平均・分散モデルを用いる為替リスクのヘッジ手法の比較

東京理科大学　大学院　工学研究科　張 立

1　はじめに

近年，規制緩和と資本市場の自由化に伴い，先進国では資本の国際的移動における制限はなくなりつつある．日本では，年金基金の機関投資家を中心に国際分散投資への関心が高まっている．国際分散投資とは，複数の国々に投資対象を分散することによって，特定の市場に付随するリスクを低減し，かつ，高い投資リターンを獲得する投資手法である．ただし，国内投資と比較した際に，為替リスク，市場分断等の独自の問題点も存在する．特に外国投資を自国通貨に換算する際に為替リスクより生じる損益は，外国市場のパフォーマンスを上回ることが，しばしばあるので，為替リスクによる損失の原因になりかねない (表 1 参照).

表 1: 米国現地と円に換算した収益率の比較

	S&P500 (米ドル)	直物 (円・米ドル)	S&P (円換算)
1980 年	32.42%	15.31%	12.14%
1981	-4.91%	8.33%	3.01%
1982	21.41%	6.87%	29.75%
1983	22.51%	-1.19%	21.05%
1984	6.27%	8.14%	14.92%
1985	32.16%	-20.15%	5.53%
1986	18.47%	-20.65%	-5.99%
1987	5.23%	-23.95%	-19.97%
1988	16.87%	3.29%	20.66%
1989	31.49%	15.02%	51.24%
平均	17.55%	-4.98%	11.69%

為替リスクのヘッジ手法として，通貨に関する派生商品である通貨先渡，通貨先物，通貨オプション等が挙げられる．通貨先渡においては，取引当事者は，約定した取引を満期日に実行するという義務を相互に負っている．これに対して，通貨オプションは権利なので，権利購入者が約定条件で有利と判断したときにのみ行使される．このような相異から，投資家は，二つの派生商品による為替リスクヘッジの効果がどの程度異なるかを把握する必要がある．

本研究の目的は，機関投資家の視点から，通貨先渡と通貨オプションを用いるヘッジ手法を取り込む平均・分散モデルをそれぞれ導き出し，最適投資比率とヘッジ比率を求め，検証期間におけるパフォーマンスと安定性を示せるか比較，検討することである．

2　通貨先渡と通貨オプション

通貨の先物取引について，相対取引で取引される先物は「通貨先渡」と呼ばれ，将来の指定された時点に特定の外貨を指定された為替レートで売買する契約である．T 年 (年率) 先の先物レート s' は金利パリティ $s' = s(1+r_d)^T/(1+r_f)^T$ より現時点の直物レート s，自国通貨の金利 r_d(年率) と外国通貨の金利 r_f(年率) から求めることができる．そこで日本円の金利は外国通貨の金利より小さいと仮定すると，日本の投資家は外貨を売る先渡を用いて為替ヘッジを行う際，金利差による先物プレミアム $f = (s'-s)/s$ が常に負の値となり，すなわち為替ヘッジに費用がかかる．

通貨オプションは，将来の指定された時点における特定の外貨を，指定された為替レート (行使レート K) で売買する権利である．権利を行使する時期によって，期末までいつでも行使できるアメリカン型オプションと，期末にのみ行使できるユーロピアン型オプションがあり，本研究では，先渡と比較するために相対取引で取引されるユーロピアン型プット・オプションを用いて分析を行う．期末において，権利購入者は約定条件で有利と判断したときにのみ行使することより，通貨オプションの期末でのペイオフは $Max\{K-S, 0\}$ となる．ただし， S は将来時点 (不確定な) の直物レートである．

通貨オプションでは権利を得る代価として期首にプレミアム p を支払う必要がある．プレミアムには，行使レート K と現時点の直物レート s の関係より，$K > s$ のとき ITM(In The Money)，$K = s$ のと

