

時空間Krigingを用いた将来予測



筑波大学 システム情報工学研究科
博士前期2年次 村上大輔

時空間内挿手法：時空間Kriging

□ 代表的手法：時空間Kriging

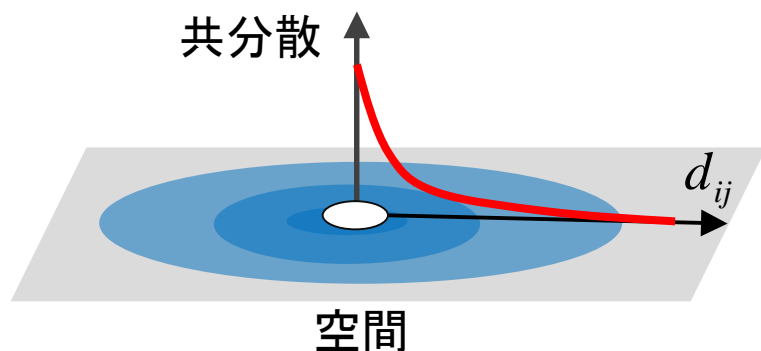
$$y_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N(0, C(\mathbf{d}_{i,j}, \mathbf{t}_{i,j}))$$

i : 地点を表す添え字 y_i : 被説明変数 \mathbf{X}_i : 説明変数 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$: 残差
 \mathbf{d}_{ij} : 空間上の距離 \mathbf{t}_{ij} : 時間軸上の距離 $C(\mathbf{d}_{i,j}, \mathbf{t}_{i,j})$: 共分散関数

