2011年度 S-PLUS学生研究奨励賞

空間従属性を考慮した重力モデルの理論的発展

筑波大学大学院　システム情報工学研究科
不動産・空間計量研究室
博士前期課程1年
爲季和樹

発表構成

- 重力モデルとその問題点
- 空間従属性を考慮した重力モデルの紹介
- 都道府県間人口移動データによる実証
- 研究の背景と目的
- 空間ラグ重力モデルの問題点と理論的発展
- まとめと今後の課題

空間的相互作用モデル

- 空間的相互作用 spatial interaction
  - フロー・流動・流れ
    - 人口移動
    - 物流
    - 貿易
- 空間的相互作用モデル

$$T_{ij} = f(V_i, W_j, S_{ij})$$

発地 i から着地 j へのフロー

発地の**放出性**

着地の**吸収性**

発着地間の**分離性**

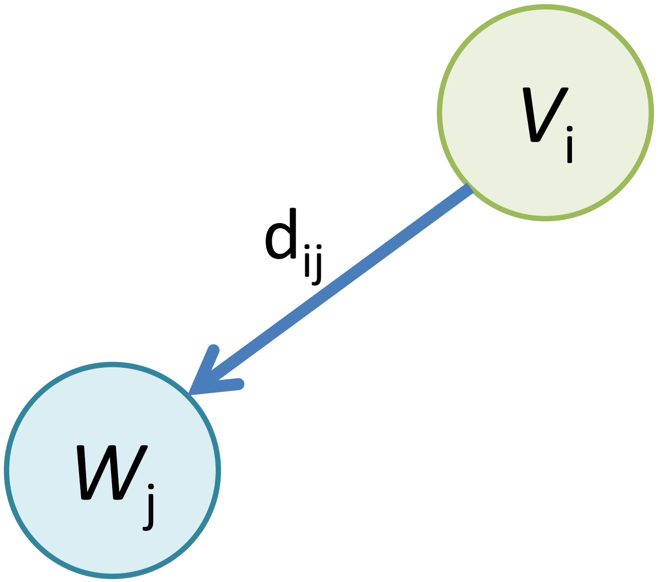
石川(1988)

代表的な空間的相互作用モデル
重力モデル

重力モデル（無制約）　$T_{ij} = kV_i^{\alpha} W_j^{\gamma} d_{ij}^{-\beta}$

対数正規重力モデル　$\ln T_{ij} = \ln k + \alpha \ln V_i + \gamma \ln W_j - \beta \ln d_{ij}$

T_{ij}	発地 i から着地 j へのフロー量
V_i	発地 i の規模を表す説明変数
W_j	着地 j の規模を表す説明変数
d_{ij}	i j 間の距離
k, α, β, γ	パラメータ



フローデータの空間従属性を考慮していない
⇒ **パラメータ推定値の信頼性が低下**

空間従属性を考慮した重力モデル

LeSage and Pace (2008)

対数正規重力モデル　$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{1}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$

空間ラグ　$\mathbf{Wy}$

観測地域間の近接性の定義

空間ラグ重力モデル　$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W} \mathbf{y} + \alpha \mathbf{1}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$

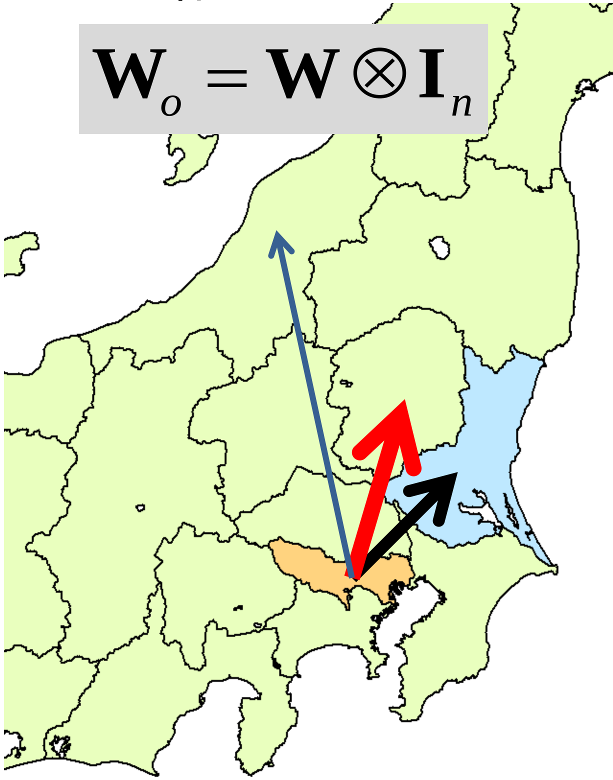
	従来	今回
扱うデータ	点・面 データ	フローデータ
考慮する地域数	2地域	4地域
行列Wの大きさ	$n \times n$	$n^2 \times n^2$

