最適住宅選択のための混合整数計画モデル

成蹊大学

井上可菜
ブルノ フィゲラ ロウレンソ
呉偉
井上智夫
池上敦子

Li-Yao のモデル

経済学では, 住宅価格の変動が生涯効用に及ぼす影響を分析するために,
Li-Yao のモデルがある

「The Life-Cycle Effects of House Price Changes」(Li-Yao の論文)

- 効用関数という関数を用いて, 生涯の満足度を表している
- 住宅規模, 消費, 世帯規模の大きさで効用関数を表す
- 目的関数である効用関数以外は文章で与えられており, 最適化問題として定式化されていない

$$\sum_{t \in T} \beta^t U(C_t, H_t, N_t) = \sum_{t \in T} \beta^t N_t \frac{\left[\left(\frac{C_t}{N_t} \right)^{1-\omega} \left(\frac{H_t}{N_t} \right)^{\omega} \right]^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

H_t : t 期の住宅規模
C_t : t 期の消費
β : 割引因子
ω : 消費財のうち住宅サービスの割合
γ : 効用関数の曲率

W. Li, R. Yao, The life-cycle effects of house price changes. Journal of Money, Credit and Banking, **39**, 1375–1409, 2007.

住宅選択における選択肢

Li-Yao のモデルでは, 各期において以下の選択肢がある

1. 借家 → 借家
2. 借家 → 同じ借家
3. 持ち家 → 借家 (ローンは全額返済する)
4. 借家 → 持ち家
5. 持ち家 → 持ち家 (ローンは全額返済し, 新たにローンを組む)
6. 持ち家 → 同じ持ち家

目的

本研究の目的

経済学の住宅選択における分析に, 最適化を利用できるようにすること

本発表の目的は,
Li-Yao のモデルを最適化モデルとして表現すること

- Li-Yao のモデルを定式化した
- 定式化を利用した実験を行うことで,
そのモデルを正しく表現できているかを確認する
- モデルに足りない要素があれば, 改善点として明確にする

使用する意思決定変数

$T = \{1, ..., t_{max}\}$ を期の集合, J を住宅規模の集合とする

- x_{tj} : t 期首に住宅規模 j の家を買うか否か (買う:1, 買わない:0)
- y_{tj} : t 期首に住宅規模 j の家を新たに借りるか否か
  (借りる:1, 借りない:0)
- z_{tj} : t 期首に住宅規模 j の家を売るか否か (売る:1, 売らない:0)
- c_t : t 期首の消費
- s_t : t 期末の貯金

x_{tj} と y_{tj} の関係

- $\sum_{j \in J} x_{tj} + \sum_{j \in J} y_{tj} \leq 1 \qquad t \in T$

使用する変数

- u_{tj} ： t 期首に住宅規模 j の家を持っている状態
  (持っている:1, 持っていない:0)
- v_{tj} ： t 期首に住宅規模 j の家を借りている状態
  (借りている:1, 借りていない:0)
- m_t ： t 期首に残っているローン

u_{tj} と v_{tj} の関係

$$\sum_{j\in J} u_{tj} + \sum_{j\in J} v_{tj} = 1 \qquad t \in T$$

使用する定数

- g_t：t 期首に得る収入
- h_j：住宅規模 j の家の価格
- r：預金金利
- r'：借入金利
- π：住宅価値に対する家賃の比率
- u_{0j}：$t = 0$ 期首に住宅規模 j の家を持っているか否かを表す定数
- v_{0j}：$t = 0$ 期首に住宅規模 j の家を借りているか否かを表す定数

