

# ARCH型モデルを用いた 日経平均株価の 日次ボラティリティの予測

法政大学大学院工学研究科  
渥美幸一郎

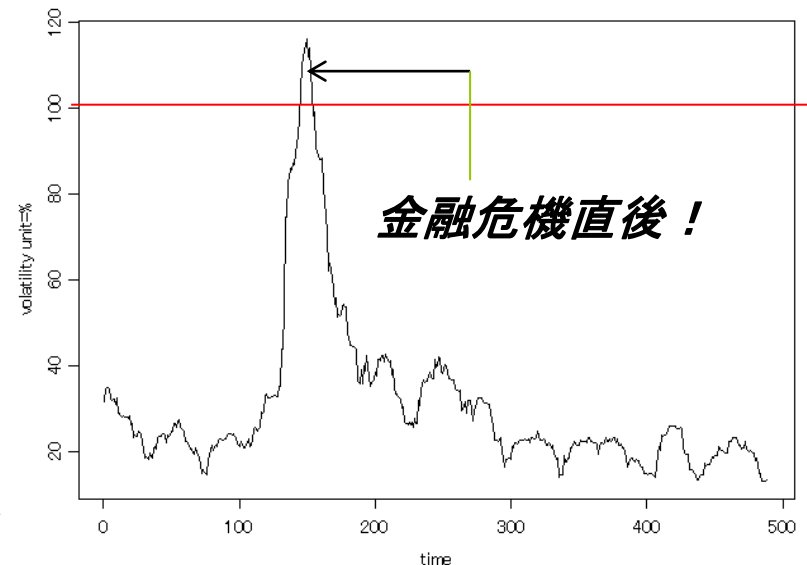
# 構成

1. 研究背景・目的
2. 先行研究
3. ボラティリティの特徴
4. 予測モデル
5. 使用データと分析手順
6. 結果
7. 考察
8. 参考文献
9. Appendix

# 1.1 研究背景

- **ボラティリティ**はオプション価格や保有金融資産のリスクにも影響を与えることで知られており、ボラティリティの把握・予測の重要性は増している。
- ボラティリティの予測手法はARCH型モデルや確率的分散変動モデルによる分析が主流。
- しかし**金融危機時**には日経平均株価は急落、年率ボラティリティが100%を超える現象も。
- 従来手法で有意なボラティリティ予測ができるのか

2008/4/1-2010/3/31 年率HV(20)



# 1.2 研究目的

- 従来手法であるARCH型モデルを金融危機時周辺のデータを用いても有意なボラティリティの予測ができるかを検証する。
- ARCH型モデル間(本研究では4つのモデルを使用)の精度を比較する。
- 精度を図る上で必要となるボラティリティの真の値にHistorical Volatility(以下、HV)とRealized Volatility(以下、RV)を利用し、この二つの指標に対するARCH型モデルの有意性を検証する。

## 2.1 先行研究

- 渡部[2000]ではARCH型モデルを金融資産のボラティリティ予測に利用し、その手法が広がる。
- 渡部・佐々木[2000]ではARCH型モデルの誤差項に裾野の厚いt分布を利用することで、有意な結果を得ている。
- 渡部・佐々木[2006]ではFIEGARCH, EGARCH, GJR, GARCHの順に、ボラティリティの特徴をより多く捉えたモデルで良い予測パフォーマンスを得ている。
- また渡部・佐々木[2006]ではRVをボラティリティの真の値として検証に用いている。

# 3.1 ボラティリティの特徴

- ボラティリティクラスタリング

ボラティリティが高く(低く)なると、高い(低い)状態がしばらく続く現象。**持続性**とも呼ばれている。一般に株価の収益率の2乗には自己相関が見られる。

・・・GARCH, EGARCH, TGARCH, FIEGARCH

- 非対称性

株価上昇日の翌日よりも下落日の翌日の方が高いボラティリティが観測される傾向がある。投資家は良いニュースよりも悪いニュースに敏感に反応する。

・・・EGARCH, TGARCH, FIEGARCH

※特徴を捉えているモデルを下に記載

# 3.1 ボラティリティの特徴

- 長期記憶性

ある変数の $k$ 次の自己相関係数を $\rho(k)$ とすると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| = \infty$$