フローでの近接性の定義とは？

フローにおける近接性の定義

着地ベース

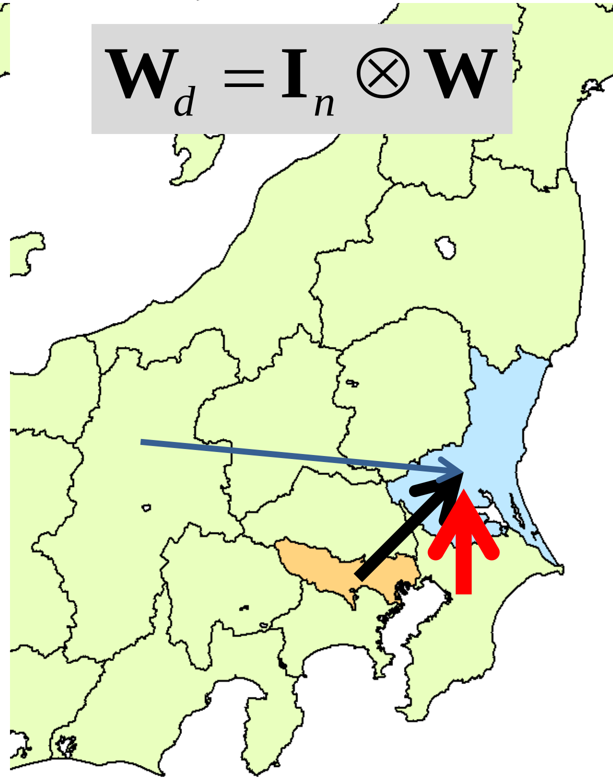
$$\mathbf{W}_o = \mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_n$$



発地固定
着地が近接している

発地ベース

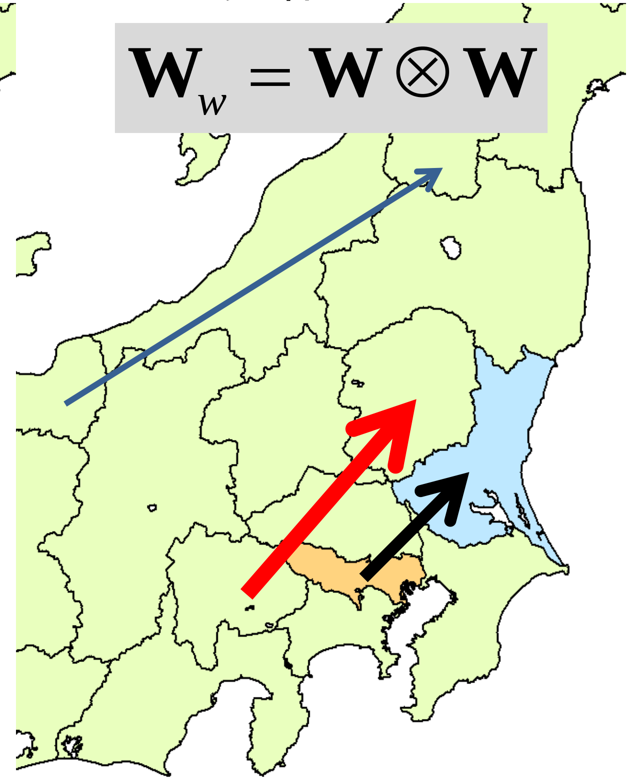
$$\mathbf{W}_d = \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{W}$$



着地固定
発地が近接している

発着地ベース

$$\mathbf{W}_w = \mathbf{W} \otimes \mathbf{W}$$



固定なし
発地と着地が近接している

空間従属性を考慮した重力モデルの一般形

$$\mathbf{y} = \underline{\rho_o \mathbf{W}_o \mathbf{y} + \rho_d \mathbf{W}_d \mathbf{y} + \rho_w \mathbf{W}_w \mathbf{y}} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