初期状態

$\sum_{j \in J} u_{0j} + \sum_{j \in J} v_{0j} = 1$

定式化

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & \sum_{t \in T} \beta^t U \left(c_t, \sum_{j \in J} h_j \left(u_{tj} + v_{uj} \right) \right) && && (1) \\
\text{subject to} \quad & (1+r)s_{t-1} + g_t - c_t - s_t - (1+r')m_{t-1} + m_t \\
& \quad - \pi \sum_{j \in J} h_j v_{tj} - \sum_{j \in J} h_j x_{tj} + \sum_{j \in J} h_j z_{tj} = 0 && t \in T && (2) \\
& m_t \leq \sum_{j \in J} h_j u_{tj} && t \in T && (3) \\
& z_{tj} \leq u_{(t-1)j} && t \in T, j \in J && (4) \\
& z_{tj} \geq u_{(t-1)j} + \sum_{j' \in J} x_{tj'} + \sum_{j' \in J} y_{tj'} - 1 && t \in T, j \in J && (5) \\
& z_{tj} \leq \sum_{j' \in J} x_{tj'} + \sum_{j' \in J} y_{tj'} && t \in T, j \in J && (6) \\
& \sum_{j \in J} x_{tj} + \sum_{j \in J} y_{tj} \leq 1 && t \in T && (7)
\end{aligned}
$$

定式化

$$u_{tj} \geq x_{tj} \qquad t \in T, j \in J \tag{8}$$

$$u_{tj} \geq u_{(t-1)j} - \sum_{j' \in J} y_{tj'} - \sum_{j' \in J} x_{tj'} \qquad t \in T, j \in J \tag{9}$$

$$v_{tj} \geq y_{tj} \qquad t \in T, j \in J \tag{10}$$

$$v_{tj} \geq v_{(t-1)j} - \sum_{j' \in J} x_{tj'} - \sum_{j' \in J} y_{tj'} \qquad t \in T, j \in J \tag{11}$$

$$\sum_{j \in J} u_{tj} + \sum_{j \in J} v_{tj} = 1 \qquad t \in T \tag{12}$$

$$m_{t_{max}} = 0 \tag{13}$$

$$c_t, s_t, m_t \geq 0 \qquad t \in T \tag{14}$$

$$x_{tj}, y_{tj}, u_{tj}, v_{tj}, z_{tj} \in \{0, 1\} \qquad t \in T, j \in J \tag{15}$$

近似式

$$\sum_{t\in T}\beta^t U(C_t, H_t, N_t) = \sum_{t\in T}\beta^t N_t \frac{\left[\left(\frac{C_t}{N_t}\right)^{1-\omega}\left(\frac{H_t}{N_t}\right)^{\omega}\right]^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

もとの効用関数と近似した式が与える値の差が最小になるように，各期 $t \in T$ に対し，消費 $1 \sim 10$ と住宅規模 $1 \sim 10$ を対象に近似した 2 つの式を，目的関数として最小化し比較している

1. 1 次近似
2. 2 次近似

近似式の尺度

どちらの近似式が良いかを示すには, 2 つの尺度がある

1. もとの効用関数と近似式の値がどれくらい近いか
2. 近似式で求めた解をもとの効用関数に代入し, もとの効用関数の値をどれだけ最小化できるか

状況を固定して目的関数の値を比べると,

尺度 1 を用いた場合, 2 次近似した式

尺度 2 を用いた場合, 1 次近似した式

のほうが良い結果となった

今回は, 1 次近似した式を用いて行なった実験結果を載せる

実験説明

実験環境

ソルバー：Numerical Optimizer(18.1.0)

実験説明

この実験では，初期設定による結果の比較を行う

使用するデータ

期間	$\lvert T \rvert$	10
住宅規模の種類	$\lvert J \rvert$	4
初期の貯金	s_0	1
収入	$g_1, \dots, g_{10}$	4
住宅規模 1 の価格	h_1	3
住宅規模 2 の価格	h_2	5
住宅規模 3 の価格	h_3	7
住宅規模 4 の価格	h_4	9
預金金利	r	0.030
借入金利	r'	0.050
家賃価格比率	π	0.075
割引因子	β	0.800
最終状態	m_{10}	0