である時、この変数は長期記憶性を持つという。

・・・FIEGARCH

- 短期記憶性

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\rho(k)| < \infty$$

である時、短期記憶性を持つという。一定の期間中にショック(価格に影響を与えるニュースなど)の影響が消える性質。

モデルのパラメータが定常性の条件を満たせば、ボラティリティは短期記憶性を持つ。

・・・GARCH, EGARCH, TGARCH

## 3.1 予測モデル(ボラティリティの定義)

- 株価のt期のリターン $R_t$ の定義

$$R_t = E\{R_t | I_{t-1}\} + \varepsilon_t$$

$I_{t-1}$ ...t-1期に利用可能な情報集合

予測不可な変動 $\varepsilon_t$ を、非負な値 $\sigma_t$ と確率変数(誤差項) $z_t$ の積として表す。

$$\varepsilon_t = z_t \sigma_t$$

$$z_t \sim \text{i. i. d.}, E[z_t] = 0, \text{Var}[z_t] = 1$$

この $\sigma_t$ をボラティリティと呼び、以下のARCH型モデルではボラティリティの時系列変動を定式化する。



# 4.1 予測モデル(GARCHモデル)

- GARCH(1,1)モデル

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta \sigma_{t-1}^2 + \omega \epsilon_{t-1}$$

$$\alpha > 0 \quad \beta, \omega \geq 0$$

二つ目の式は $\sigma_t^2$ の非負制約

ボラティリティクラスタリング: 持続性があると、 $\beta$  の値は1に近づく

非対称性: 捉えていない

定常性の条件:  $\beta + \omega < 1$

パラメータは最尤法を用いて求める

## 4.2 予測モデル(EGARCHモデル)

- EGARCH(1,0)モデル

$$\ln(\sigma^2) = \alpha + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) \\ + \theta z_{t-1} + \omega \{|z_{t-1}| - E[z_{t-1}]\}$$

ボラティリティクラスタリング:

持続性があれば $\beta$ の値は 1 に近づく

非対称性:  $\theta$  によって株価の上昇・下落によってボラティリティの値に差が生まれる

定常性の条件:  $|\beta| < 1$

## 4.3 予測モデル(TGARCHモデル)

- TGARCH(1,0)モデル

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta \sigma_{t-1}^2 + \omega \epsilon_{t-1} + \gamma D_{t-1}^- \epsilon_{t-1}^2$$

$$\alpha > 0 \quad \beta, \omega, \gamma \geq 0$$

ボラティリティクラスタリング:

持続性があれば $\beta$ の値は1に近づく

非対称性:  $D_{t-1}^-$ は $\epsilon_{t-1}$ がマイナス(プラス)の時に1(0)となる**ダミー変数**。これにより非対称性を捉える

定常性の条件:  $\alpha + \beta + \gamma/2 < 1$

## 4.4 予測モデル(FIEGARCHモデル)

- FIEGARCH(1,0)モデル

$$(1 - \beta)(1 - L)^d \ln \sigma_t^2 \\ = \alpha + \theta z_{t-1} + \gamma \{|z_{t-1}| - E[|z_{t-1}|]\}$$