制約によるモデル族

$\rho_o = \rho_d = \rho_w = 0$	$\mathbf{y} = \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$
$\rho_o = \rho_w = 0$	$\mathbf{y} = \rho_d \mathbf{W}_d \mathbf{y} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$
$\rho_d = \rho_w = 0$	$\mathbf{y} = \rho_o \mathbf{W}_o \mathbf{y} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$
$\rho_d = \rho_o = 0$	$\mathbf{y} = \rho_w \mathbf{W}_w \mathbf{y} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$
$\rho_d = \rho_o \cap \rho_w = 0$	$\mathbf{y} = \rho(\frac{\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_d}{2})\mathbf{y} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$
$\rho_d = \rho_o = \rho_w$	$\mathbf{y} = \rho(\frac{\mathbf{W}_o + \mathbf{W}_d + \mathbf{W}_w}{3})\mathbf{y} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$
$\rho_w = 0$	$\mathbf{y} = \rho_o \mathbf{W}_o \mathbf{y} + \rho_d \mathbf{W}_d \mathbf{y} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$
$\rho_w = -\rho_d \rho_o$	$\mathbf{y} = \rho_o \mathbf{W}_o \mathbf{y} + \rho_d \mathbf{W}_d \mathbf{y} - \rho_o \rho_d \mathbf{W}_w \mathbf{y} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$
unrestricted	$\mathbf{y} = \rho_o \mathbf{W}_o \mathbf{y} + \rho_d \mathbf{W}_d \mathbf{y} + \rho_w \mathbf{W}_w \mathbf{y} + \alpha \mathbf{l}_n + \mathbf{X}_o \beta + \mathbf{X}_d \gamma + \theta \mathbf{d} + \boldsymbol{\varepsilon}$

まず初めにこれらのモデルを都道府県間人口移動データに適用し
空間従属性を考慮した重力モデルの有用性を検証

使用するデータ

LeSage and Pace (2008)

- 被説明変数
  - 州間人口移動
- 説明変数
  - 対数
    - 人口、面積、距離
  - 比率
    - 25歳以下人口、失業者、販売職業就業者、幹部社員＆経営者、自治体就業者、農業就業者
- 空間重み行列
  - *m* nearest neighbors

本研究

- 被説明変数
  - 都道府県間人口移動
- 説明変数
  - 対数
    - 人口、面積、距離
  - 対人口比
    - 15歳未満人口、完全失業者、第3次産業就業者、役員人口、65歳以上人口
- 空間重み行列
  - inverse squared distance

実証分析：推定結果　～モデル比較～

	対数尤度	尤度比検定統計量	棄却限界値
unrestricted	-952.48		
$\rho_w = -\rho_d \rho_o$	-1095.44	285.92	$\chi^2(1) = 3.84$
$\rho_w = 0$	-1330.32	755.68	$\chi^2(1) = 3.84$
$\rho_d = \rho_o, \rho_w = 0$	-1332.45	759.94	$\chi^2(2) = 5.99$
$\rho_d = \rho_o = \rho_w$	-1533.30	1161.64	$\chi^2(2) = 5.99$
$\rho_d = \rho_w = 0$	-1533.68	1162.40	$\chi^2(2) = 5.99$
$\rho_o = \rho_w = 0$	-1574.00	1243.04	$\chi^2(2) = 5.99$
$\rho_d = \rho_o = 0$	-1758.72	1612.48	$\chi^2(2) = 5.99$
$\rho_d = \rho_o = \rho_w = 0$	-1855.50	1806.04	$\chi^2(3) = 7.82$

unrestricted モデルが最も良いモデル
従来の重力モデルが最も悪いモデル

研究の背景と目的

- 背景
  - LeSage and Pace (2008)による、空間従属性を考慮した重力モデルの提案
  - しかし、理論的改良の余地が残る

- 目的
  - 理論的問題点の解明とその解決法の提案
    1. 内々フローが観測されないデータでの推定が困難
    2. フローに対する対数正規分布の仮定の統計学的問題点

モデルの理論的発展：その1 内々フローの問題

- 空間ラグ重力モデルにおける内々フロー問題
  - 内外と内々フロー全ての観測値が必要
  - 内々フローが観測されていないODデータは多い
    - 都道府県間人口移動データは稀なケース

