

オプションアプローチを用いたデフォルト 確率推定

-ヨーロッパ型、ノックアウト型の比較-

1

法政大学大学院

理工学研究科システム工学専攻

茶木直人

導入

- 銀行が融資した企業がデフォルトした場合、借入残高を満額回収できず損失を背負うことになる場合がある。
- 銀行はそうした損失が発生することを防ぐため、借り手企業の信用リスクを計量化する必要がある。
- 信用リスクを計量化する手段の一つにデフォルト確率推定がある。
- 統計的にデフォルト確率を推定する方法もあるが、この発表では確率微分方程式を用いたデフォルト確率推定をする。

オプションについて

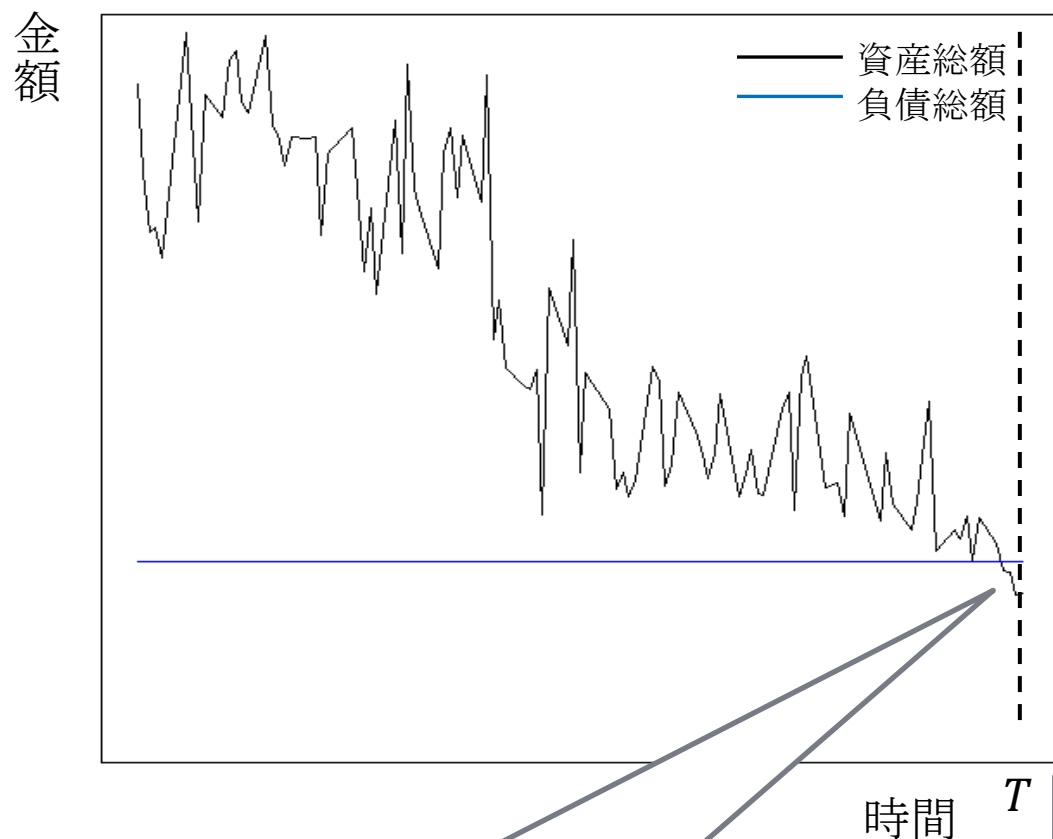
- オプションとは満期日に原資産を行使価格で売買する権利のことである。
- 買う権利であるコールオプションと、売る権利であるプットオプションがある。
- ヨーロッパ型オプションはオプションを満期日にのみ行使できるものである。
- ノックアウトオプションとは、原資産の価格が、オプションの期間中に一度でも特定の価格に到達すると権利が消滅するオプションのこと。権利行使は満期日のみとする。
- このオプションの考え方をを用いてデフォルト確率を定式化する。

倒産について

- 倒産については2つの考え方をを用いる。
- 1つ目の倒産の考え方は、次のスライドの図1のように、満期時点で資産総額が負債総額を下回っているとき倒産とする。満期時点でのみを考えるため、図2のように期間中に資産総額が負債を下回っても倒産にはならない。
- 2つ目の倒産の考え方は、図1、図2のように、現在時点から負債満期時点までに資産総額が負債総額を下回ることがあればその時点で倒産とする。

