alpha \leq x) &= P(X \leq e^{x/\alpha}) \\ &= \exp(-(e^{x/\alpha})^\alpha) \\ &= \exp(-e^{-x}) \end{aligned}$$

(i) から (iii)

$$\begin{aligned} P(-\frac{1}{X} \leq x) &= P(X \geq -\frac{1}{x}) \\ &= 1 - P(X \leq -\frac{1}{x}) \\ &= 1 - \exp(-(-\frac{1}{x})^{-\alpha}) \\ &= 1 - \exp(-(-x)^\alpha) \end{aligned}$$

から明らかである。

定義 3.5 極値分布 H の *Maximum Domain of Attraction* は $MDA(H)$ としるし、ある分布関数 F が

$$F \in MDA(H)$$

であるとは、

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \to H$$

に分布収束することである。

定義 3.6 *Heavy-Tail*分布とは、上側分布 $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ が

$$\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha} L(x)$$

ただし、$L(x)$ は *Karamata* の *Slowly-varing* 関数とよばれ、$t > 0$ に対して、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

をみたす。

X が Heavy-Tail 分布に従うとき、$\beta > \alpha$ に対して、

$$\mathbb{E}[X^\beta] = \infty$$

つまり、α を超えるモーメントは存在しない。

命題 3.7

$$F \in MDA(\Phi_\alpha)$$

の必要十分条件は

$$\bar{F}(x) \text{ が } Heavy - Tail \text{ 分布である。}$$

3.1 一般化極値分布

定義 3.8 一般化極値分布 *(Generalised Extreme Value Distribution:GEV)* とは 1 パラメータ化した分布関数

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) & \xi \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \xi = 0 \end{cases}$$

明らかに
(i)$\xi = \frac{1}{\alpha}$ のとき Frechet 分布
(ii)$\xi = -\frac{1}{\alpha}$ のとき Weibul 分布
(iii)$\xi = 0$ のとき Gumbel 分布
である。

補題 3.9 *3 パラメータ GEV 関数を*

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = H_\xi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

と定義すると、*iid* データの正規化された最大値の極限分布となる。

4 限界点を超える事象

定義 4.1 限界点 u とするとき、X の u からの超過のを

$$X - u \mid X > u$$

と定義する。

その分布関数は

$$\begin{aligned} F_u(x) &= P(X-u \mid X > u) \\ &= \frac{P(u \leq X \leq x+u)}{1-P(X \leq u)} \\ &= \frac{F(X+u)-F(u)}{1-F(u)} \end{aligned}$$

であり、ただし $0 \leq x < x_F - u$ である。x_F は右側端点 (Right endpoint) であり、

$$x_F = \sup_x \{F(x) < 1\}$$

と定義される。

定義 4.2 一般化パレート分布 *(GPD)* とは

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-(1+\frac{\xi x}{\beta})^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \neq 0 \\ 1-\exp(-\frac{x}{\beta}) & \xi = 0 \end{cases}$$

ただし、$\beta > 0$

GPD の特徴

1. $\xi \geq 0$ のとき、$x_F = \infty$
   $\xi < 0$ のとき $0 \leq \xi \leq -\frac{\beta}{\xi}$ である。
2.
$\xi > 0$	パレート分布
$\xi = 0$	指数分布
$\xi < 0$	パレート分布タイプ II
3. GPD のモーメント
   $\xi > 0$ に対して、$k \geq \frac{1}{\xi}$ のとき、
   $$E(X^k) = \infty$$

定理 4.3 (Pickards-Balkena-de Haan)

$$\lim_{u to x_F} \sup_{0 \leq x < x_F} |F_u(x) - G_{\xi,\beta(u)(x)}| = 0$$

となる正の関数 $\beta(u)$ が存在することの必要十分条件は

$$F \in MDA(H_\xi)$$

注意 2 $MDA(H_\xi)$ は統計で用いる殆どの確率分布を含んでいる。また、次の対応関係がある。

$\xi > 0$	パレート分布	ガンベル分布
$\xi = 0$	指数分布	ワイブル分布
$\xi < 0$	パレート分布タイプ II	$Frechet$ 分布