モデルを使用できる場面が限られてしまう

↓

内々フローが未観測のデータでもモデルを適用できる推定手法を提案

提案手法：EMアルゴリズム

- EMアルゴリズム
  - 不完全データにおける繰り返し計算による最尤法
- 未観測の内々データを欠損値とみなすことでEMアルゴリズムによる推定を行う

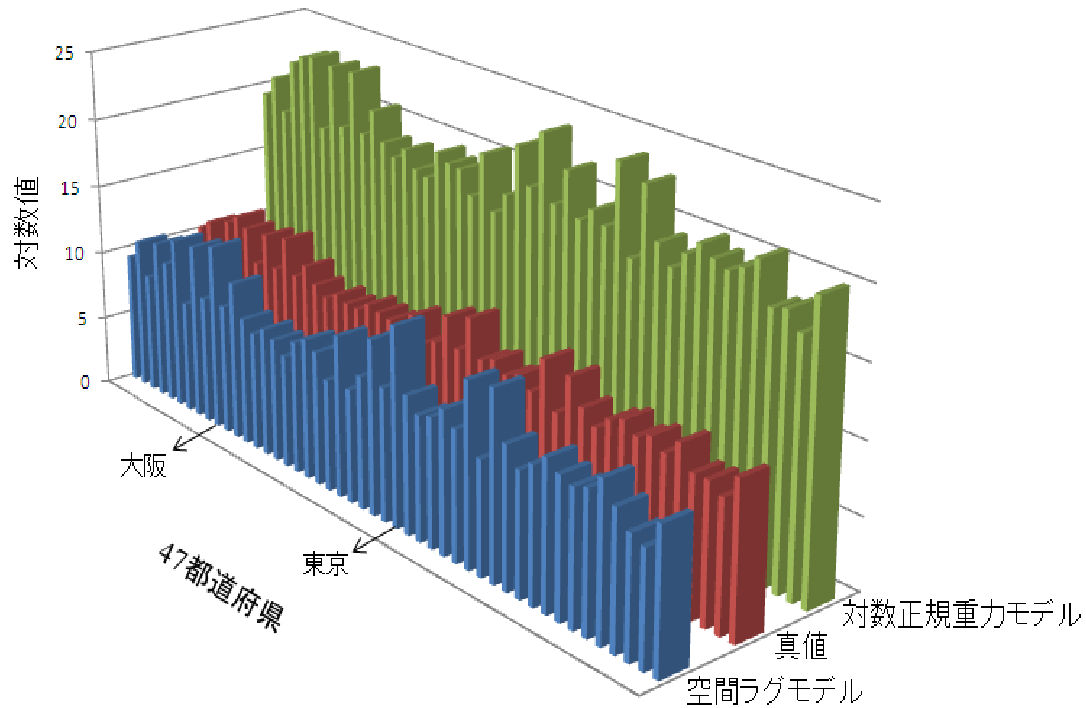
EMアルゴリズムの手順

①欠損値に初期値を与える
②擬似的な完全データのもとでパラメータの最尤推定を行う
③得られたパラメータ推定地から、欠損値の期待値を算出する
④欠損値の推定値が収束するまで②と③を繰り返す

EMアルゴリズム　推定結果

- 内々フローの推定誤差(RMSE)　$RMSE=\sqrt{\sum\{(y_i-\hat{y}_i)\}^2/n}$
  - 空間ラグモデル：**0.972**
  - 重力モデル：9.611

空間ラグモデルの推定精度が高い



真値と推定値の比較

モデルの理論的発展:その2 分布型の仮定

- 対数正規分布の仮定の統計学的問題点 (Flowerdew and Aitkin, 1982)
  1. 対数変換を行ったデータでの推定によるバイアス
  2. 誤差項の等分散 homoscedasticity の仮定
  3. フロー量がゼロの場合の問題点

離散確率分布を仮定したモデリングが望ましい

これらを克服するものとしてFlowerdew らはポアソン分布を仮定した重力モデルを提案

提案手法：負の二項分布を仮定したモデリング

- ポアソン分布の仮定：分散＝期待値
- 実際の観測データの多くは　分散＞期待値

　　過分散の問題が引き起こされる

過分散 overdispersion による影響

- 推定値は一致性を持つが、有効性を持たない
- 標準誤差にバイアスがかかり、z値が大きくなる

　⇒ 説明変数の有意性を過大に評価する

よって、期待値よりも分散が大きいとする仮定が望まれる

負の二項分布

負の二項回帰モデル

- 確率密度分布：ポアソンと誤差項（ガンマ分布）の積

$$\Pr(y_i) = \frac{\Gamma(y_i + \nu^{-1})}{y_i!\Gamma(\nu^{-1})}\left(\frac{\nu^{-1}}{\nu^{-1}+\mu_i}\right)^{\nu^{-1}}\left(\frac{\mu_i}{\nu^{-1}+\mu_i}\right)^{y_i} \qquad \nu > 0$$

$$E(y_i) = \mu_i$$

$$Var(y_i) = \mu_i(1+\nu\mu_i) = \mu_i + \nu\mu_i^2 \Longrightarrow \begin{cases} \nu \text{ 大なら分散大} \\ \nu \to 0 \text{ ならポアソン分布} \end{cases}$$

負の二項回帰モデル：$\mu_i = \exp(\sum_j \beta_j X_{ij})$

Long(1997)