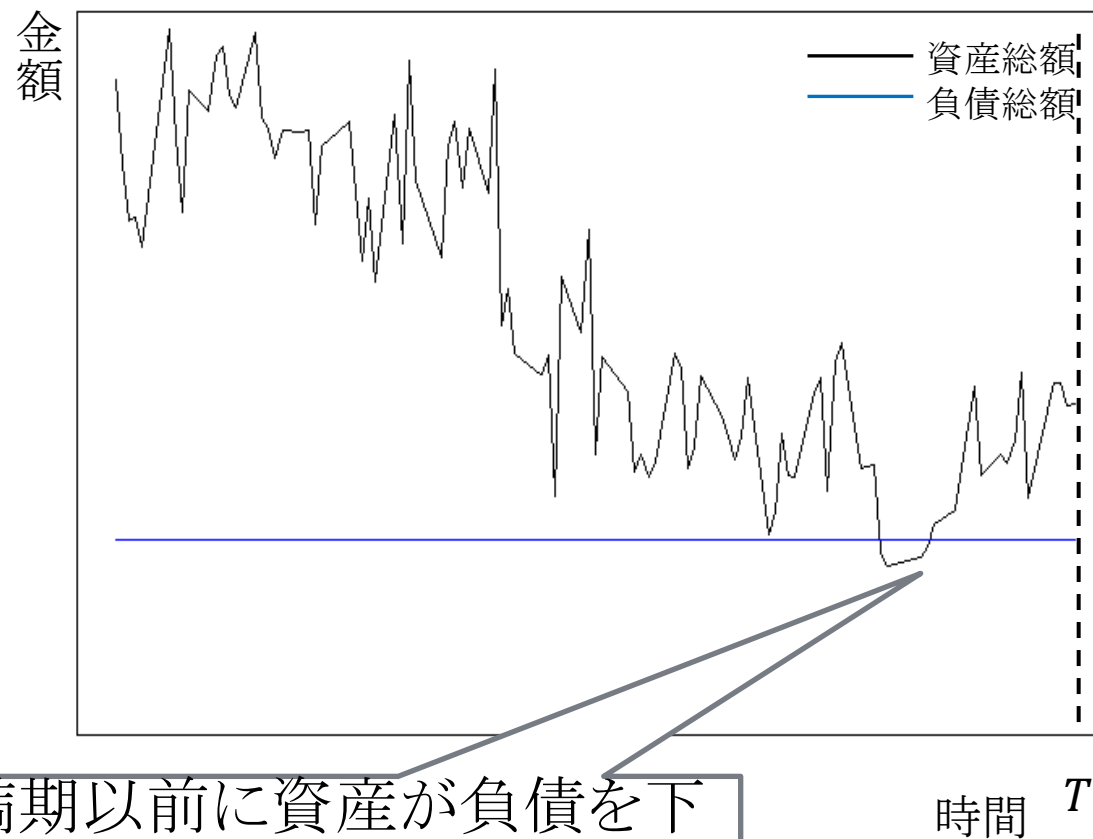
倒産について

図1



満期時 T に資産が負債を下回っている

図2



満期以前に資産が負債を下回るが、満期時では資産のほうが上回っている

資産価値の確率過程

- 倒産を考えるにあたり、資産価値がどのような確率過程となるか考える。
- 資産価値が次のような式に従うとする。

$$dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dB(t)$$

μ_A : 資産の成長率

σ_A : リスクの程度を表すボラティリティ

$B(t)$: 平均0、分散 t の正規分布に従うブラウン運動

- この式は時間変化に対して資産価値がどのように変化するかを表す。
- 上の式から資産価値 A_t は次のように求められる。

$$A_t = A_0 \exp \left\{ \left(\mu_A - \frac{1}{2} \sigma_A^2 \right) t + \sigma_A B(t) \right\}$$

ヨーロッパ型オプションを用いたデフォルト確率

- ヨーロッパ型オプションを用いたデフォルト確率推定はMerton[1974]の論文で知られている。
- この方法でデフォルト確率を求める際、スライド4の1つ目の倒産の考え方を用いる。
- ヨーロッパ型オプションを用いたデフォルト確率は

$$PDT = P(A_T < D_T | A_0) = 1 - F \left(\frac{\log \frac{A_0}{D_T} + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

ロックアウト型オプションを用いたデフォルト確率

- この方法でデフォルト確率を求める際、スライド4の2つ目の倒産の考え方をを用いる。
- [3]より、時点0に A_0 から出発した A_t が、一度も D_t に到達せず、満期時点 T で D_T よりも大きい値をとる確率、つまり、 $0 \leq t \leq T$ の範囲で資産価値が負債を下回らない確率は次のように表せる

$$P(A_t > D_t (0 \leq t \leq T) | A_0)$$

- よって、倒産確率は

$$PDT = 1 - P(A_t > D_t (0 \leq t \leq T) | A_0)$$

$$= 1 - F\left(\frac{\log \frac{A_0}{D_T} + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right) + \left(\frac{A_0}{D_T}\right)^{1 - \frac{2\mu_A}{\sigma_A^2}} F\left(-\frac{\log \frac{A_0}{D_T} - \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}}\right)$$

デフォルト確率の比較

- ヨーロッパ型オプションを用いたデフォルト確率

$$PDT = 1 - F\left(\frac{\log\frac{A_0}{D_T} + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)$$

- ノックアウト型オプションを用いたデフォルト確率は

$$PDT = 1 - F\left(\frac{\log\frac{A_0}{D_T} + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) + \underbrace{\left(\frac{A_0}{D_T}\right)^{1 - \frac{2\mu_A}{\sigma_A^2}} F\left(-\frac{\log\frac{A_0}{D_T} - \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)}$$

- 2つの確率の違いはノックアウト型のデフォルト確率の3項目である。
- ノックアウト型の3項目は常に正であるためデフォルト確率はノックアウト型のほうが高くなる。

デフォルト確率推計のパラメータ推計

- デフォルト確率の推定をするために必要なパラメータは
 - 1) 現在の資産の市場価値: A_t
 - 2) 将来の負債価値総額: D_T
 - 3) 資産の期待成長率: μ_A
 - 4) 資産価値変化率のボラティリティ: σ_A
 - 5) 負債満期: T

デフォルト確率推計のパラメータ推計

- 負債満期は1年後を想定し、 $T = 1$ とする。
- $T = 1$ 年後という短い期間を想定しているので現在時点 t から1年での負債簿価は大きく変化することはないと仮定して、 D_T は現在観測できる D_t と等しいものとする。
- 残る3つのパラメータは市場で観察できる企業の株価から推計する必要がある。