共分散を距離の関数(共分散関数)で与えることで
下の2つの性質を考慮する

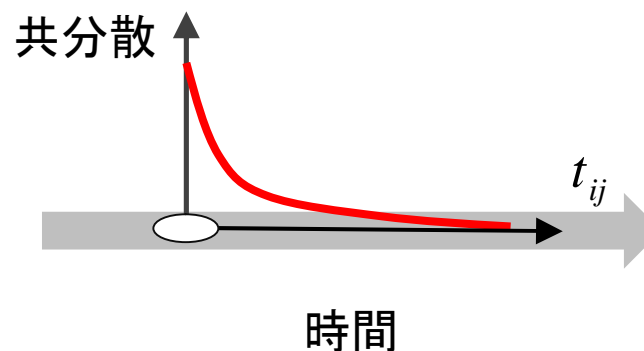
■ 空間的相関

- ・ 距離が近い = 観測値が類似



■ 時系列相関

- ・ 時点が近い = 観測値が類似



時空間Krigingの適用例

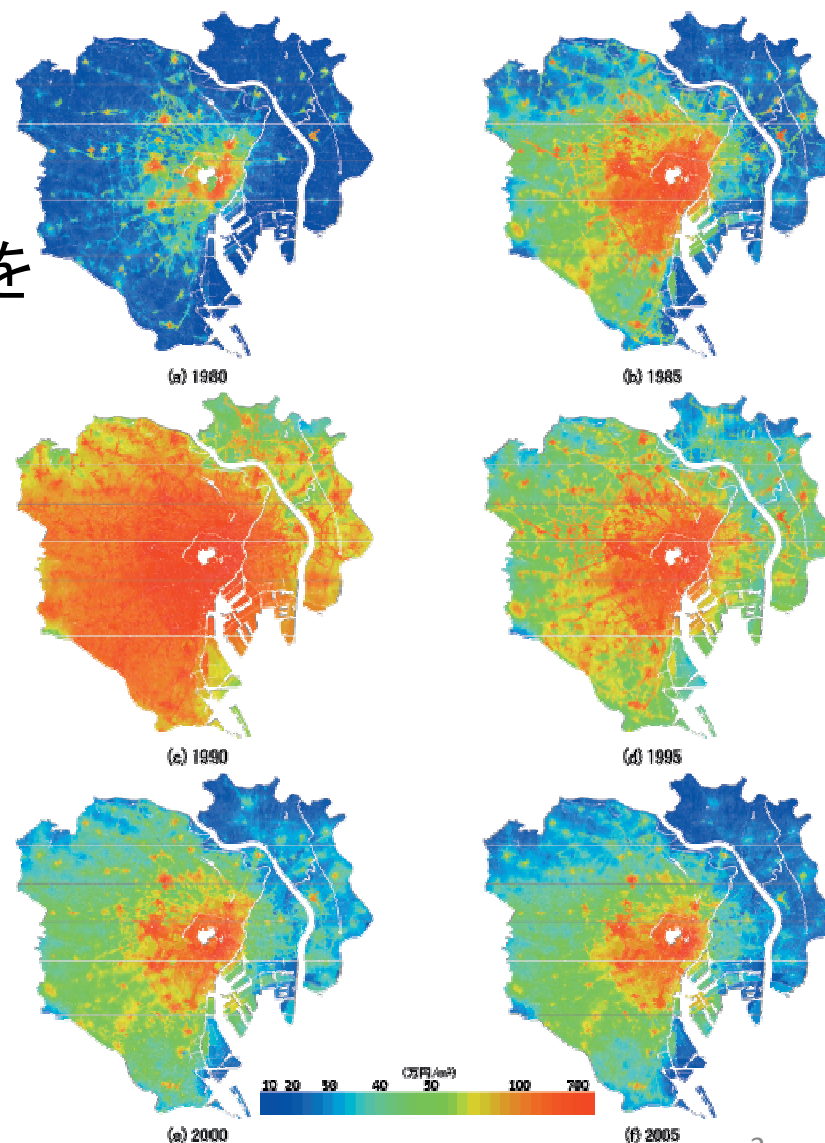
□ 適用方法

- 時空間に分布する観測データを用いて任意地点・時点のデータを内挿する

□ 例: 公示地価の時空間内挿 (井上ら2009)

- 観測データ
公示地価

- 対象
1975年～2007年の東京都区部



東京23区の公示地価の内挿(井上ら2009より)

時空間Krigingの短所

□大規模データへの適用が難しい

- 時空間Krigingは計算負荷が大きくなりがち

■ 原因

- 共分散行列の逆行列の計算負荷が大きいこと

例えば、前スライドの東京23区の時空間内挿をS-plus(32bit版,64bit版)で行うことはできない

□将来予測への適用ができない

- Krigingは内挿(データの分布する領域内の予測)手法であり、外挿(同領域外の予測)への適用は理論に整合しない

研究目標

S-plusによる実行が可能な、
以下の特徴を持つ時空間予測のための手法の提案

- ・ 大規模データへの適用が可能
- ・ 将来予測への適用が可能

■ 方法

- 非対称共分散 (Asymmetric covariance) の概念を用いることで、上記の特徴を持つ実用的な時空間予測の方法を提示する

発表の流れ

- 構築する共分散関数のイメージ
- 非対称な共分散関数の構築
- 非対称な共分散関数適用の利点
- 実証分析

共分散関数が満足すべき性質

(1) 正定値性

- 共分散関数が有効(Valid)であるための必要十分条件

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \geq 0 \quad a_i: \text{任意の定数}$$

(2) 対称性

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \text{Cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_i)$$

- 「共分散は基本的に対称」、「解釈が容易」等の理由から通常は仮定



■ 対称性の仮定はしばしば不適當 (Li et al. 2007)

(例) 方向に依存する相互依存関係を持つデータ

風力、水流、時空間上のデータ など

近年、非対称な共分散関数の適用が試みられつつある

非対称な共分散: Asymmetric covariance (Lack of symmetric covariance)

非対称性[$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq Cov(\varepsilon_j, \varepsilon_i)$]を許容した上で
共分散のモデル化を行う

□ 先行研究の例

- 風の強さの空間内挿

(Gneiting et al. 2007; Genton and Sherman 2007)

■ 先行研究における非対称性導入の目的

- 柔軟な共分散関数の構築

本研究における非対称共分散の導入

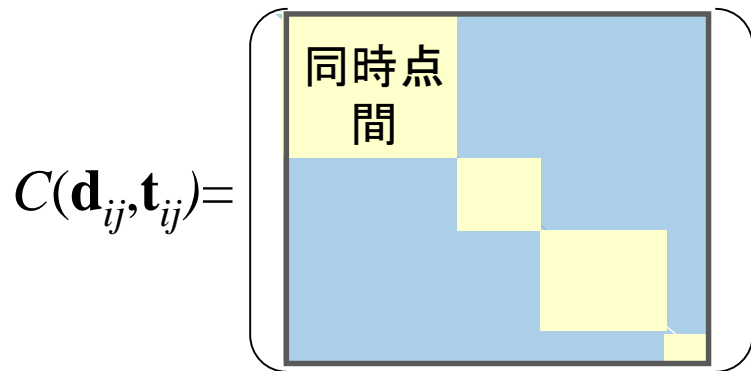
過去、または同時点のデータからのみ影響を受けると仮定する

■ 従来の共分散関数

- 時空間上の距離に依存

$$C(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}) = \begin{cases} \sigma^2 f(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}) & i \neq j \\ \tau^2 + \sigma^2 & i = j \end{cases}$$