提案モデル
空間負の二項自己回帰(NB-SAR)モデル

負の二項回帰モデル

$$\mu_i = \exp(\sum_j \beta_j X_{ij})$$

$$\ln \mu_i = \sum_j \beta_j X_{ij}$$

空間従属性の考慮

空間ラグ

$$\ln \mu_i = \rho \sum_j W_{ij} \ln y_i + \sum_j \beta_j X_{ij}$$

NB-SARモデル

$$\mu_i = \exp(\rho \sum_j W_{ij} \ln y_i + \sum_j \beta_j X_{ij})$$

NB-SARモデルの推定法

- 空間2段階最小2乗法 spatial two stage least squares

$$\mu_i = \exp(\underline{\rho \sum W_{ij} \ln y_j} + \sum \beta_j X_{ij})$$

内生変数の理論値を計算

1段階目: 操作変数で回帰 → 空間ラグ の理論値

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{X}, \mathbf{WX}, \mathbf{W}^2\mathbf{X}\right] \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{W}}\mathbf{y}_{\log} = \mathbf{Q}(\mathbf{Q}'\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}'\mathbf{W}\mathbf{y}_{\log}$$

2段階目: 空間ラグ の理論値を説明変数として代入

$$\mu_i = \exp(\rho \sum \widehat{W_{ij} \ln y_j} + \sum \beta_j X_{ij})$$

を反復重み付き最小二乗法で推定

Lamber *et al.* (2010)

推定結果

	対数尤度
Non-spatial	-14790.68
Spatial	-14650.56

モデルの良さ向上

分散パラメータ ν: 3.583

➡ ポアソン分布の仮定は正しくない

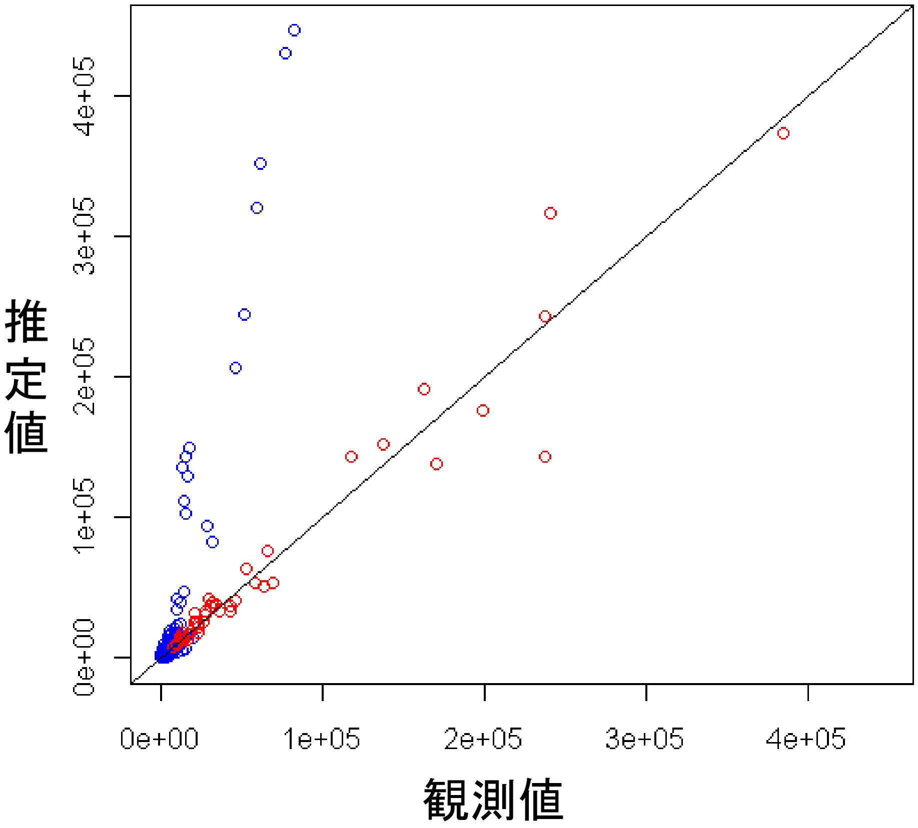
空間パラメータ: 全て1%有意

	Spatial		Non-spatial	
定数項	−9.741	***	−25.391	***
I_定数項	4.067		−8.001	*
o_人口	0.337	***	0.905	***
o_面積	0.072	**	0.204	***
o_15歳未満人口	1.254		6.839	***
o_失業者	12.181	***	34.202	***
o_第3次産業就業者	6.971	***	19.231	***
o_役員人口	−15.245	***	−33.631	***
d_人口	0.388	***	1.021	***
d_面積	0.037		0.116	***
d_15歳未満人口	3.665	*	12.750	***
d_失業者	8.377	**	26.252	***
d_第3次産業就業者	6.525	***	18.520	***
d_役員人口	−12.300	**	−25.159	***
I_人口	0.064		1.255	***
I_65歳以上人口	0.926		−1.275	
I_失業者	18.935		20.450	
距離	−0.393	***	−1.224	***
ρ_o	0.627	***		
ρ_d	0.633	***		
ρ_w	−0.593	***		