デフォルト確率推計のパラメータ推計

- A_t は負債総額と株式時価総額 E_t の和とする。 E_t は発行済み株式数と株式時価総額の積で求める。

$$A_t = D_t + E_t$$

- 資産の期待成長率 μ_A は株式の期待成長率 $\mu_{E,t}$ と負債成長率 $\mu_{D,t}$ を、自己資本比率と負債の比率で加重平均したものとする。

$$\mu_{A,t} = \left(\frac{E_t}{A_t}\right)\mu_{E,t} + \left(1 - \frac{E_t}{A_t}\right)\mu_{D,t}$$

- 資産成長率のボラティリティ σ_A は μ_A と同様の考え方を用いて求める。

$$\sigma_{A,t} = \left(\frac{E_t}{A_t}\right)\sigma_{E,t}$$

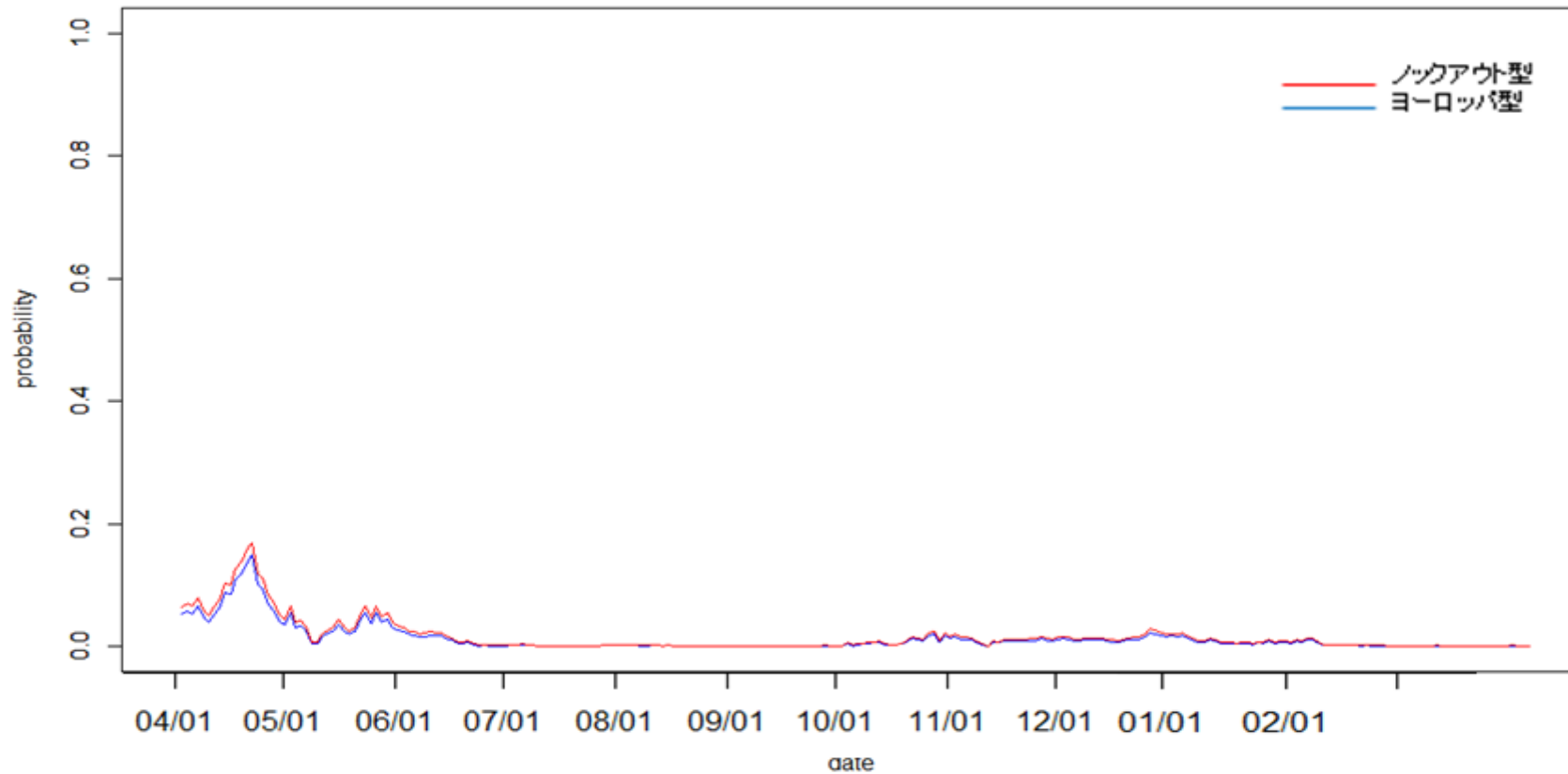
- $\mu_{E,t}$ 、 $\sigma_{E,t}$ は株価の時系列データから求め、 $\mu_{D,t}$ は、企業の負債総額と支払利息から推定する。

信用格付けに対するデフォルト確率

- 各パラメータを求め実際にデフォルト確率推定を行う。
- 株式投資情報センターR&Iによる信用格付けが**BBB**の中から、発行株数の変化の推移を確認できた企業**104**社に対してデフォルト確率推定を行った。
- 株式投資情報センターR&Iによる格付けが**BBB**の企業がある年の4月1日から翌年の4月1日にデフォルトする確率は**0.2%**であるとしている。
- **2014年4月1日から2015年4月1日の1年間のデフォルト確率**を求め、各日の平均をとる。