き ATM(At The Money)，$K < s$ のとき OTM(Out The Money) と三つのタイプを有し，それぞれを p_{ITM}，p_{ATM}，p_{OTM} と定義する．通貨オプションの収益率を算出するために，外貨通貨のユーロピアン型プット・オプションに適用する (1) 式のブラック・ショールズモデル (BSGK) を用いて三つのプレミアムタイプを求める．ただし，N は累積標準密度関数，σ は直物レートの標準偏差，T は残存期間 (年率) である．

$$p(s,T) = e^{-r_f T} s(N(x+\sigma\sqrt{T}) - 1) - e^{-r_d T} K(N(x) - 1) \tag{1}$$

$$x = \frac{\ln(S/K) + (r_d - r_f - (\sigma^2/2))T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{2}$$

3　為替ヘッジモデル

3.1　基本モデル

本研究では，日本の投資家を対象とし，期首に第 i 国 ($i = 1, \ldots, I$) の資産に X_i だけの資金を投資し，これを一定期間運用した後，第 i 国市場ですべて売却し，日本円に交換する状況を考える．第 i 国資産の現地通貨ベースの収益率を R_i としたとき，為替レートに変化がないものとすれば，この投資から得られるリターンは，$\sum_{i=1}^{I} R_i X_i$ で表される．そして，為替レートが変化する場合では，日本円に対する第 i 国の通貨の期首での交換レートを s_i(円) と期末での (不確定な) 交換レートを S_i(円) とし，通貨の変動率を $Q_i = (S_i - s_i)/s_i$，と定義すると，期末でのリターンは以下のように表現される．

$$\sum_{i=1}^{I}\{(1+R_i)(1+Q_i) - 1\}X_i = \sum_{i=1}^{I}(R_i + Q_i + R_i Q_i)X_i \tag{3}$$

3.2　先渡ヘッジモデルの導出

為替レートの変動リスクをヘッジするために，一定量の第 i 国の通貨を期末に交換レート s'(円) で売却する「通貨先渡契約」を結べば，交換レートがどのように変化しても，第 i 国通貨を期末に s'(円) で売却する保障が得られる．このように，為替ヘッジにより第 i 国の通貨の為替リスクが変化し，さらにポートフォリオ全体のリスク分散効果にも影響を与えるので，ヘッジを行う際には，単に第 i 国の通貨の為替リスクを低減するだけではなく，ポートフォリオ全体のリスク低減効果を考慮して第 i 国の通貨の先渡ヘッジ比率 h_i を決定する必要がある．故に，満期に $h_i X_i / s_i$ 単位に相当する外貨を s'(円) で売却すると，$h_i X_i (s' - S_i)/s_i = h_i(f_i - Q_i)$ だけのリターンを得ることができる．そこで期末でのポートフォリオのリターンは，

$$\sum_{i=1}^{I}(R_i + Q_i + R_i Q_i)X_i + \sum_{i=1}^{I} X_i h_i (f_i - Q_i) = \sum_{i=1}^{I}(R_i + Q_i + R_i Q_i + h_i f_i - h_i Q_i)X_i \tag{4}$$

と表現できる．第 i 国資産への投資比率を $x_i = X_i / \sum_{i=1}^{I} X_i$ と定義し，$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_I)$，$\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_I)$ とおくと，ポートフォリオの収益率は (5) 式となる．ただし，資産と第 i 国通貨の空売りを許さないものとすると，x_i, h_i は (6) 式の制約を満たさなければならない．よって，通貨オプションヘッジモデルは，(6) 式の制約及び一定の収益率の期待値 $E[R_F]$ を要求する上で，収益率の分散 $V[R_F]$ を最小化にするという 2 次計画モデルに帰着することになる．

$$R_F(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{I}(R_i + Q_i + R_i Q_i + h_i f_i - h_i Q_i)x_i \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad 0 \leq h_i \leq 1 \tag{6}$$