- $d = 0$ の時、EGARCHモデルと等しくなる。

非対称性:  $\theta$ によって株価の上昇・下落によってボラティリティの値に差が生まれる。

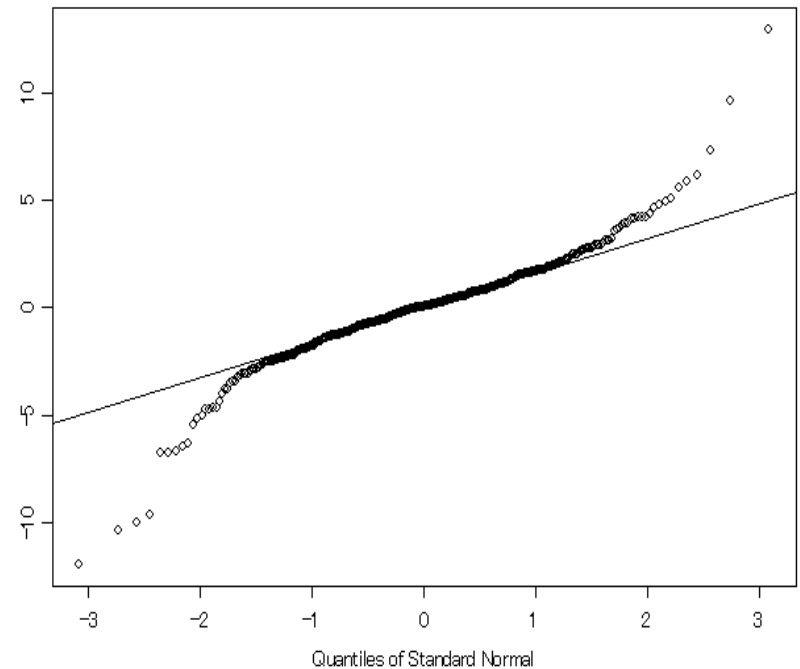
記憶性:  $|\beta| < 1$ の時、

$0 < d < 1$ であれば、長期記憶性を持つ。さらに、 $d < 0.5$ の時は定常、 $d \geq 0.5$ の時は非定常となる。

# 4.5 予測モデル(誤差項の分布)

誤差項の式の $z_t$ の分布について

- 株価のリターンの分布は正規分布よりも裾野が分厚い。
- 本研究ではARCH型モデルの誤差項 $z_t$ には**標準正規分布**と**t分布**を仮定し、分布間の比較も行う。
- t分布の場合はモデルのパラメータ推定には疑似最尤法を用いる。



2008~09年の日経平均日次リターン

# 5.1 使用データと分析手順

- 2004年3月5日から2010年3月31日の日経平均株価の日次変化率(%)1489個を利用。

$$\text{日次変化率}_t(\%) = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) \times 100$$

- モデルのパラメータ推定には500個のデータを利用。
- ①2006年3月20日～2008年3月31日と、  
②2008年4月1日～2010年3月31日の2期間に分けてボラティリティの予測値とHV・RVを比較し、その期間のモデル・分布間の精度を比較(2004年3月20日は501個目、2008年4月1日は1001個目)。
- RVは2008年4月1日～の比較のみ。

## 5.2 使用データと分析手順

- 日経平均株価変化率のそれぞれの基本統計量
- 2004年3月5日～2006年3月17日(500個)

平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	LB (10) 変化率	変化率2乗
0.0696 ■ (0.048)	1.072	3.522	-4.965	-0.3149 ■ (0.110)	4.298 ■ (0.219)	19.302	72.421

- 2006年3月20日～2008年3月31日(500個)

平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	LB (10) 変化率	変化率2乗
-0.05317 ■ (0.061)	1.363	4.182	-5.816	-0.5565 ■ (0.110)	4.795 ■ (0.219)	3.6882	140.8803

- 2008年4月1日～2010年3月31日(489個)

平均	標準偏差	最大値	最小値	歪度	尖度	LB (10) 変化率	変化率2乗
-0.02465 ■ (0.104)	2.297	12.91	-11.95	-0.3362 ■ (0.111)	9.147 ■ (0.222)	11.5047	585.6367

括弧内は標準誤差。平均は10%有意水準。尖度は3を越えたら正規分布よりも裾厚。LB(Ljung-Box統計量)より、変化率2乗に自己相関が見られる。これはボラティリティクラスタリングに整合。