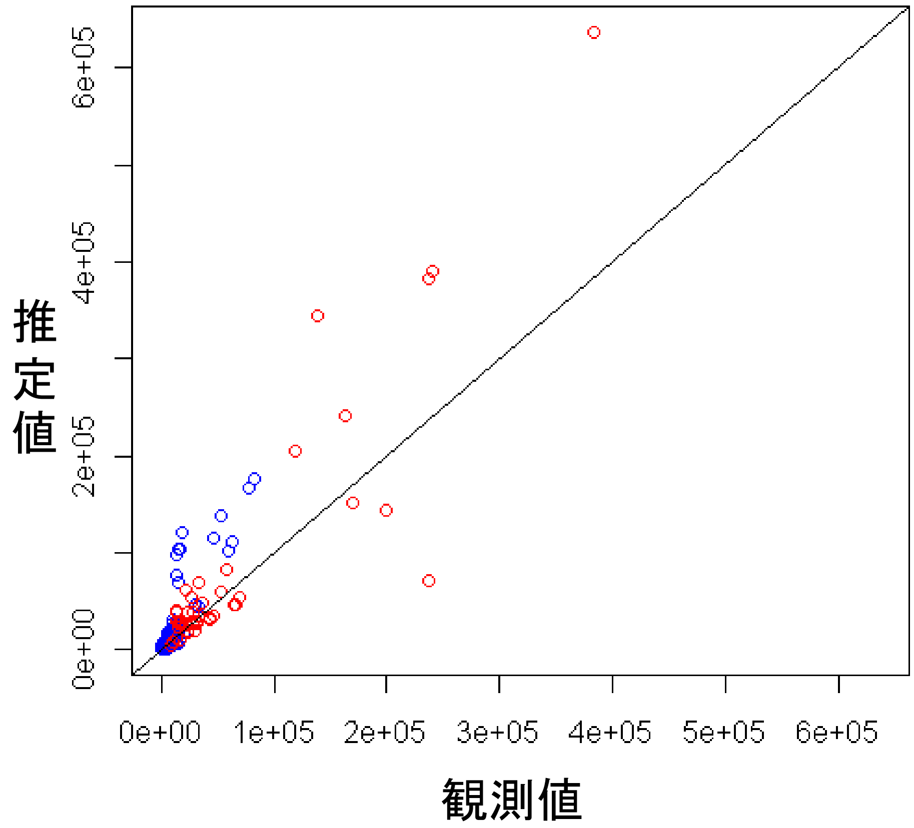
*** 1%有意
** 5%有意
* 10%有意

モデルの推定精度

Non-spatial Model



Spatial Model



	Non-spatial	Spatial
RMSE	16242.51	11292.11

モデルの全体的な精度は向上

内外 : 良　内々 : 悪

まとめと今後の課題

- 実証研究から空間ラグ重力モデルの有用性を確認
- 空間従属性を考慮した重力モデルの理論的発展
  ① 内々フローが観測されていないデータでの推定法の問題
    - EMアルゴリズムを用いた推定法の提案
  ② 対数正規分布の仮定の統計学的な問題
    - 負の二項分布を仮定したモデルの提案

- 今後の課題
  - ２重制約重力モデルへの拡張
  - EMアルゴリズム：実証データを増やす
  - 内々フローの推定精度が悪化した原因の究明

参考文献

- Anselin, L.(1988) *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Kluwer Academic Publisher
- Flowerdew, R. and Aitkin, M. (1982) “A method of fitting the gravity model based on the Poisson distribution,” *Journal of Regional Science*, 22, pp.191-202
- Kelejian, H.H. and Prucha, I.R. (1998) “A generalized spatial two-stage least squares procedure for estimating a spatial autoregressive model with autoregressive disturbances,” *Journal of Real Estate Economics*, 17(1), pp.99-121.
- Lambert, D.M., Brown, J.P. and Florax, R.J.G.M.(2010), “A two-step estimator for a spatial lag model of counts: Theory, small sample performance and an application”, *Regional Science and Urban economics*, Vol. 40, No. 4, pp. 241-252
- LeSage, J.P. and Pace, R.K.(2008) “Spatial Econometric Modeling of Origin-Destination Flows”, *Journal of Regional Science*, Vol. 48, No. 5, pp. 941-967
- Long, J. S. (1997) “Count Outcomes: Regression Models for Counts” in *Regression models for categorical and limited dependent variables*, pp. 217-250
- Tsutsumi, M. and Tamesue, K. (2011) “Intraregional flow problem in spatial econometric model for origin-destination flows” (STGIS投稿中)
- 石川義孝(1988)『空間的相互作用モデル』地人書房
- 岩崎学(2010) 『カウントデータの統計解析』朝倉書店, pp. 155-167