信用格付けに対するデフォルト確率

図3



信用格付けBBBである企業104社のデフォルト確率の各日の平均

信用格付けに対するデフォルト確率

- 図11より、2014年4月1日に消費税の増税が、株価に影響したために2014年4月から2015年7月にかけてデフォルト確率が高くなったものと考えられる。
- 増税の影響を受けている期間以外だとR&Iの掲げるBBBの企業がある年の4月1日から翌年の4月1日にデフォルトする確率は0.2%より、ヨーロッパ型、ノックアウト型で求めたデフォルト確率の平均値のほうが低くなっていることが確認できる。
- 次に個別の企業に対してのデフォルト確率の比較、デフォルト確率とパラメータの関係について検証する。

実データを用いたデフォルト確率推定

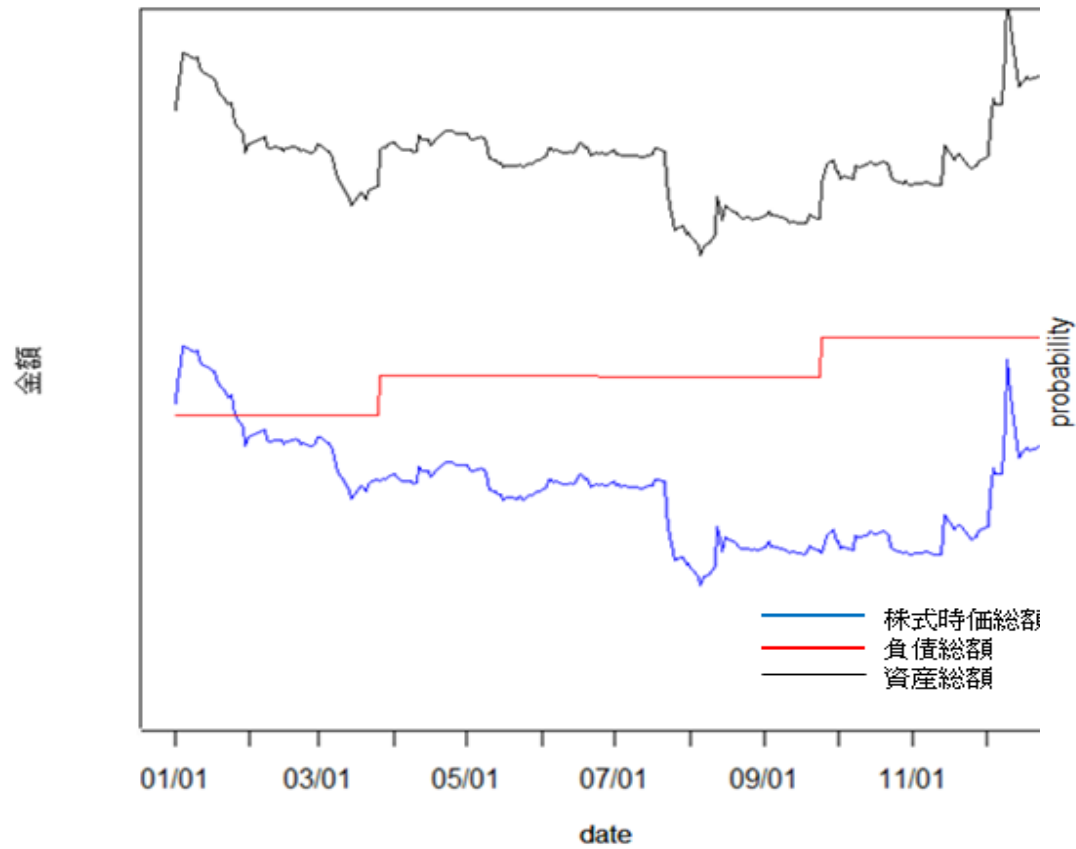
- 日本のとある企業に対して2013年9月30日から2014年12月30日の株価、負債データを用い、デフォルト確率推定を行った。
- 平均をとる際のデータは、デフォルト確率推定をする日までの直近の60日の日次収益率を用いたので2014年1月6日から2014年12月30日のデフォルト確率を推定した。
- 企業の各データは日経NEEDS-FinancialQUESTより得る。