■ 得られる共分散行列: 対称



■ 本研究で用いる共分散関数

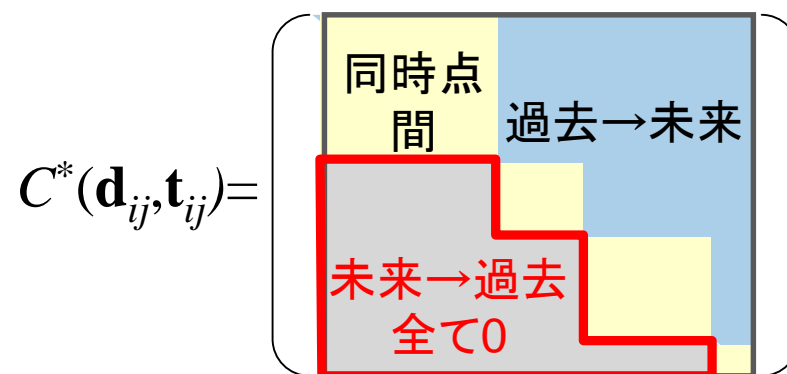
- 時空間上の距離 + **時流** に依存

$$C^*(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}) = \begin{cases} \tau^2 + \sigma^2 & i = j \cap t \leq t \\ \sigma^2 f(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}) & i \neq j \cap t \leq t \\ 0 \uparrow & i \neq j \cap t > t \end{cases}$$

距離関数(例) $f(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}) = \exp(-\mathbf{d}_{ij} / r_d - \mathbf{t}_{ij} / r_t)$

$\tau^2, \sigma^2, r_d, r_t$: パラメータ

■ 得られる共分散行列: **非対称**



非対称共分散導入の利点 (詳しくは後述)

■ 大規模計算が可能となる

- ・ 共分散行列が計算負荷の低いブロック三角行列となるため

■ 将来予測への適用が理論的に許容される

- ・ 過去のデータに基づいて、将来のデータを生み出すメカニズムを定義する手法となり、Harvey (1985)の予測モデルの定義に合致するため

発表の流れ

■ 構築する共分散関数のイメージ

■ 非対称な共分散関数の性質の確認

- 正定値性満足の是非
- Krigingに導入した場合に算出される予測値の解釈

■ 提案モデル適用の利点

■ 実証分析

共分散行列の正定値性

行列式が正であれば正定値

■ 非対称共分散行列

$$C^*(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}) = \begin{pmatrix} \text{同時点間} & \text{過去} \rightarrow \text{未来} \\ \text{未来} \rightarrow \text{過去} & \text{全て0} \end{pmatrix}$$

- 対角線上の各小行列は正定値(通常用いられる空間上の共分散行列と同一なため)
- ↓
- 対角線上の各小行列の行列式は正
- ↓
- **共分散行列の行列式 = 各対角線上の小行列の行列式の積 = 正**

本研究で用いる非対称共分散関数は有効(Valid)

Krigingを構成する方程式

□ 基本モデル

$$y_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, C(\mathbf{d}_{i,j}, \mathbf{t}_{i,j}))$$

□ 基本モデルに基づく地点0の予測式

$$\hat{y}_0 = \mathbf{x}_0 \hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\lambda}}' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

y_0 : 地点0の被説明変数 \mathbf{X}_0 : 地点0の説明変数
 λ_i : 各観測データが地点0に与える影響の重み

■ 予測式導出の元となる方程式

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_{i,0} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{i,j} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_j \\ \mu \end{pmatrix}$$

$\mathbf{C}_{i,j}$: 観測地点間の共分散行列
 $\mathbf{c}_{i,0}$: 各観測地点と予測地点の共分散ベクトル
 μ : ラグランジュ乗数