APPENDIX

3次空間ラグ重力モデル推定コード

（Y: OD行列　x: 説明変数行列　W: $n \times n$ の空間重み行列）

```
y <- log(as.vector(Y))
i <- diag(47)
Wo <- kronecker(W, i); Wd <- kronecker(i, W); Ww <- kronecker(W, W)
woy <- Wo%*%y; wdy <- Wd%*%y; wwy <- Ww%*%y

lm.null <- lm(y ~ x); lm.w1 <- lm.fit(x, woy); lm.w2 <- lm.fit(x, wdy); lm.w3 <- lm.fit(x, wwy)
e.null <- lm.null$residuals; e.w1 <- lm.w1$residuals; e.w2 <- lm.w2$residuals; e.w3 <- lm.w3$residuals

I <- diag(2209)
MLf <- function(rho) {
        rho1 <- rho[1]
        rho2 <- rho[2]
        rho3 <- rho[3]
        SSE <- t(e.null - rho1*e.w1 - rho2*e.w2- rho3*e.w3) %*% (e.null - rho1*e.w1 - rho2*e.w2 - rho3*e.w3)
        n <- 2209
        s2 <- SSE/n
        ldet <- log(det(I - rho1*o_w - rho2*d_w - rho3*w_w))
        ret <- (ldet - ((n/2)*log(2*pi)) - (n/2)*log(s2) - (1/(2*s2))*SSE)
        ret
}

opt <- optim(c(0,0,0), MLf, control=list(fnscale=-1))
rho1 <- opt$par[1]; rho2 <- opt$par[2]; rho3 <- opt$par[3]

lm.lag <- lm((y - rho1*woy - rho2*wdy - rho3*wwy) ~ x)
r <- residuals(lm.lag)
fit <- y - r
coef.rho <- coefficients(lm.lag)
SSE <- deviance(lm.lag)
s2 <- SSE/n
```

空間ラグモデルの最尤推定

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$$

対数尤度関数

$$\ln L = -\frac{n}{2}\left[\ln(2\pi) + \ln \sigma^2\right] + \ln\left|\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}\right| - \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

$\boldsymbol{\beta}$ の最尤推定量

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} - \hat{\rho}_{ML}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b}_{\mathbf{o}} + \mathbf{u} \qquad \mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b}_{L} + \mathbf{u}$ のOLS推定量

$$\longrightarrow \quad \hat{\mathbf{b}}_{o} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{y} \qquad \hat{\mathbf{b}}_{L} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{W}\mathbf{y}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} = \hat{\mathbf{b}}_{o} - \hat{\rho}_{ML}\hat{\mathbf{b}}_{L}$$

Anselin(1988),p.181

空間ラグモデルの最尤推定(2)

撹乱項の分散の最尤推定量

$$\hat{\sigma}^2 = \mathbf{e}'_{ML}\mathbf{e}_{ML} / n \qquad \mathbf{e}_{ML} = \mathbf{y} - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{Wy} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$$

$\mathbf{y} = \mathbf{Xb}_o + \mathbf{u} \qquad \mathbf{Wy} = \mathbf{Xb}_L + \mathbf{u}$ のOLS残差

$$\Rightarrow \mathbf{e}_o = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}}_o \qquad \mathbf{e}_L = \mathbf{Wy} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}}_L$$

$$\mathbf{e}_{ML} = \mathbf{y} - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{Wy} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} = \underline{\mathbf{e}_o - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{e}_L}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (1/n)(\mathbf{e}_o - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{e}_L)'(\mathbf{e}_o - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{e}_L)$$

集中化対数尤度関数

$$\boxed{\ln L_C = c - \frac{n}{2}\ln\left[\frac{(\mathbf{e}_o - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{e}_L)'(\mathbf{e}_o - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{e}_L)}{n}\right] + \ln\left|\mathbf{I} - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{W}\right|}$$

空間ラグモデル(ρ:1)における最尤推定の手順

① $\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b}_o + \mathbf{u}$　$\mathbf{W}\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{b}_L + \mathbf{u}$　をOLSで推定

⇒ $\hat{\mathbf{b}}_o$　$\hat{\mathbf{b}}_L$　と　$\mathbf{e}_o$　$\mathbf{e}_L$　を求める

② $$\ln L_C = c - \frac{n}{2}\ln\left[\frac{(\mathbf{e}_o - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{e}_L)'(\mathbf{e}_o - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{e}_L)}{n}\right] + \ln\left|\mathbf{I} - \hat{\rho}_{ML}\mathbf{W}\right|$$

に代入　⇒ $\ln L_C$ が最大になるような $\hat{\rho}_{ML}$ を求める

③ $\hat{\rho}_{ML}$ を利用して　$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} = \hat{\mathbf{b}}_o - \hat{\rho}_{ML}\hat{\mathbf{b}}_L$　を求める