※個別の企業名は、企業の信用にかかわることなので控えます。

実データを用いたデフォルト確率推定

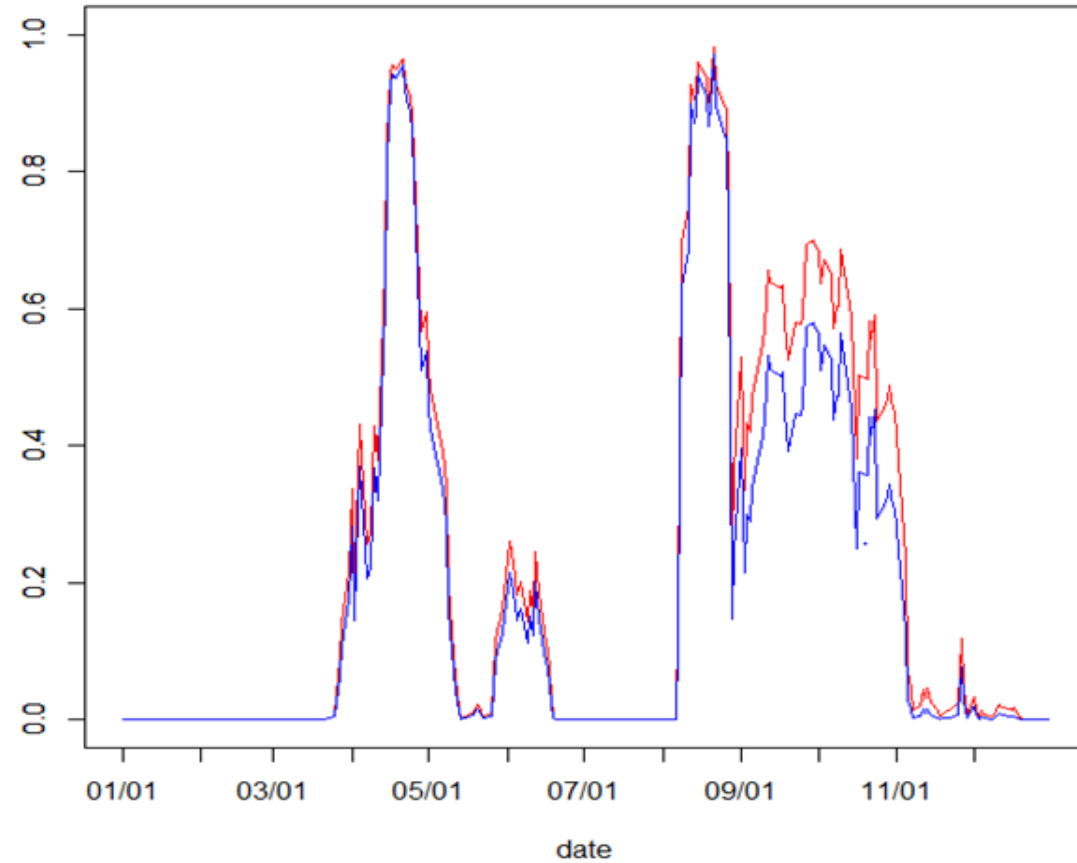
財務状況

図4



デフォルト確率

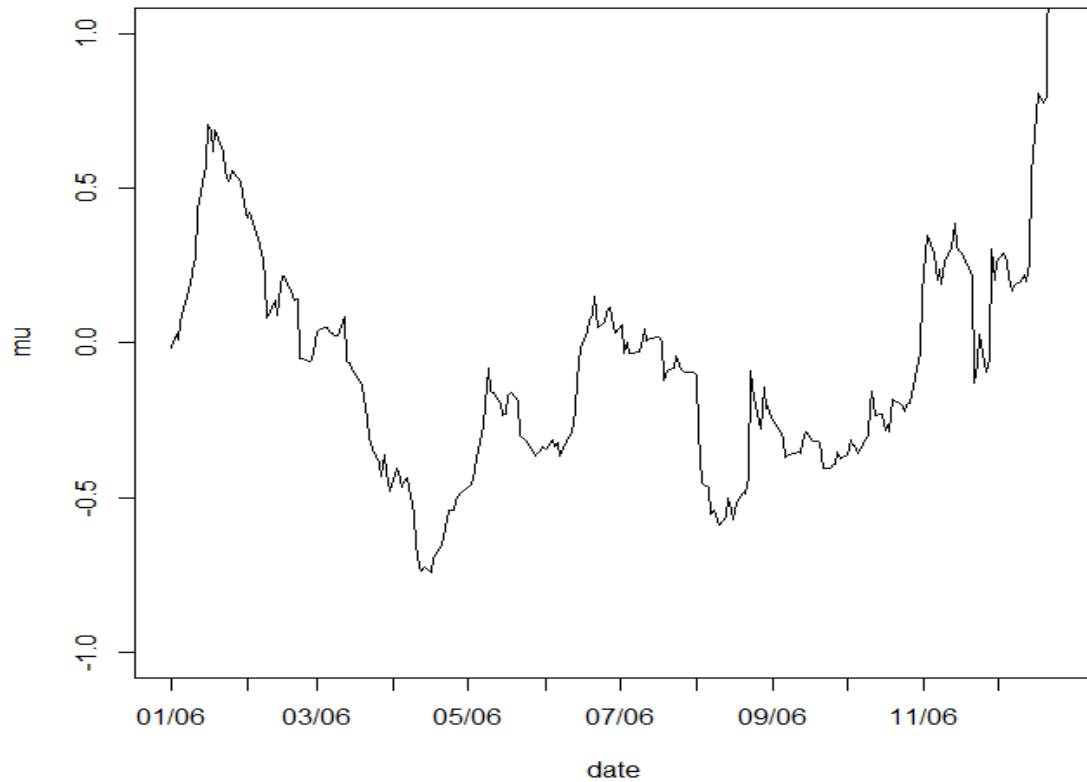
図5



実データを用いたデフォルト確率推定

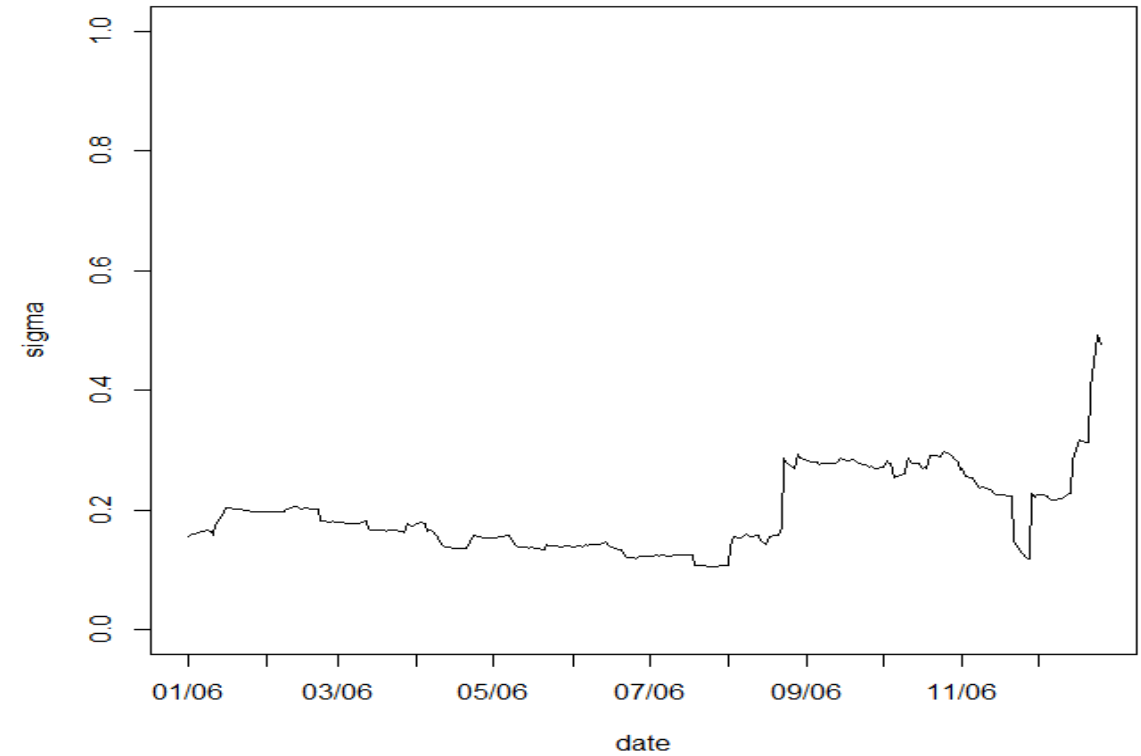
資産の期待成長率

図6



ボラティリティ

図7



実データを用いたデフォルト確率推定

- 図5より、デフォルト確率は数式を比較したことから分かる通りにノックアウト型の方が高くなることがグラフより確認できる。
- 図5、6より、デフォルト確率は期待成長率 μ が負となる際に高くなることが確認できる。