初期設定が安い借家の場合

目的関数の値：0.355 (もとの効用関数に代入した値：-0.794)

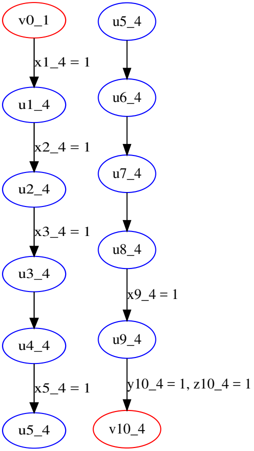


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	5.030	0	9.000
2	3.550	0	9.000
3	3.550	0	9.000
4	3.550	0	9.000
5	3.550	0	9.000
6	3.550	0	9.000
7	3.550	0	9.000
8	3.550	0	9.000
9	3.550	0	9.000
10	2.875	0	0

初期設定が高い借家の場合

目的関数の値：0.355 (もとの効用関数に代入した値：-0.794)

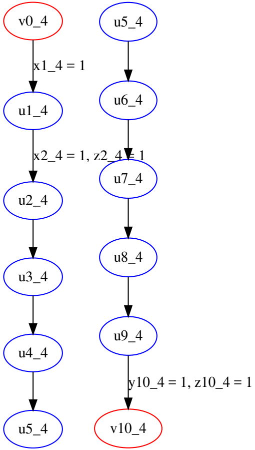


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	5.030	0	9.000
2	3.550	0	9.000
3	3.550	0	9.000
4	3.550	0	9.000
5	3.550	0	9.000
6	3.550	0	9.000
7	3.550	0	9.000
8	3.550	0	9.000
9	3.550	0	9.000
10	2.875	0	0

初期設定が安い持ち家の場合

目的関数の値：0.330 (もとの効用関数に代入した値：-0.750)

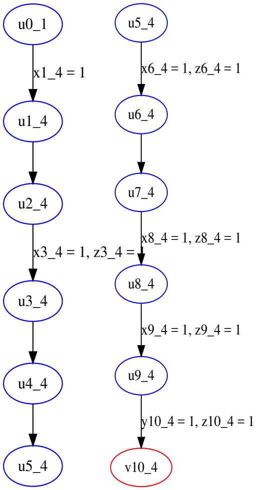


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	8.030	0	9.000
2	3.550	0	9.000
3	3.550	0	9.000
4	3.550	0	9.000
5	3.550	0	9.000
6	3.550	0	9.000
7	3.550	0	9.000
8	3.550	0	9.000
9	3.550	0	9.000
10	2.875	0	0

初期設定が高い持ち家の場合

目的関数の値：0.278 (もとの効用関数に代入した値：-0.715)

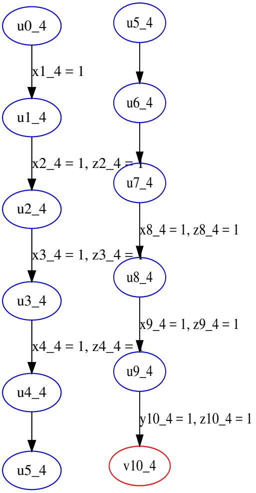
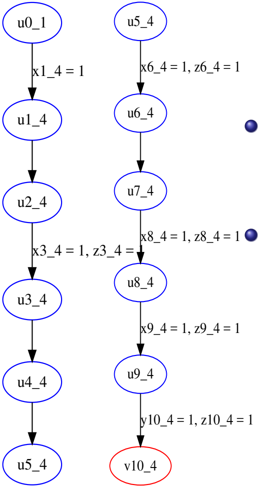


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	14.030	0	9.000
2	3.550	0	9.000
3	3.550	0	9.000
4	3.550	0	9.000
5	3.550	0	9.000
6	3.550	0	9.000
7	3.550	0	9.000
8	3.550	0	9.000
9	3.550	0	9.000
10	2.875	0	0