■ 方程式の意味

(1)[観測点*i*→予測点0の影響]は[観測点*i*→各観測点*j*の影響の加重平均]で表現される

$$\mathbf{c}_{i,0} = \mathbf{C}_{i,j} \boldsymbol{\lambda}_j + \mu$$

(2)[各観測地点に対する加重の総和]は1

$$\mathbf{1}' \boldsymbol{\lambda}_j = 1$$

従来のKrigingの相互依存関係

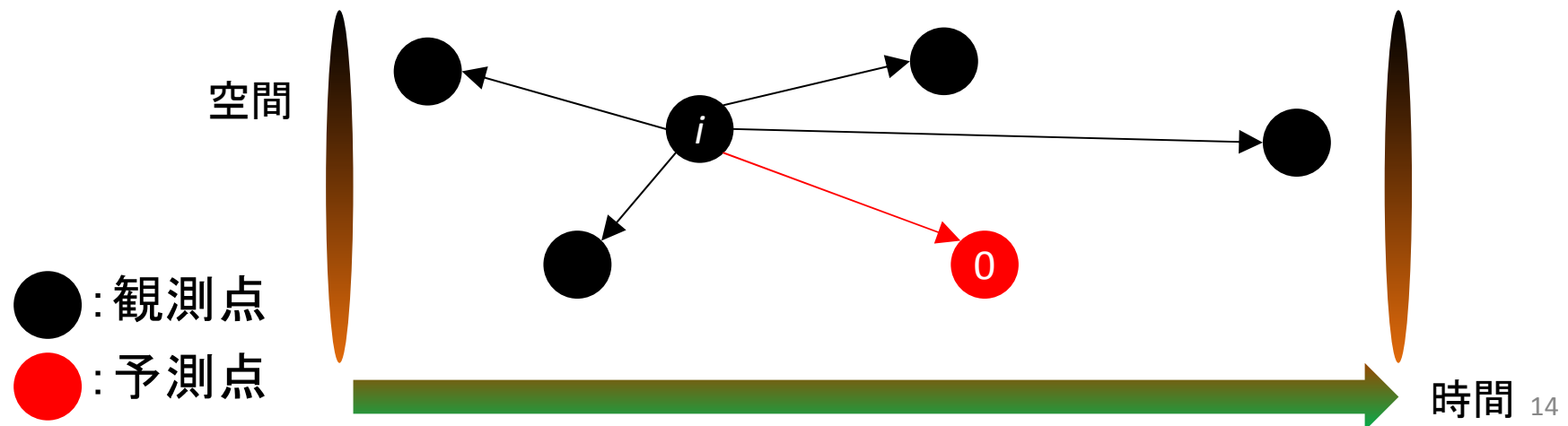
■Krigingの元となる方程式

$$\mathbf{c}_{i,0} = \mathbf{C}_{i,j} \boldsymbol{\lambda}_i + \mu \quad \mathbf{1}' \boldsymbol{\lambda}_i = 1$$

← 対称行列

□方程式より導かれる相互依存関係の解釈

- [観測点*i*から全観測点への影響の強さ(\longrightarrow : $\mathbf{C}_{i,j}$)の加重(λ_i)平均]で [iから予測地点0への影響の強さ(\longrightarrow : $\mathbf{c}_{i,0}$)]を与える



非対称共分散を仮定したKrigingのデータ間の相互依存関係

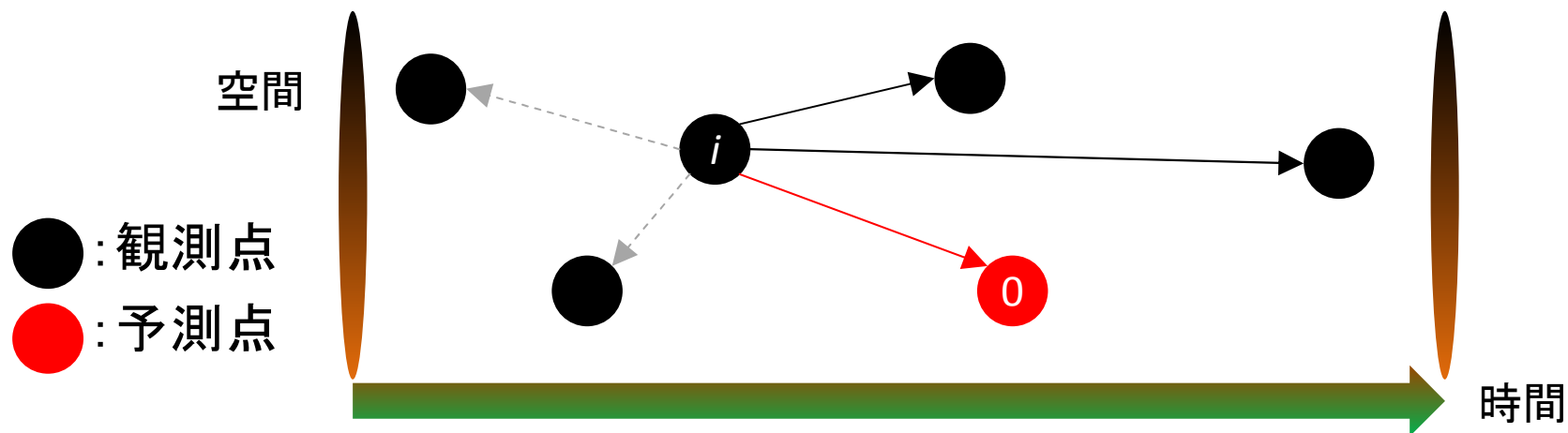
■Krigingの元となる方程式

$$\mathbf{c}_{i,0} = \mathbf{C}_{i,j} \boldsymbol{\lambda}_i + \mu \quad \mathbf{1}' \boldsymbol{\lambda}_i = 1$$

← [未来→過去]を表す共分散が0のブロック上三角行列

□方程式より導かれる相互依存関係の解釈

- [観測点*i*から、**iより後の時点の各観測点への影響の強さ**($\mathbf{C}_{i,j}$)の加重($\boldsymbol{\lambda}_i$ 平均)で、[*i*から予測点0への影響の強さ($\mathbf{c}_{i,0}$)]を与える