- 図5より、3月中旬から6月中旬の両デフォルト確率に大きな違いはないが、8月末から10月末の間の確率の差は大きくなっている。この差については次のスライドより検証する。

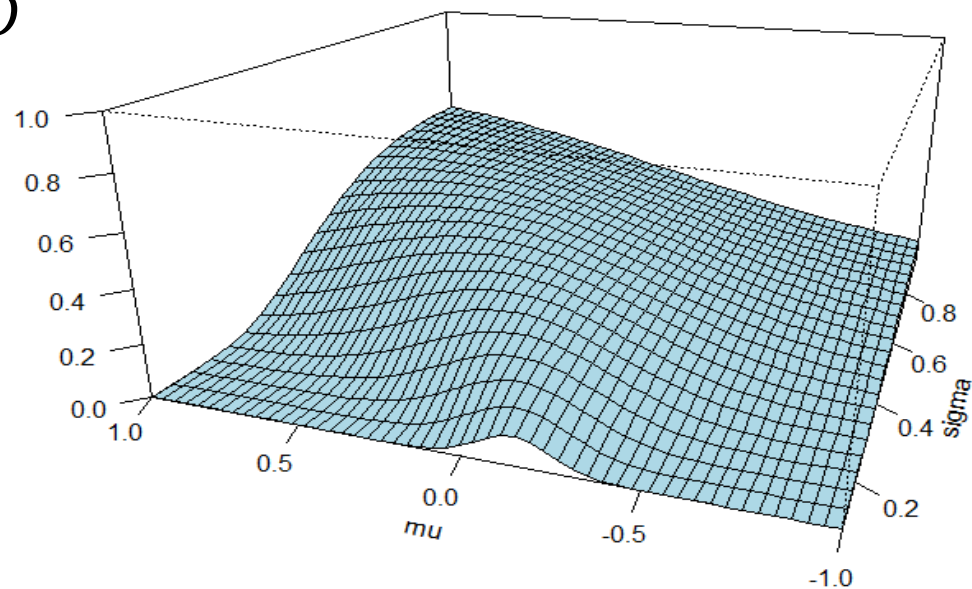
デフォルト確率の差について

- 2つのデフォルト確率に差が出るのは、スライド9よりロックアウト型のデフォルト確率の3項目の差の影響であることがわかる。
- ロックアウト型の3項目の変化を、3次元のグラフを用いて μ 、 σ の変化が3項目にどのような影響を与えるかを確認する。
- 資産における負債の割合が高い場合と低い倍位で比較するために、 $\frac{A}{D} = 1.2$ 、 1.6 の2パターンに対してグラフを作る。
- μ 、 σ の変化はそれぞれ $-1 \leq \mu \leq 1$ 、 $0.1 \leq \sigma \leq 1$ とする。