結果と問題点



- 結果
  - 高い持ち家に住もうとする
  - 全く貯金せずに消費する
- 問題点
  - 頻繁に家を買う
  - 理由：新しく家を買うことも，維持することも条件が同じだからと考えられる

買い替え手数料を加えた制約式

$$
\begin{aligned}
&(1+r)s_{t-1} + g_t - c_t - s_t - (1+r')m_{t-1} + m_t \\
&- \pi \sum_{j \in J} h_j v_{tj} - (1 + \underbrace{\delta}_{\text{購入手数率}}) \sum_{j \in J} h_j x_{tj} + \sum_{j \in J} h_j z_{tj} = 0
\end{aligned}
$$

δ：購入手数率

使用するデータ

期間	$\lvert T \rvert$	10
住宅規模の種類	$\lvert J \rvert$	4
初期の貯金	s_0	1
収入	$g_1, \ldots, g_{10}$	4
住宅規模 1 の価格	h_1	3
住宅規模 2 の価格	h_2	5
住宅規模 3 の価格	h_3	7
住宅規模 4 の価格	h_4	9
預金金利	r	0.030
借入金利	r'	0.050
家賃価格比率	π	0.075
割引因子	β	0.800
購入手数率	δ	0.030
最終状態	m_{10}	0

初期設定が安い借家の場合

目的関数の値：0.358 (もとの効用関数に代入した値：-0.801)

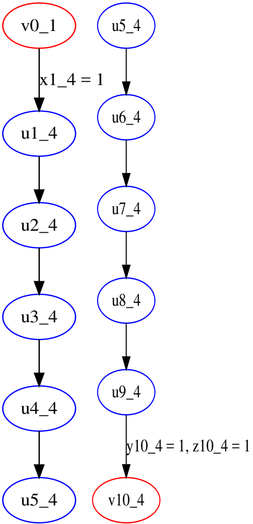


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	4.760	0	9.000
2	3.550	0	9.000
3	3.550	0	9.000
4	3.550	0	9.000
5	3.550	0	9.000
6	3.550	0	9.000
7	3.550	0	9.000
8	3.550	0	9.000
9	3.550	0	9.000
10	2.875	0	0

初期設定が高い借家の場合

目的関数の値：0.358 (もとの効用関数に代入した値：-0.801)

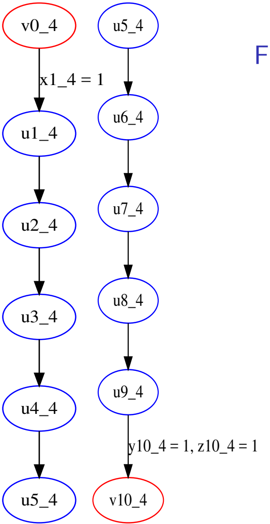


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	4.760	0	9.000
2	3.550	0	9.000
3	3.550	0	9.000
4	3.550	0	9.000
5	3.550	0	9.000
6	3.550	0	9.000
7	3.550	0	9.000
8	3.550	0	9.000
9	3.550	0	9.000
10	2.875	0	0

初期設定が安い持ち家の場合

目的関数の値：0.332 (もとの効用関数に代入した値：-0.753)

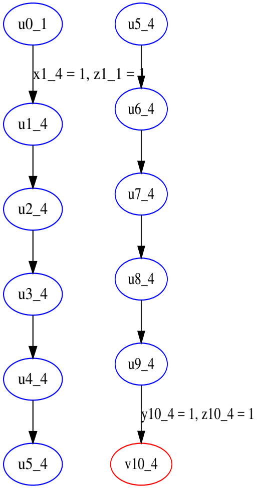


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	7.760	0	9.000
2	3.550	0	9.000
3	3.550	0	9.000
4	3.550	0	9.000
5	3.550	0	9.000
6	3.550	0	9.000
7	3.550	0	9.000
8	3.550	0	9.000
9	3.550	0	9.000
10	2.875	0	0