自然な解釈が可能

発表の流れ

■ 共分散関数に対する仮定

■ 非対称な共分散関数の構築

■ 非対称な共分散関数適用の利点

- 大規模データへの適用
- 将来予測への適用

■ 実証分析

大規模データへの適用の問題点

共分散関数の逆行列の計算 (計算量 = $O(n^3)$) が必要

□ 提案手法の共分散行列の構造

■ ブロック上三角行列

$$C^*(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}) = \begin{pmatrix} \text{同時点間} & \text{過去} \rightarrow \text{未来} \\ \text{未来} \rightarrow \text{過去} & \text{全て0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{A}_{2N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{A}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{NN} \end{pmatrix}$$

共分散行列の逆行列算出

□ 逆行列算出のイメージ

$$C^*(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \cdots & \mathbf{A}_{1N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{A}_{2N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{A}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{NN} \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad C^*(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} & \cdots & \mathbf{B}_{1N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} & \cdots & \mathbf{B}_{2N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{33} & \cdots & \mathbf{B}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{NN} \end{pmatrix}$$

\mathbf{A}_{ij} 、 \mathbf{B}_{ij} 小行列

対角要素: $\mathbf{B}_{ii} = \mathbf{A}^{-1}_{ii}$ 非対角要素: $\mathbf{B}_{ij} = -\mathbf{A}^{-1}_{ii} \sum_{k=i+1}^j \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kj}$

- 1列目(正確には \mathbf{B}_{11} のある1~数列目)から、列毎に逐次 \mathbf{B}_{ij} を求めていくことで逆行列が算出可能

□ 逐次計算による逆行列算出の利点

- ・ 空間計算量(メモリ使用量)の大幅削減

S-plusを用いた大規模データのための実装が可能

逐次計算による逆行列算出のもう一つの利点

経時的なデータ追加が容易

□従来手法を用いた場合のデータ追加

- 逆行列の再計算が**必要**

□提案手法を用いた場合のデータ追加

- 逆行列の再計算が**不要**

(例) データセット(1,2,...N)に対するデータセット(N+1)の投入

データ追加前の逆行列

$$C^*(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} & \cdots & \mathbf{B}_{1N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} & \cdots & \mathbf{B}_{2N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{33} & \cdots & \mathbf{B}_{3N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{NN} \end{pmatrix}$$

データ追加後の逆行列

$$C^*(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij})^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{C^*(\mathbf{d}_{ij}, \mathbf{t}_{ij})^{-1}} & \mathbf{B}_{1,N+1} \\ & \vdots \\ & \mathbf{B}_{N,N+1} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{N+1,N+1} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{B}_{1,N+1}, \dots, \mathbf{B}_{N+1,N+1}$ は逐次計算により算出¹⁹

非対称共分散関数を用いた将来予測

□ 将来予測モデル

- 将来の観測値を生み出すメカニズムを定義するもの (Harvey(1985))

■ 通常の時空間Krigingは将来予測モデルとは言い難い

- 理由

- [過去→将来]と[将来→過去]の両相互依存関係の混在が前提
- そもそも時流を考慮していない

■ 提案モデルは将来予測モデルと解釈可能

- 理由

- [過去→将来]の影響をモデル化している
- 時流を考慮している

期待二乗誤差最小化という点でKrigingは予測モデルとして優れている

時流を考慮した時空間統計モデル

□ 時間の流れを考慮した空間統計モデル

- Spatial temporal random effect model(Cressie et al.2010)
- Space-time Kalman filtering (Cressie and Wikle (2002))