3.3　通貨オプションヘッジモデルの導出

通貨先渡と違い，期首に第 i 国通貨のオプションを購入する際プレミアム p_i を支払う必要があり，かつ期末にペイオフを有することより，通貨オプションを一つの資産としてポートフォリオに組むことが考えられる．したがって，期首に投資家は第 i 国の資産に X_i，第 i 国通貨のオプションに Z_i だけの資金を投資する状況を考える．2 章で説明したペイオフと (1) 式の BSGK モデルより，求められるプレミアムを用いて第 i 国通貨のオプションの収益率を $O_i = (Max\{K - S, 0\} - p_i)/p_i$ と定義し，期末のリターンは

$$\sum_{i=1}^{I}\{(1 + R_i)(1 + Q_i) - 1\}X_i + \sum_{i=1}^{I} O_i Z_i = \sum_{i=1}^{I}(R_i + Q_i + R_i Q_i)X_i + O_i Z_i \tag{7}$$

となる．第 i 国資産と通貨オプションへの投資比率をそれぞれ $x_i = X_i / \sum_{i=1}^{I}(X_i + Z_i)$,　$z_i = Z_i / \sum_{i=1}^{I}(X_i + Z_i)$ と定義し，$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_I)$，$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_I)$ とおくと，ポートフォリオの収益率は (8) 式となる．資産と通貨オプションの空売りを許さないものとすると，x_i, z_i は (9) 式の制約を満たさなければならない．よって，通貨オプションヘッジモデルは，(9) 式の制約及び一定の収益率の期待値 $E[R_O]$ を要求する上で，収益率の分散 $V[R_O]$ を最小化にするという 2 次計画モデルに帰着することになる．

$$R_O(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{I}(R_i + Q_i + R_i Q_i)x_i + O_i z_i \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{I} x_i + z_i = 1, \quad x_i, z_i \geq 0, \quad z_i \leq \frac{x_i p_i}{s_i} \tag{9}$$

4　分析

本研究では事前評価と事後評価に分けてシミュレーションを行い，分析する．投資対象国を日本と株式市場規模が大きく，かつ日本市場との相関 (表 2) が低い 8 つの先進国市場とする．資産の運用期間を 1ヶ月とする．

表 2: 日本国内と 8 カ国の株式市場との相関係数

	米国	カナダ	英国	フランス	オーストラリア	ニュージーランド	香港	シンガーポール
2001/10～2005/9	0.35	0.51	0.41	0.44	0.44	0.22	0.37	0.17

4.1　データ概要

- データ期間は，2001 年 10 月から 2005 年 9 月までの 48ヶ月である．
- 株式市場のデータについては，MSCI(Morgan Stanley Capital International) が発表した日本を含む 9 カ国の国内株式市場のインデックス指数 (Standard NATIONAL INDICES) を用いる．

- 為替レートは日本円に対する 8 カ国通貨の交換レートの月次データである．
- 先物レートと通貨オプションのプレミアムを算出するために，各国通貨の金利として LIBOR(1m) を用いる．

4.2　シミュレーション手順

1. 各国インデックス指数の収益率 (円換算)，各外貨の為替レートの変動率，先物プレミアムとオプションの収益率を算出する．
2. 1 で求めた，2001 年 10 月から 2004 年 9 月までの 36ヶ月のデータを学習データとしてモデルに入力し，最適投資比率とヘッジ比率を算出し，モデルごとの効率的フロンティアを描く．
3. 2 で求めた最適投資及びヘッジ比率を用いて検証期間での 2004 年 10 月の収益率を算出する．
4. 2，3 の計算を検証期間 2004 年 10 月から 2005 年 9 月まで繰り返す．

5　結果と考察

5.1　事前評価

図 1 に各モデルの効率的フロンティアを示す．左から先渡ヘッジ，オプションヘッジ (ITM)，(ATM)，（OTM）の順でリスク低減効果が逐次に減少することが分かる．

オプションヘッジモデルについて，ITM タイプのモデルは一番大きいリスク低減効果を持つ．しかし，要求収益率を上げるにつれ，各ヘッジモデルの効率的フロンティアはヘッジなしモデルと一致するような傾向を示し，リスク低減効果を持たない．