デフォルト確率の差について

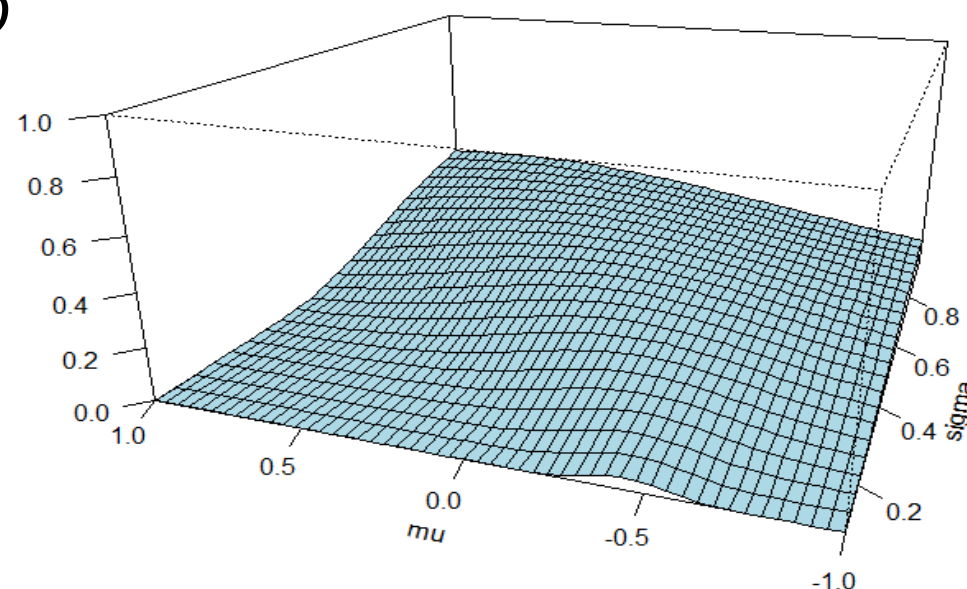
$$\frac{A}{D} = 1.2$$

図8



$$\frac{A}{D} = 1.6$$

図9



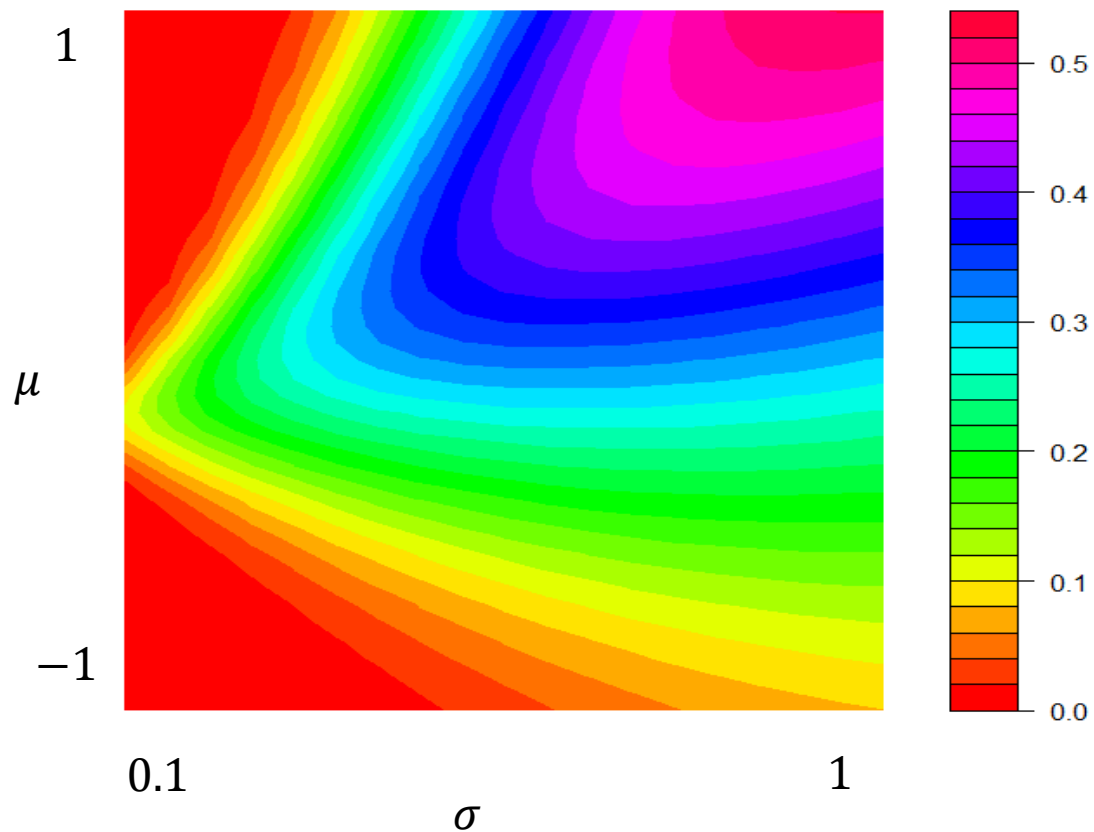
$$\left(\frac{A_0}{D_T}\right)^{1 - \frac{2\mu_A}{\sigma_A^2}} F\left(-\frac{\log\frac{A_0}{D_T} - \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right) \text{ の変化}$$