5 GPD による方法

4.3 から、十分大きな u に対して、

$$F_u(x) \approx G_{\xi,\beta(x)}$$

であるから、ロスのデータ $X_1, \cdots, X_n$ に対して、

$$N_u = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i > u}$$

とおくと X_i が u を超えた数を表わす。

$$Y_i = (X_i - u)\mathbf{1}_{X_i > u}$$

と超過ロスデータを表わす。

GPD のパラメータ ξ, β の推定には
(i)Y_i を互いに独立と仮定して最尤推定をもちいる。
(ii) 確率重み付モーメント法
がある。

5.1 裾野の推定 Tail Estimation

条件付上側分布関数

$$\bar{F}(x) = P(X > x), x \geq u$$

の推定

$$\begin{aligned} P(X > x) &= P(X > x \mid X > u)P(X > u) \\ &= P(X - u > x - u \mid X > u)P(X > u) \end{aligned}$$

だから

$$\bar{F}_u(x) = P(X > x) = \bar{F}_u(x - u)\bar{F}(u)$$

$\bar{F}_u(x)$ の推定は $\bar{G}_{\hat{\xi},\hat{\beta}}(x - u)$ である。

定理 5.1 (Smith Tail Estimator)

$$\hat{\bar{F}}_u(x) = \frac{N_u}{n}(1 + \frac{\hat{\xi}(x - u)}{\hat{\beta}})^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}, x > u$$

u の選択によってこの推定量の精度が決まる。

6 超過ロス Excess loss と平均超過ロス

$$F_{u_0}(x) = G_{\xi,\beta}(x) \tag{2}$$

と仮定する。$u \geq u_0$ に対して、

$$\bar{F}_u(x) = P(X - u \mid X > u) = \frac{P(X > u + x)}{P(X > u)}$$

また

$$\bar{F}_{u_0}(x) = \frac{P(X > u_0 + x \mid X > u_0)}{P(X > u_0)}$$

x に $x + (u - u_0)$ を代入すると、

$$\bar{F}_{u_0}(x + u - u_0) = \frac{P(X > x + u \mid X > u_0)}{P(X > u_0)}$$

また、x に $(u - u_0)$ を代入すると、

$$\bar{F}_{u_0}(u - u_0) = \frac{P(X > u \mid X > u_0)}{P(X > u_0)}$$

したがって

$$\frac{\bar{F}_{u_0}(x + u - u_0)}{\bar{F}_{u_0}(u - u_0)} = \frac{P(X > x + u \mid X > u_0)}{P(X > u \mid X > u_0)}$$

(2) より、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{G}_{\xi,\beta}(x + u - u_0)}{\bar{G}_{\xi,\beta}(u - u_0)} &= \frac{P(X > x + u \mid X > u_0)}{P(X > u \mid X > u_0)} \\ &= \frac{P(X - u_0 > x + u - u_0 \mid X > u_0)}{P(X - u_0 > u - u_0 \mid X > u_0)} \\ &= \frac{P(X - u_0 > x + u - u_0)}{P(X - u_0 > u - u_0)} \\ &= \bar{G}_{\xi,\beta+\xi(u-u_0)}(x) \end{aligned}$$

$$\beta(u) = \beta + \xi(u - u_0) \tag{3}$$

とおくと、分布関数は

$$F_u(x) = G_{\xi,\beta(u)}(x)$$

かける。

$X - u_0 \mid X > u_0$ が $G_{\xi,\beta(u_0)}(x)$ の分布に従うとき、その期待値は

$$\mathbb{E}[X - u_0 \mid X > u_0] = \frac{\beta(u_0)}{1 - \xi}, \xi < 0$$

であり、さらに $u \geq u_0$ に対して、

$$X-u \mid X>u \sim G_{\xi,\beta(u)}(x)$$

のとき、

$$\mathbb{E}[X-u \mid X>u]=\frac{\beta(u)}{1-\xi}$$

(3) から

$$\mathbb{E}[X-u \mid X>u]=\frac{\beta(u_0)}{1-\xi}+\frac{\xi(u-u_0)}{1-\xi}=\frac{\beta(u_0)-\xi u_0}{1-\xi}+\frac{1}{1-\xi}u$$