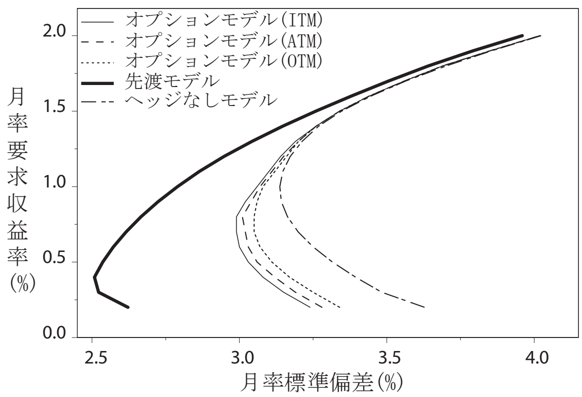

図 1: 先渡ヘッジ，オプションヘッジ，
ヘッジなしモデルの効率的フロンティアの比較
(期間：2001/10～2004/09)

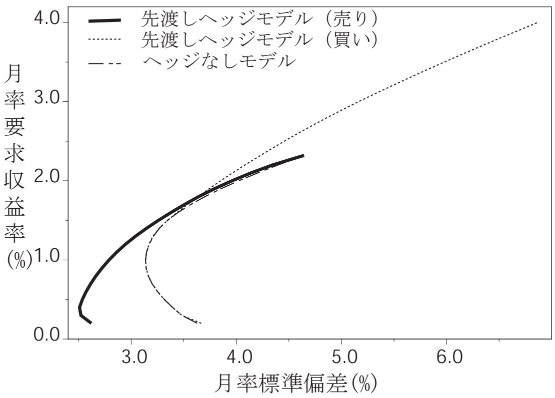

図 2: 売りと買い先渡ヘッジモデル
の効率的フロンティの比較
(期間：2001/10～2004/09)

なお，図 2 より，買い先渡ヘッジモデルの効率的フロンティアがヘッジなしモデルと重なって，リスク低減効果を示していない．

5.2　事後評価

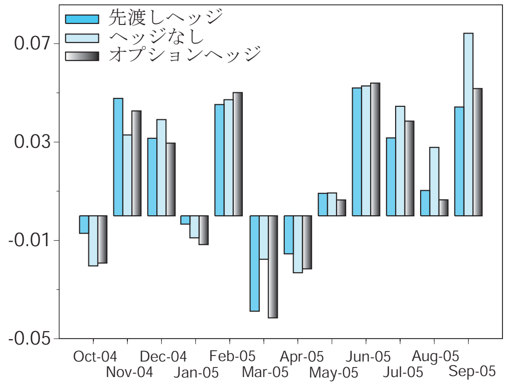

図 3 : 先渡ヘッジ，オプションヘッジ，
ヘッジなしモデルの事後パフォーマンスの比較
(要求収益率：0.8%，期間：2004/10～2005/09)

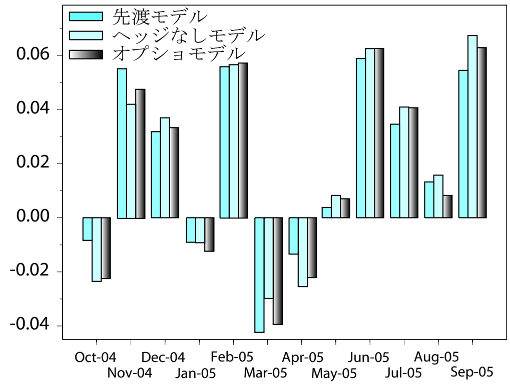

図 4 : 先渡ヘッジ，オプションヘッジ，
ヘッジなしモデルの事後パフォーマンスの比較
(要求収益率：1.1%，期間：2004/10～2005/09)