縦軸をノックアウト型の3項目の値とする。

デフォルト確率の差について

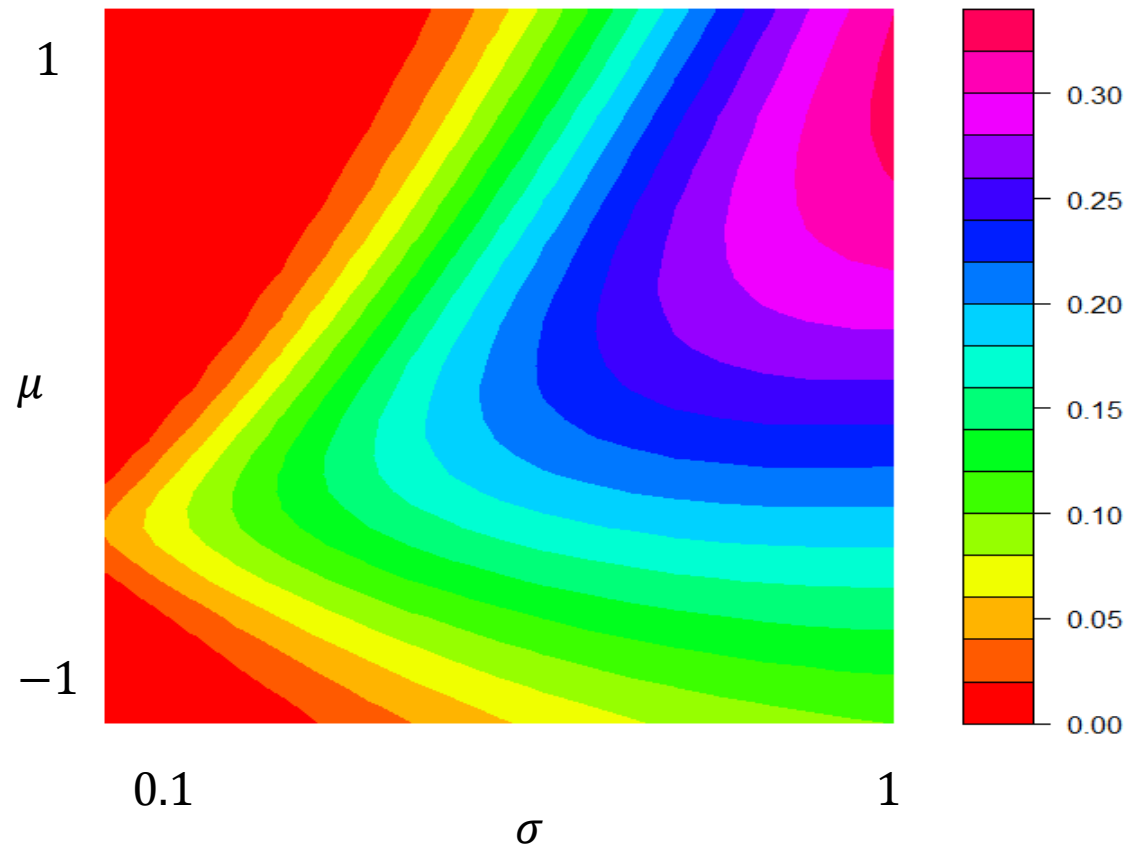
$$\frac{A}{D} = 1.2$$

図10



$$\frac{A}{D} = 1.6$$

図11



3次元のグラフの変化を等高線で確認する。



デフォルト確率の差について

- 図8、9より、 $\frac{A}{D}$ が小さいとき、デフォルト確率の差が大きくなりやすいことがわかる。これは、資産に対する負債の割合が高く、ノックアウト型でデフォルトを考えると、資産価値が負債総額を下回るか否かを考える期間が長いいためヨーロッパ型デフォルト確率との差が大きくなりやすいからである。

デフォルト確率の差について

- 図10、11より、 μ が正の値をとり、 $0.1 \leq \sigma \leq 0.3$ の時は資産の期待成長率が正のトレンドを持ち、両デフォルト確率がともに0に近くなるため差は小さくなる。
- 図10、11より、 μ がどのような値でも σ を大きくするとロックアウト型の3項目が大きくなることがわかる。これは満期時点までに1度でも資産価値が負債総額を下回る確率が σ が大きいと高くなるため、ヨーロッパ型との差が生じやすくなっている。

まとめ

- デフォルト確率はヨーロッパ型、ノックアウト型共に期待成長率が負となる際に高くなることが確認できた。
- オプションアプローチを用いたデフォルト確率はR&Iが出すデフォルト確率より高くなる。
- ヨーロッパ型、ノックアウト型デフォルト確率の差は、
 1. 資産における負債の割合が高いほど大きくなる。
 2. どのようになに μ 対しても σ の値が増加していくにつれて、デフォルト確率の差も大きくなる。ということが確認できた。

まとめ

- 満期時点のみでデフォルトしたかどうかを判断するヨーロッパ型オプションを用いたデフォルト確率は、モデルとしては簡単なものであり、デフォルトの考え方があまり現実的ではない。満期時点のみでデフォルトしたかどうかを判断するため満期以外ではいくら財務状況が悪化しようがデフォルトとはならないためである。
- ノックアウト型オプションを用いたデフォルト確率は、現時点から満期時点までに資産価値が1度でも負債を下回った場合にデフォルトとしているため、ヨーロッパ型オプションを用いた時よりも、現実的な考え方だといえる。

参考

- [1] 株式投資情報センターR&I <https://www.r-i.co.jp/jpn/>
- [2] 日経NEEDS-FinancialQUEST
- [3] 安藤啓・丸茂幸平「ノックアウト・オプション・アプローチを用いたデフォルト確率の推定方法-ヨーロッパ・オプション・アプローチとの比較分析-」
- [4] 森平爽一郎「信用リスクモデリング-測定と管理-」