## 5.3 使用データと分析手順

- HVは過去20日間の日次変化率から求める。

$$\underline{HV_t(\%) = \text{期間中の標準偏差}}$$

- RVとは日中のn個の変化率の総和  
第t日の $RV_t$ は、

$$\underline{RV_t(\%) = \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i/n}^2}$$

- $n = \infty$ とすると、Implied Volatilityに収束する。HVに比べ、RVの変動は激しくなる。

本研究では、5分ごとの変化率データを使用、 $n = 56$



# 5.4 使用データと分析手順

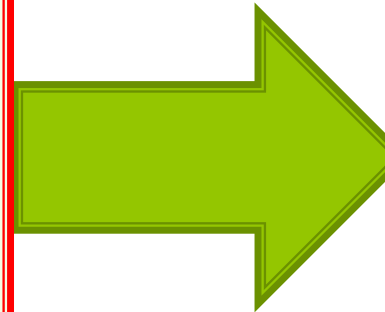
- 全体の流れ

①, 1~500  
期のデータ  
からモデル  
のパラメー  
タを推定  
② 501期  
目のボラ  
ティ  
リティを予  
測  
③ HV・RV  
と予測値を  
比較



①, 2~501  
期のデータ  
からモデル  
のパラメー  
タを推定  
② 502期  
目のボラ  
ティ  
リティを予  
測  
③ HV・RV  
と予測値を  
比較

$i=1$  to 989



①, 989~14  
88期のデー  
タからモデ  
ルのパラ  
メータを推定  
② 1489期  
目のボラティ  
リティを予測  
③ HV・RVと  
予測値を比  
較

## 5.5 使用データと分析手順

- 予測値のパフォーマンスを比較するために回帰分析を行う。  
回帰モデル:

$$\underline{HV_t \text{ or } RV_t = a + b\hat{\sigma}_{t|t-1}^2 + e_t}$$

$e_t$ は誤差項。帰無仮説 $H_0: a = 0, b = 1$ を検定。



**自由度調整済み決定係数** $R^2$ でパフォーマンスを判断

- モデル・分布の適合度の比較には、function:compareより
  - AIC(赤池情報量基準)
  - BIC(ベイズ情報量基準)
  - Likelihoodを出力。

# 6.1 結果 (パラメータの推定値)

- $i=501$  (2008年4月1日～2010年3月31日のデータを使用、 $v$ はt分布の自由度)

	GARCHn	GARCHt
$\alpha$	0.036	0.01744
$\beta$	0.882	0.91716
$\omega$	0.101	0.07988
$v$		7.779

	EGARCHn	EGARCHt
$\alpha$	-0.03456	-0.02932
$\beta$	0.98534	0.98651
$\theta$	-0.99998	-1
$\omega$	0.05166	0.0429
$v$		7.810

	FIEGARCHn
$\alpha$	7.54E-03
$\beta$	-2.29E-02
$\theta$	-4.42E-01
$\gamma$	-2.88E-02
$d$	6.16E-01

- ▶
- ▶
- ▶
- ▶

	TGARCHn	TGARCHt
$\alpha$	0.0427	0.03147
$\beta$	0.93632	0.94598
$\omega$	-0.06691	-0.06624
$\gamma$	0.19445	0.18259
$v$		13.016

すべてのモデルにおいて、持続性と非定常性を捉えている。またGARCHモデル以外では非対称性を捉えている。

FIEGARCHモデルについては、S-plus・functionにて誤差項にt分布の過程を実現できなかったため、本研究では扱わない。

## 6.2 結果 (RMSE)

- RMSE(root mean squared error)を利用してモデル間の予測値のパフォーマンスを比較。

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (HV_t \text{ or } RV_t - \hat{\sigma}_{t|t-1}^2)^2}$$

HV①	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
RMSE	0.091964	0.076401	0.181511	0.19457	0.183071	0.181308	0.2075072