図 3，4 より，検証期間において，各モデルの動きはインデックスに連動しやすい傾向を示し，いずれのモデルもしばしば損失を被ることがあった．一方，先渡ヘッジモデルの負の変動 (05 年 3 月を除く) は他のモデルより小さく，一定のリスク低減効果を示している．オプションヘッジモデル（ITM）は，成長率の変動幅が大きく，リスク低減効果を示していない．また，要求収益率が高い場合では，各モデルの差が縮小する．表 3 より，先渡ヘッジモデルの標準偏差は最も低かった．これに対して，オプション

表 3: ヘッジなし，先渡ヘッジ，オプションヘッジモデルの平均収益率と標準偏差の比較

要求収益率0.8%	ヘッジなし	先渡しヘッジ	オプションヘッジ(ITM)	要求収益率1.1%	ヘッジなし	先渡しヘッジ	オプションヘッジ(ITM)
月平均収益率(%)	2.14	1.72	1.55	月平均収益率(%)	2.02	1.96	1.86
月標準偏差σ(%)	3.27	2.92	3.33	月標準偏差σ(%)	3.58	3.38	3.67

ヘッジモデルの標準偏差は最も高いのに，収益率は他の二つのモデルを下回った．よって，オプションヘッジモデルのパフォーマンスと安定性は低下していることが分かった．

6　まとめ

本研究では，通貨先渡ヘッジモデルと通貨オプションヘッジモデルについて検証し，事前，事後いずれの評価においても，先渡ヘッジモデルがオプションヘッジモデルに比べてより良いパフォーマンスと安定性を示した．中低レベルの収益率 (0.8%，1.1%) を要求する際，事前評価から，先渡ヘッジモデルはオプションヘッジモデルよりリスク低減効果が見られた．事後評価より，先渡ヘッジモデルがいずれの要求収益率においても，リスクを一番低く抑える結果となったが，収益率の平均については，ヘッジなしモデルよりやや低かった．一方，オプションヘッジモデルが最高の標準偏差と最低の収益率を示した．故に，ヘッジなしモデル，先渡ヘッジモデル，オプションヘッジモデルをそれぞれ高リスク・高リターン，低リスク・低リターン，高リスク・低リターンと特徴づけることができる．したがって，リスク回避的な投資家にとって，国際分散投資における為替リスクをヘッジする際，先渡ヘッジはオプションヘッジより有効であることを示唆している．

今後の課題として，各国インデックス指数だけを用いるため，モデル動きがインデックスに連動しやすいことが分散効果の点で好ましくないので，インデックスではなく各国市場の銘柄を用いることが考えられる．

参考文献

[1] 今野 浩：「理財工学 1」，日科技連出版社，(1995).

[2] 今野 浩：「理財工学 2」，日科技連出版社，(1998).

[3] 廿日出 芳郎：「国際ビジネスファイナンス」，日本評論，(2003).

[4] D.F. デローザ　著/森谷 博之・吉川 茂　訳：「外国為替のオプション」，東洋経済新聞社，(2000).

[5] デービッド.G. ルーエンバーガー　著/今野　浩・鈴木 賢一・枇々木 規雄　訳：「金融工学入門」，日本経済新聞社，(2002).

[6] Sohnke M. Bartram and Gunter Dufey：「International Portfolio Investment: Theory, Evidence, and Institutional Framework」, JEL Classification：G15,G11,F31(May 15 2001).