④ $\hat{\rho}_{ML}$ を利用して　$\hat{\sigma}^2$　を求める

Anselin(1988),p.182

空間ラグモデル(ρ:2)における最尤推定の手順

① $\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{b}_o+\mathbf{u}$　$\mathbf{W}_o\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{b}_{L1}+\mathbf{u}$　$\mathbf{W}_d\mathbf{y}=\mathbf{X}\mathbf{b}_{L2}+\mathbf{u}$　をOLSで推定

⇒ $\hat{\mathbf{b}}_o$ $\hat{\mathbf{b}}_{L1}$ $\hat{\mathbf{b}}_{L2}$ と $\mathbf{e}_o$ $\mathbf{e}_{L1}$ $\mathbf{e}_{L2}$ を求める

② $$\ln L_C=c-\frac{n}{2}\ln\left[\frac{(\mathbf{e}_o-\hat{\rho}_{ML1}\mathbf{e}_{L1}-\hat{\rho}_{ML2}\mathbf{e}_{L2})'(\mathbf{e}_o-\hat{\rho}_{ML1}\mathbf{e}_{L1}-\hat{\rho}_{ML2}\mathbf{e}_{L2})}{n}\right]$$
$$+\ln\left|\mathbf{I}-\hat{\rho}_{ML1}\mathbf{W}_o-\hat{\rho}_{ML2}\mathbf{W}_d\right|$$
に代入 ⇒ $\hat{\rho}_{ML1},\hat{\rho}_{ML2}$ について最大化

③ $\hat{\rho}_{ML1},\hat{\rho}_{ML2}$ を利用して　$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}=\hat{\mathbf{b}}_o-\hat{\rho}_{ML1}\hat{\mathbf{b}}_{L1}-\hat{\rho}_{ML2}\hat{\mathbf{b}}_{L2}$　を求める

④ $\hat{\rho}_{ML1},\hat{\rho}_{ML2}$ を利用して　$\hat{\sigma}^2$　を求める

（ρ が3つの場合も同様にして推定が可能）

空間ラグモデルの対数尤度

$$\ln L = \ln|A| - \frac{n}{2}\left[\ln(2\pi) + \ln\sigma^2\right] - \frac{1}{2\sigma^2}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\ln|\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}|$$

$$\mathbf{e}_0 - \rho\mathbf{e}_L$$

SLM(2)

$$\ln|\mathbf{I} - \rho_o\mathbf{W}_o - \rho_d\mathbf{W}_d|$$

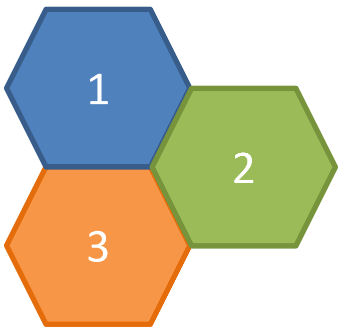
$$\mathbf{e}_0 - \rho_1\mathbf{e}_{L1} - \rho_2\mathbf{e}_{L2}$$

SLM(3)

$$\ln|\mathbf{I} - \rho_o\mathbf{W}_o - \rho_d\mathbf{W}_d - \rho_w\mathbf{W}_w|$$

$$\mathbf{e}_0 - \rho_1\mathbf{e}_{L1} - \rho_2\mathbf{e}_{L2} - \rho_3\mathbf{e}_{L3}$$

内々未観測データでの対処法
なぜ内々＝0はダメなのか

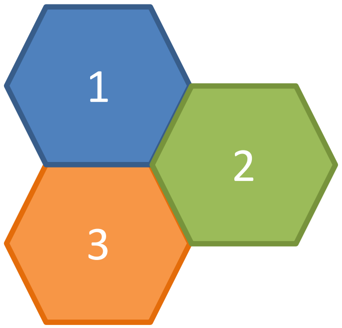


$$
\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =
\begin{array}{c} \\ \\ 1\to2 \\ 1\to3 \\ 2\to1 \\ \\ 2\to3 \\ 3\to1 \\ 3\to2 \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1\to1 & & & & 2\to2 & & & & 3\to3 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$\mathbf{Wy}$ は $\mathbf{W}$ で定義された周辺フローの平均

内々フロー＝ゼロと仮定してしまうと
正しく周辺フローの特徴が反映されない

内々未観測データでの対処法
なぜ内々除去はダメなのか



$$
\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} 1\to1 & & & & 2\to2 & & & & 3\to3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1\to1 \\ \\ \\ \\ 2\to2 \\ \\ \\ \\ 3\to3 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$\mathbf{W}$では内々も近接性の定義に含まれている

内々除去する ⇒ $n^2 \times n^2$の$\mathbf{W}$を再設定しなければならない