HV②	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
RMSE	0.543071	0.444272	0.777218	0.722246	0.618658	0.576759	0.810777

RV	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
RMSE	1.176366	1.194626	0.502581	0.508336	1.023467	1.034243	0.8095877

ここでは、HVではGARCHtモデル、RVではEGARCHnモデルの予測パフォーマンスが一番良い。

## 6.3 結果(回帰分析)

- 回帰分析

HV①	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
a	-0.013	-0.019	-0.015	0.001	0.070	0.066	-0.013
b	1.071	1.063	1.201	1.136	0.723	0.724	1.071
F値	3607	5444	591.5	426.7	694.3	758.3	3607
R <sup>2</sup>	0.879	0.916	0.542	0.460	0.582	0.603	0.879

HV②	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
a	0.061	0.025	-0.140	-0.152	0.100	0.088	0.061
b	0.888	0.903	1.563	1.650	0.918	0.926	0.888
F値	3011	4902	2121	4171	2044	2419	3011
R <sup>2</sup>	0.861	0.909	0.813	0.895	0.807	0.832	0.861

RV	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
a	0.172	0.165	0.058	0.079	0.156	0.156	0.172
b	0.297	0.296	0.599	0.589	0.345	0.342	0.297
F値	568.1	589.7	981.3	856.2	851.2	845.6	568.1
R <sup>2</sup>	0.538	0.547	0.668	0.638	0.635	0.634	0.538

ここではHVではGARCHtモデル、RVではEGARCHnモデルのパフォーマンスが一番良い。しかし、F値を見ると、帰無仮説 $H_0: a = 0, b = 1$ はすべてにおいて有意水準1%でも棄却されている。日次変化率にARCH型モデルを適用すると、有意なバイアスが生じていることがわかる。

## 6.4結果(モデルの適合度)

i=1

	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
AIC	1432.2	1428.9	1420.8	1422	1428	1427.6	1424.3
BIC	1449.1	1450	1441.8	1447	1449	1452.9	1449.5
Likelihood	-712.1	-709.5	-705.4	-705	-709	-707.8	-706.1

i=501

	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
AIC	1639.1	1630.9	1630	1630.4	1604.5	1603	1594.1
BIC	1656	1651.9	1651	1655.7	1625.5	1628.3	1619.4
Likelihood	-815.6	-810.4	-810	-809.2	-797.2	-795.5	-791.1

i=745(2009年4月1日時点)

	GARCHn	GARCHt	EGARCHn	EGARCHt	TGARCHn	TGARCHt	FIEGARCHn
AIC	1929.1	1924.6	1928	1926	1908.8	1909.5	1904.6
BIC	1946	1945.7	1949	1951	1929.8	1934.8	1929.9
Likelihood	-960.6	-957.3	-959	-957	-949.4	-948.8	-946.3

時点によってばらつきはあるが、EGARCH,FIEGARCHモデルがボラティリティの特徴をよりの確に捉えていることがわかる。また、全体的に標準正規分布よりもt分布の方が適合度が高い。

# 7.1 考察

- モデルの適合度が一番低いGARCHモデルの予測パフォーマンスが一番良い。真のボラティリティがHVではGARCHモデルが過大評価されてしまう可能性が高い。今後はHV以外の指標を導入する必要がある。
- 6.4結果より、ボラティリティには持続性・非対称性・短期記憶性が備わっていると言える。また誤差項の分布には、t分布を用いた方が適合度が増す。
- しかしARCH型モデルは金融危機時周辺のボラティリティの予測、および、モデルの適合度は低下したことより、金融危機時周辺ではこの特徴は減衰したと言える。よって変動の大きい相場では、ARCH型モデル以外のモデルも適用する必要がある。

# 8.1 参考文献

- ボラティリティ変動モデル[2000]渡辺敏明著
- Modeling Financial Time Series with S-PLUS[2005]
- ARCH型モデルとRealized Volatilityによるボラティリティ予測とValue-at-Risk[2006]渡辺敏明・佐々木浩二著
- Analysis of Financial Time Series[2005]Ruey S.Tsay