7　S-PLUS によるプログラム

```
#データの準備
nrtf <- function(R, Fx1,opy1){
nrt <<- R[1:36, ] + Fx1[1:36, ] + R[1:36, ]  * Fx1[1:36, ]
Fx <<- Fx1[1:36, ]
opy <<-opy1[1:36, ]
avenr <<- apply(nrt, 2, mean)
avefx <<- apply(Fx, 2, mean)
aveF <<- apply(Fp1[1:36, ], 2, mean) # using 3years observe data
aveopy <<- apply(opy1, 2, mean)
}

#モデルを定義する
define <- function(){
#ヘッジ無しモデル--------------------
nohedge <<- function(nrt, avenr, rmin){
n <- nrow(nrt)
p <- ncol(nrt)

Period <- Set()
Asset <- Set()
t <- Element(set = Period)
i <- Element(set = Asset)

nr <- Parameter(nrt, index = dprod(t, i), changeable=T)
nrBar <- Parameter(list(1:p, avenr), index=i, changeable=T)
x <- Variable(index = i)
y  <- Variable(index = t)
Pr <- Variable()   # Portfolio Return

Sum((nr[t, i] -nrBar[i]) * x[i], i) ==y[t]
Sum(nrBar[i]* x[i],  i) == rmin
Sum(x[i], i) == 1
x[i]>=0

Sum(nrBar[i]* x[i],  i)==Pr

V <- Objective( minimize )
V ~ (1/36) * Sum( y[t]*y[t], t)
}
```

```
#先渡ヘッジモデル-------------------------
fhedge <<- function(nrt, avenr, Fx, avefx, aveF,rmin){
n <- nrow(nrt)
p <- ncol(nrt)

Period <- Set()
Asset <- Set()
t <- Element(set = Period)
i <- Element(set = Asset)

nr <- Parameter(nrt, index = dprod(t, i))
nrBar <- Parameter(list(1:p,avenr), index=i)
fr <- Parameter(Fx, index = dprod(t, i))
frBar <- Parameter(list(1:p,avefx), index=i)
fpBar<- Parameter(list(1:p,aveF), index = i)

x <- Variable(index = i)
y  <- Variable(index = t)
z <- Variable(index=i)

V <- Objective( minimize )
V ~ (1/36) * Sum(y[t]*y[t], t)

Sum( nrBar[i] * x[i] + ( fpBar[i] - frBar[i] ) * z[i], i ) == rmin
Sum(( nr[t, i] - nrBar[i]) * x[i] + (frBar[i] - fr[t, i])*z[i] , i ) == y[t]
Sum(x[i], i) == 1
x[i] >= z[i] >= 0
x[i] >= 0
}

#オプションヘッジモデル-----------------
ohedge <<- function(nrt, avenr, opy, aveopy, fxret, opr, rmin){
n <- nrow(nrt)
p <- ncol(nrt)

Period <- Set()
Asset <- Set()
t <- Element(set = Period)
i <- Element(set = Asset)

nr <- Parameter(nrt, index = dprod(t, i))
nrBar <- Parameter(list(1:p, avenr), index=i)
or <- Parameter(opy,index = dprod(t,i))
orBar <- Parameter(list(1:p,aveopy), index=i)
```

```
fret <- Parameter(list(1:p, fxret[1,]), index=i)
op <- Parameter(list(1:p, opr[1,]), index=i)

x <- Variable(index = i)
z <- Variable(index=i)
y <- Variable(index = t)

Sum((nr[t, i] -nrBar[i]) * x[i] + (or[t, i] - orBar[i] ) * z[i], i) ==y[t]
Sum(nrBar[i] * x[i] + orBar[i] * z[i],  i) == rmin
             Sum(x[i]+z[i], i) == 1
x[i] >= 0
(x[i] * op[i]) / fret[i] >= z[i] >= 0

V <- Objective( minimize )
V ~ (1/36) * Sum(y[t] * y[t], t)
}
}

#事前評価関数
eff <-function(){
new.model()
k <- 1
rx1 <<- c()
x1 <- c()
s <- (max(avenr)-min(avenr))/20