…など



状態が離散的に遷移するという仮定の下、モデルが構築されてきた

共分散関数自体で時流を連続的に仮定した研究は本研究のみ

発表の流れ

- 共分散関数に対する仮定
- 非対称な共分散関数の構築
- 非対称な共分散関数適用の利点
- 実証分析

実証：地価の時空間予測

□ 対象地域・時点

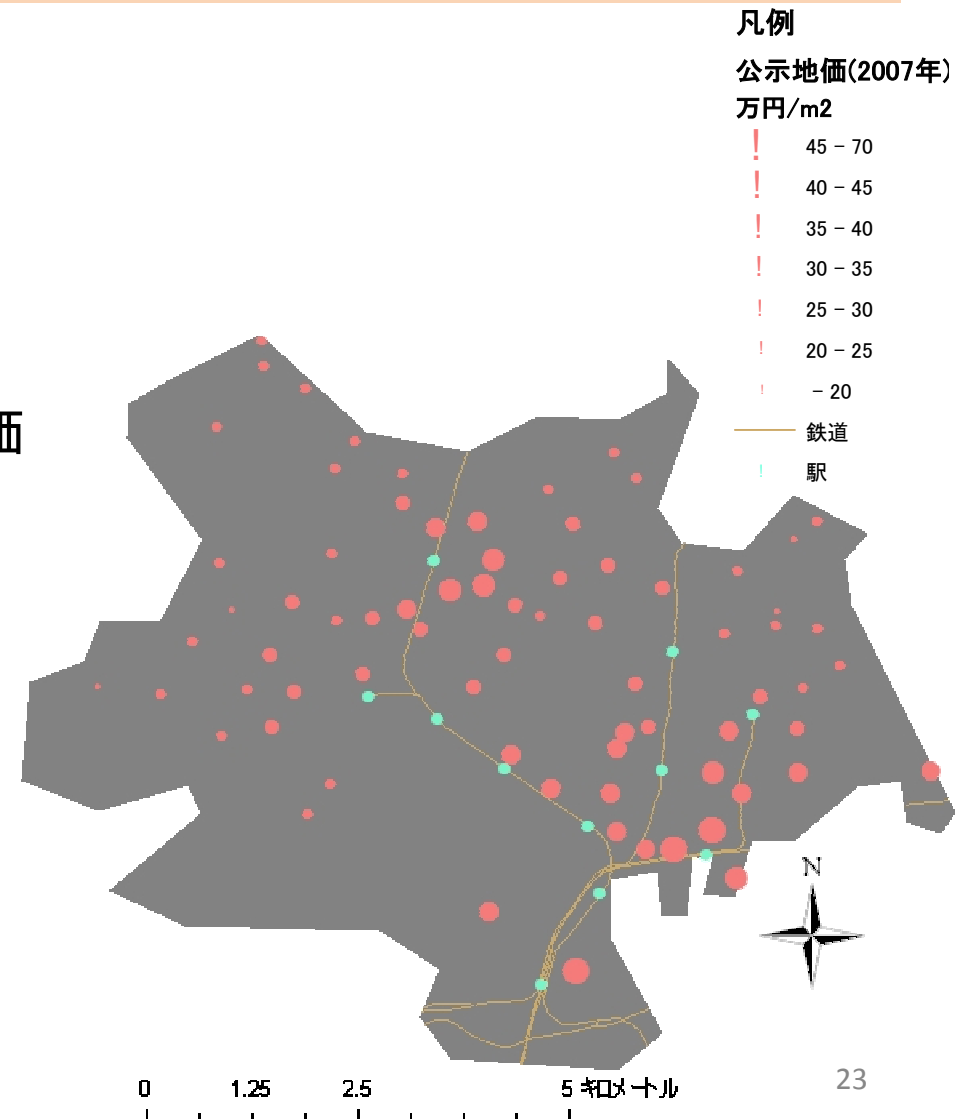
- 東京都足立区

□ データ

- 1990年－2000年の住宅地公示地価
(サンプル数は757)

□ 予測の概要

- 1990年－2000年の地価の内挿
- 2001年－2010年の地価の外挿
(将来予測)



モデル

■ [LM]線形モデル

$$y_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, \mathbf{I})$$

■ [Krige]通常の時空間Kriging

$$y_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, C(\mathbf{d}_{i,j}, \mathbf{t}_{i,j}))$$

■ [Asy-Krige]非対称共分散関数を用いた時空間Kriging

$$y_i = \mathbf{X}_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim N(0, C^*(\mathbf{d}_{i,j}, \mathbf{t}_{i,j}))$$

※共分散関数はSeparable型の指数モデルを使用

□ 使用する変数

被説明変数		住宅地公示地価の対数
説明変数	近接性	[東京距離]最寄駅から東京駅までの鉄道ネットワーク距離の対数 [駅距離]最寄駅までの距離の対数
	人口	[人口密度]人口密度の対数
	土地利用	[田ダミー]田ダミー [農地ダミー]農用地ダミー [幹線ダミー]幹線交通用地ダミー [建物ダミー]建物用地ダミー
	経済動向	[株価]日経平均株価

パラメータ推定結果

パラメータ	LM		Krige		Asy-Krige	
	推定値	t値	推定値	t値	推定値	t値
[定数項]	5.06	***	4.50	***	3.96	***
[東京距離]	-2.34×10^{-1}	***	-1.03×10^{-2}	***	-8.03×10^{-2}	***
[駅距離]	-1.89×10^{-1}	***	-7.73×10^{-2}	***	-7.54×10^{-2}	***
[人口密度]	5.75	***	8.09	***	10.8	***
[田ダミー]	-1.03×10^{-1}		-1.15×10^{-1}		-2.28×10^{-1}	
[農地ダミー]	6.17×10^{-2}	*	3.77×10^{-2}		1.37×10^{-2}	
[幹線ダミー]	2.06×10^{-2}		1.10×10^{-2}		1.77×10^{-3}	
[建物ダミー]	-2.65×10^{-2}	***	-1.27×10^{-2}	**	-1.29×10^{-2}	**
[株価]	2.05×10^{-5}	***	3.70×10^{-6}	***	7.08×10^{-6}	***
σ^2			5.05×10^{-10}		5.05×10^{-10}	
τ^2			7.12×10^{-3}		6.18×10^{-3}	
r_s			1.59		1.30	
r_t			9.29		10.0	