# 9.1 Appendix

- ▶ `module(FinMetrics)`
- ▶ `##以下データの読み込み`
- ▶ `import.data(DataFrame="dailyre0809h.txt1",FileName="d:/dailyre0809h.txt",FileType="ASCII")`
- ▶ `print(dailyre0809h.txt1)`
- ▶ `dr0809<-print(dailyre0809h.txt1)`
- ▶ `import.data(DataFrame="RV0809h.txt1",FileName="d:/RV0809h.txt",FileType="ASCII")`
- ▶ `print(RV0809h.txt1)`
- ▶ `RV0809<-print(RV0809h.txt1)`
- ▶ `tsplot(RV0809[,1],main="2008/4/1-2010/3/31 年率RV",xlab="time",ylab="volatility unit=%",type="l")`
- ▶ `import.data(DataFrame="HV0809h.txt1",FileName="d:/HV0809h.txt",FileType="ASCII")`
- ▶ `print(HV0809h.txt1)`
- ▶ `HV0809<-print(HV0809h.txt1)`
- ▶ `tsplot(HV0809[,1],main="2008/4/1-2010/3/31 年率HV",xlab="time",ylab="volatility unit=%",type="l")`

# 9.1 Appendix

##以下モデルのパラメータ推定

```
sigma.t.GARCH=1:989
```

```
▶ for(i in 1:989){  
▶     dri.garch = garch(dr0809[i:(i+499),]~1, ~garch(1,1))  
▶     dri.garch.pred = predict(dri.garch,1)  
▶     sigma.t.GARCH[i] = sqrt(250) * dri.garch.pred$sigma.pred##%表示  
▶ }
```

##以下t分布を用いたモデルのパラメータ推定

```
sigma.t.GARCH.t=1:989
```

```
▶ for(i in 1:989){  
▶     dri.garch.t = garch(dr0809[i:(i+499),]~1, ~garch(1,1), cond.dist="t", trace=F)  
▶     dri.garch.t.pred = predict(dri.garch.t,1)  
▶     sigma.t.GARCH.t[i] = sqrt(250) * dri.garch.t.pred$sigma.pred  
▶ }
```

# 9.1 Appendix

- ▶ ##以下、モデルの適合度の比較
- ▶ `garch.compare = compare.mgarch(dri.garch,dri.garch.t)`
- ▶ `egarch.compare = compare.mgarch(dri.egarch,dri.egarch.t)`
- ▶ `tgarch.compare = compare.mgarch(dri.tgarch,dri.tgarch.t)`
- ▶ `fiegararch.compare = compare.mgarch(dri.fiegararch)`
  
- ▶ `garch.compare`
- ▶ `egarch.compare`
- ▶ `tgarch.compare`
- ▶ `fiegararch.compare`
- ▶ ##以下RVの回帰分析
- ▶ `RVsigma.0809g.fit = OLS(RV20809[1:489]~sigma.t2.GARCH[501:989])`
- ▶ `RVsigma.0809g.fit`
- ▶ `summary(RVsigma.0809g.fit)`
- ▶ `RVsigma.0809gt.fit = OLS(RV20809[1:489]~sigma.t2.GARCH.t[501:989])`
- ▶ `RVsigma.0809gt.fit`
- ▶ `summary(RVsigma.0809gt.fit)`

# 9.1 Appendix

- ▶ ##以下HVの回帰分析
- ▶ HVsigma.5g.fit = OLS(HV20809[1:500]~sigma.t2.GARCH[1:500])
- ▶ HVsigma.5g.fit
- ▶ summary(HVsigma.5g.fit)
- ▶ HVsigma.5gt.fit = OLS(HV20809[1:500]~sigma.t2.GARCH.t[1:500])
- ▶ HVsigma.5gt.fit
- ▶ summary(HVsigma.5gt.fit)