したがって、GDP 近似の仮定が成り立つとき、期待超過は傾き $\frac{1}{1-\xi}$ の線形関数である。

定義 6.1 (平均超過関数)

$$e(u)=\mathbb{E}[X-u_0 \mid X>u_0]$$

は期待余命関数 *(Expected Residual Life function)* ともよばれる。

6.1 平均超過関数の推定

ロスデータが $X_1,\cdots,X_n$ であり、その順序つけたデータを $X_{1,n},\cdots,X_{n,n}$ とする。

平均超過関数のグラフは

$$\{(X_{i,n},e(X_{i,n})),i=1,\cdots,n\}$$

であり、これを用いて u_0 を推定する。

7 リスク測度の推定

リスク測度には、確率 q に対して、

1. バリューアットリスク (VaR)

$$x_q=F^{(-1)}(q)$$

2. 期待不足 (Expected Shortfall)

$$\begin{aligned}ES_q &= \mathbb{E}(X \mid X>x_q)\\ &= x_q+\mathbb{E}(X-x_q \mid X>x_q)\\ &= x_q+e(x_q)\end{aligned}$$

がある。

推定方法は、ある u に対して、F_u が GPD に従うと仮定する。$x \geq u$ に対して、Smith Tail 推定 $\hat{F}$ を用いる。

1. バリューアットリスク (VaR) の推定

$$\begin{aligned}\hat{x}_q &= \hat{F}^{(-1)}(q)\\ &= u+\frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\{(\frac{n}{N_u}(1-q))^{-\hat{\xi}}-1\}\end{aligned}$$

2. 期待不足 (Expected Shortfall) の推定

$$\widehat{ES}_q=\hat{x}_q+\hat{e}(\hat{x}_q)$$

ただし

$$\hat{e}(v)=\frac{\hat{\beta}-\hat{\xi}}{1-\hat{\xi}}+\frac{\hat{\xi}}{1-\hat{\xi}}v,\quad v\geq u$$

したがって

$$\widehat{ES}_q=\frac{\hat{x}_q}{1-\hat{\xi}}+\frac{\hat{\beta}-\hat{\xi}}{1-\hat{\xi}}$$

$\xi=1/2$ のときは、火災などの事故に用いられる。

２つの推定値の比は

$$\frac{\widehat{ES}_q}{\hat{x}_q}=\frac{1}{1-\hat{\xi}}+\frac{\hat{\beta}-\hat{\xi}}{\hat{x}_q(1-\hat{\xi})}$$

$q\to 1$ のとき、$\hat{x}_q\to\infty$ となり、

$$\frac{\widehat{ES}_q}{\hat{x}_q}\to\frac{1}{1-\hat{\xi}}$$

Heavy Tail のとき、$\frac{1}{1-\hat{\xi}}$ は大きい。たとえば X が正規分布のときは $\frac{1}{1-\hat{\xi}}=1$

7.1 信頼区間

上側確率分布、確率点、期待不足の点推定をそれぞれ $\hat{F}(x),\hat{x}_q,\hat{E}S_q$ とする。これらは

$$g(\hat{\xi},\hat{\beta},\frac{N_u}{n})$$

の関数である。Finmetrics の EVIS ルーティンは $\frac{N_u}{n}, \bar{F}$ の不偏推定をし、信頼区間を明らかにする。

したがって ξ, β の推定に関する誤差を解説しよう。

$$\theta = g(\xi, \beta, \bar{F}(u))$$

とおくと、超過損失に GPD をあてはめるときに、その尤度関数を

$$l(\xi, \beta \mid A)$$

の条件付尤度で考える。$l(\hat{\xi}, \hat{\theta}, \mid A)$ が最大値をとるとしよう。さらに θ が与えられたときに、$l(\hat{\xi}_\theta, \theta, \mid A)$ が最大値をとるとする。次の定理から信頼区間を求める。