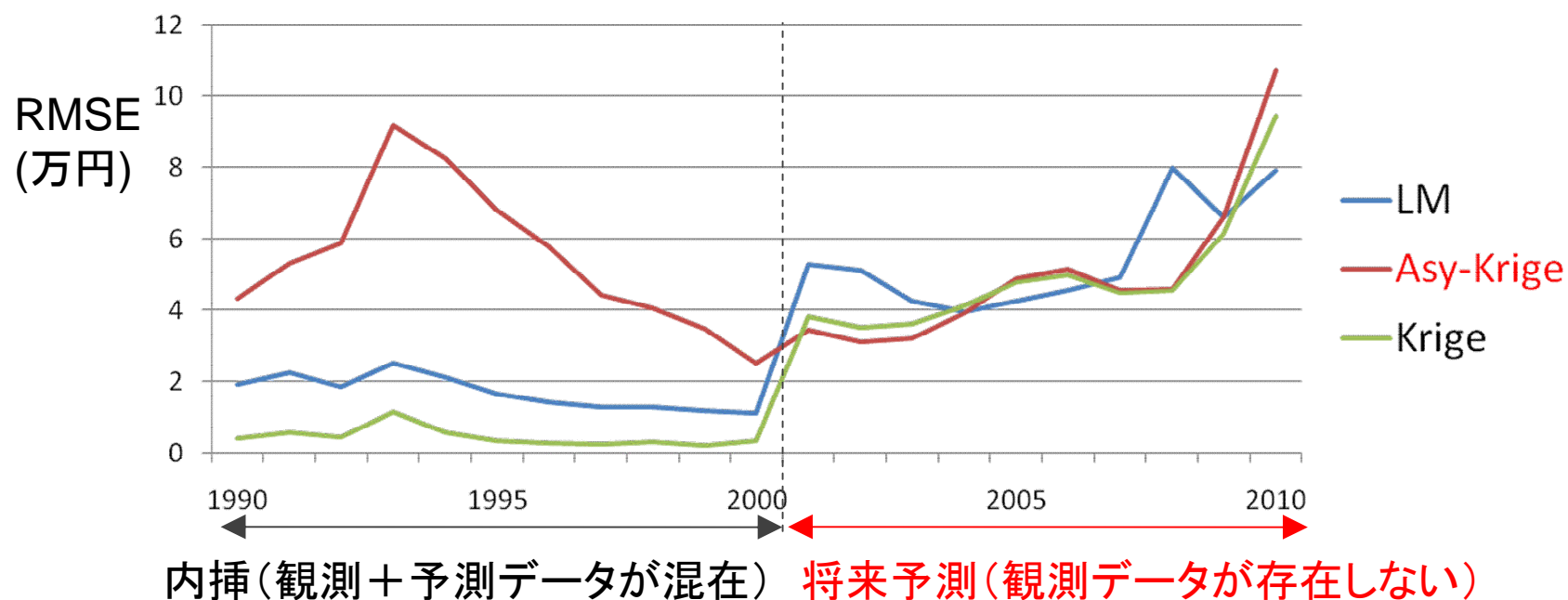
予測精度の比較

□ RMSEによる比較

$$RMSE = 100 \times \sqrt{\sum_{k'} \frac{(y_{k'} - \hat{y}_{k'})^2}{K'}}$$

.....値が小さい=精度が良い

□ 年度別のRMSEの比較



Asy-Krigeの予測精度

□内挿

- 著しく低い

□将来予測

- Krigeと類似した変動傾向

通常の時空間Krigingを将来予測に適用し、
その精度の高さを確認したとの報告も存在(李ら2007)