rmin <- seq(from=min(avenr), to=max(avenr), length=25)
#ヘッジ無しモデル事前評価-----------------
for(j in rmin){
sys.nohedge.fc <- System(model=nohedge, nrt,avenr,j)
sol.nohedge.fc <- solve(sys.nohedge.fc)
x1[k] <- as.array(current(sys.nohedge.fc, V))
k <- k+1
}
          rx1 <<- x1
x1[1:which(x1==min(x1))-1] <- NA
plot(sqrt(x1), rmin, type="l", lwd=3 ,xlab="sdv", ylab="return",
                            xlim=c(0.025, 0.05),ylim=c(0,0.03))

#先渡ヘッジモデル事前評価---------------
         new.model()
k <- 1
rx2 <<- c()
x2 <- c()
for(j in rmin){
```

```
sys.fhedge.fc <- System(model=fhedge, nrt,avenr, Fx, avefx, aveF, j)
sol.fhedge.fc <- solve(sys.fhedge.fc)
x2[k] <- as.array(current(sys.fhedge.fc, V))
k <- k+1
}
         rx2 <<- x2
x2[1:which(x2==min(x2))-1] <- NA
lines(sqrt(x2), rmin, lty=2,lwd=3)

#オプションヘッジモデル事前評価-----------
new.model()
k <- 1
rx3 <<- c()
x3 <- c()
for(j in rmin){
sys.ohedge.fc <- System(model=ohedge, nrt,avenr, opy, aveopy, fxret, opr, j)
sol.ohedge.fc <- solve(sys.ohedge.fc)
x3[k] <- as.array(current(sys.ohedge.fc, V))
k <- k+1
}
         rx3 <<- x3
x3[1:which(x3==min(x3))-1] <- NA
lines(sqrt(x3), rmin, lty=3,lwd=3)
}

#事後評価関数
test <- function(R, Fx1,Fp1,opy1,rmin){
Er1 <- c()
Er2 <- c()
Er3 <- c()

for(i in 0:11){
nrt <- R[(1+i):(36+i), ] + Fx1[(1+i):(36+i),] + R[(1+i):(36+i), ]  * Fx1[(1+i):(36+i), ]
Fx <- Fx1[(1+i):(36+i), ]
Fp <- Fp1[(1+i):(36+i), ]
opy <-opy1[(1+i):(36+i), ]

Rr <-  R[(37+i), ] + Fx1[(37+i), ] + R[(37+i), ]  * Fx1[(37+i), ]
RF <- Fp1[(37+i), ]
Rfx <- Fx1[(37+i), ]
Ropy <- opy1[(37+i), ]

avenr <- apply(nrt, 2, mean)
avefx <- apply(Fx, 2, mean)
```

```
aveF <- apply(Fp, 2, mean)
aveopy <- apply(opy1, 2, mean)

#ヘッジ無しモデル事後評価------------------
sys.nohedge.fc <- System(model=nohedge, nrt,avenr, j)
sol.nohedge.fc <- solve(sys.nohedge.fc)
X <- as.array(current(sys.nohedg.fc, x))
Er1[i+1] <-  Rr%*%t(X)

#先渡ヘッジモデル事後評価----------------
new.model()
sys.fhedge.fc <- System(model=fhedge, nrt, avenr, Fx, avefx, aveF,rmin)
sol.fhedge.fc <- solve(sys.fhedge.fc)
X <- as.array(current(sys.fhedge.fc, x))
Z <- as.array(current(sys.fhedge.fc, z))
Er2[i+1] <-  Rr%*%t(X)+(RF-Rfx)%*%t(Z)

#オプションヘッジモデル事後評価----------------
new.model()
sys.ohedge.fc <- System(model=ohedge, nrt, avenr, opy, aveopy, fxret, opr, rmin)
sol.ohedge.fc <- solve(sys.ohedge.fc)
X <- as.array(current(sys.ohedge.fc, x))
Z <- as.array(current(sys.ohedge.fc, z))
Er3[i+1] <-  Rr%*%t(X)+Ropy%*%t(Z)
}
ax <- c(1:12)
plot(ax,Er1, type="l")
lines(ax,Er2)
lines(ax,Er3)
sm <- c()
ss <- c()
Er <- cbind(Er1,Er2,Er3)
for(i in 1:3){
sm[i]<-mean(Er[,i])
ss[i]<-sqrt(var(Er[,i]))
}
sumarry <<- cbind(sm,ss)
}
```