定理 7.1

$$-2(l(\hat{\xi}_\theta, \theta, \mid A) - l(\hat{\xi}, \hat{\theta}, \mid A)) \sim \chi^2(1)$$

つまり自由度 1 のカイ 2 乗分布に従う。

$C_{1-\alpha}$ を自由度 1 のカイ 2 乗分布の $1-\alpha$ 確率点としよう。

$$\{\theta : l(\hat{\xi}_\theta, \theta, \mid A) \geq l(\hat{\xi}, \hat{\theta}, \mid A) - 0.5C_{1-\alpha}\}$$

は $\theta = g(\xi, \beta, \bar{F}(u))$ の $100(1-\alpha)\%$ の信頼区間である。

7.2 ファイナンスデータの GPD による方法の問題点

ファイナンスの収益率データにおいて EOT は独立とはならない。しかし、独立と仮定して、最尤法で ξ, β を推定する問題がある。解決策には次の 3 つがある。

1. 確率重み付モーメーンと法を用いる。しかしこのとき信頼区間は得られない。
2. クラスター分類をするなどによってデータの独立性を高める。(SPLUS 関数 decluster を使う)
3. 独立性を無視し、Quasi-likelyhood とする。このとき信頼区間は過小評価になる。

A Karamata 定理

定義 A.1 *karamata* の意味で *Regular variation* 関数は次の *2* つである。

1. 正の関数 $L(x)$ は $(0, \infty)$ 上で定義され、*Slowly varing* 関数であるとは

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad t > 0$$

を満たす。

2. 正の関数 $h(x)$ は $(0, \infty)$ 上で定義され、*Regularly varing* 関数であるとは

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\alpha, \quad t > 0$$

を満たす。

Slowly varing 関数は、正の定数あるいは正の定数に収束する関数、対数関数である。また、$\alpha \in R$ に対して、

$$x^\alpha, x^\alpha \log(1+x), (x \log(1+x))^\alpha, x^\alpha \log(\log(e+x))$$

は Regularly varing 関数である。ただし、次の関数は Regularly varing 関数でない。

$$2 + \sin x, e^{\log(1+x)}$$

定理 A.2 (Karamata) L を *karamata* の *Slowly varing* 関数とし、$x_0 > 0$ に対して、

1. $\alpha > -1$ に対して、

$$\int_{x_0}^{x} t^\alpha L(t)dt \sim \frac{x^{\alpha+1}L(x)}{\alpha+1}, \quad x \to \infty$$

2. $\alpha < -1$ に対して、

$$\int_{x}^{\infty} t^\alpha L(t)dt \sim \frac{x^{\alpha+1}L(x)}{\alpha+1}, \quad x \to \infty$$

損失額 y の確率分布を $F(x)$ とすると、

$$1 - F_y(x) = x^\alpha L(x)$$

であらわされ、住宅火災には $\alpha = 2$ 工場火災には $\alpha = 1.5$ 地震や台風などの天災 $\alpha = 1$ とする。また、一般的な事故保険に対しては $\alpha = 1.8$ が用いられる。

また、このときには危険率 q のバリューアットリスク VaR_q と Expected Shortfall の ES_q には次の関係がある。

$$\lim_{q \to 1} \frac{ES_q}{VaR_q} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} > 1, \quad \alpha > 1$$

したがって、VaR は ES に比べパレート分布にたいして常に過小評価になる。

参考文献

[1] Artzner P, Dealbaen F, Eber J.M, Heath D, Coherent measures of risk (1999) *Mathematical Finance*

[2] Embrechts, P and Kluppenberg C, Mikosch T (1999), Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, *Springer*

[3] Panjer, H H and Willmot, G E (1992), Insurance Risk Models, *Society of Actuaries*

[4] Zivot,E. and Wang, J. (2001) Modelling Financial Time Series with S-PLUS