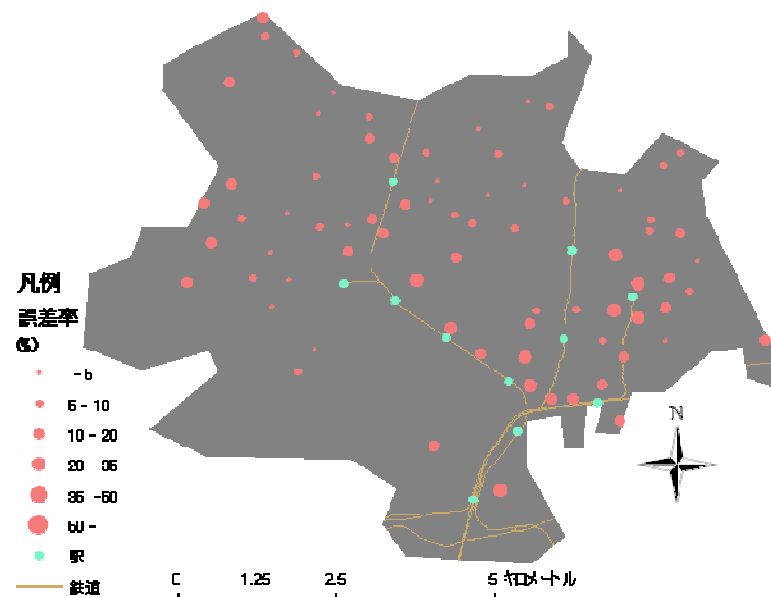
時空間Asy-Krigeは将来予測への適用が適切

Asy-Krigeを用いた 将来予測の誤差率

$$\text{誤差率} = \sqrt{\left(\frac{\hat{y}_i - y_i}{y_i}\right)^2} \times 100$$

観測値の大きさに対する誤差の大きさ

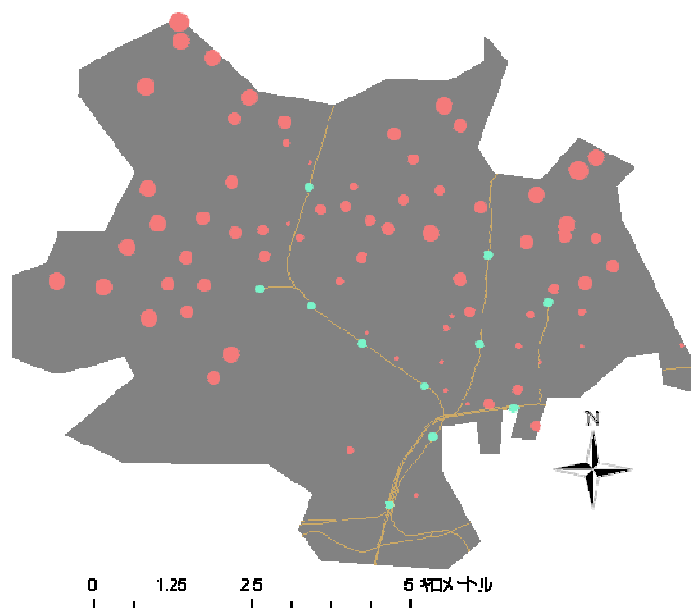
2001年(平均誤差率10%)



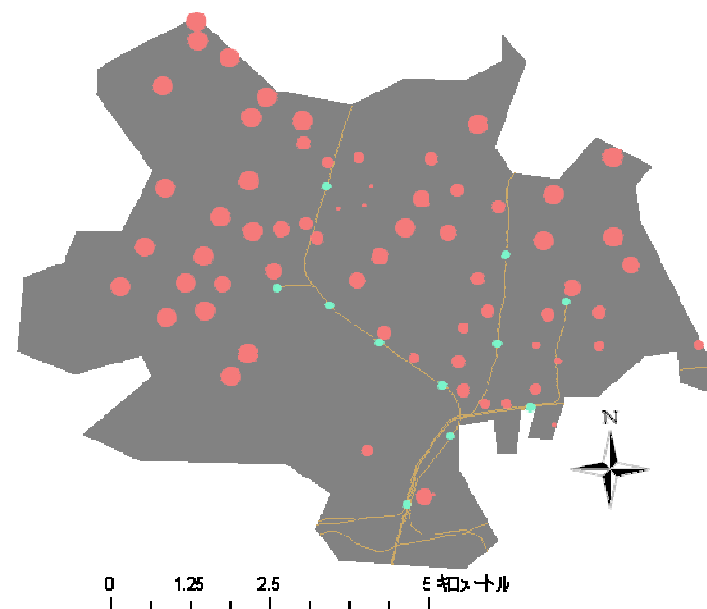
2005年(平均誤差率22%)

凡例
誤差率
(%)

- ! 50 -
- ! 35 - 50
- ! 20 - 35
- ! 10 - 20
- ! 5 - 10
- ! - 5
- ! 駅
- 鉄道



2010年(平均誤差率39%)



まとめ

S-plusによる実行が可能な、
大規模データのための時空間データの予測手法を提示した

□ 非対称共分散関数適用の利点

■ 計算負荷の削減

- 計算に必要なメモリの大幅削減
- データ追加の際の逆行列の再計算が不要

■ 内挿手法Krigingの将来予測(外挿)手法への拡張

- 時空間上への連続的な将来予測が可能

□ 実証分析から

- 将来予測への適用が可能である一方で、内挿には向かない