初期設定が高い持ち家の場合

目的関数の値：0.278 (もとの効用関数に代入した値：-0.715)

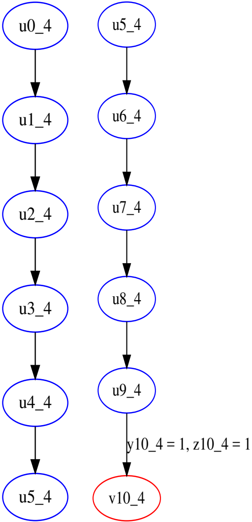
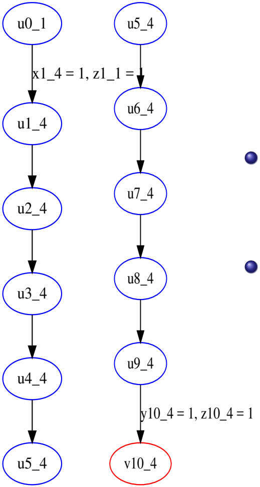


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	14.030	0	9.000
2	3.550	0	9.000
3	3.550	0	9.000
4	3.550	0	9.000
5	3.550	0	9.000
6	3.550	0	9.000
7	3.550	0	9.000
8	3.550	0	9.000
9	3.550	0	9.000
10	2.875	0	0

結果と問題点 2



- 結果
  - 高い持ち家に住もうとする
  - 頻繁に家を買うことがなくなった
- 問題点
  - ローンを少しずつ返していくのではなく，最後にすべて返済している

ローン返済年数を決める制約式

ローン残額から, 価値の $\dfrac{1}{10}$ ずつ返す場合

$$m_t \leq m_{t-1} - 0.1 \sum_{j \in J} h_j u_{tj} + M \sum_{j \in J} x_{tj}$$

M : ビッグ M

使用するデータ

期間	$\|T\|$	10
住宅規模の種類	$\|J\|$	4
初期の貯金	s_0	1
収入	$g_1, \dots, g_{10}$	4
住宅規模 1 の価格	h_1	3
住宅規模 2 の価格	h_2	5
住宅規模 3 の価格	h_3	7
住宅規模 4 の価格	h_4	9
預金金利	r	0.030
借入金利	r'	0.050
家賃価格比率	π	0.075
割引因子	β	0.800
購入手数率	δ	0.030
最終状態	m_{10}	0

初期設定が安い借家の場合

目的関数の値：0.364 (もとの効用関数に代入した値：-0.856)

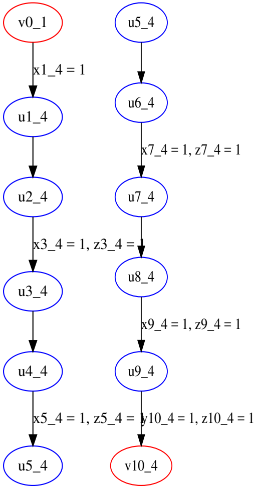


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	4.760	0	9.000
2	2.650	0	8.100
3	4.225	0	9.000
4	2.650	0	8.100
5	4.225	0	9.000
6	2.650	0	8.100
7	4.225	0	9.000
8	2.650	0	8.100
9	4.225	0	8.100
10	2.875	0	0

初期設定が高い借家の場合

目的関数の値：0.364 (もとの効用関数に代入した値：-0.856)

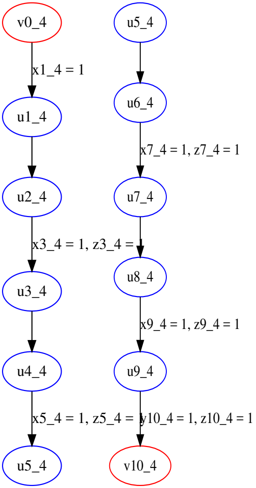


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	4.760	0	9.000
2	2.650	0	8.100
3	4.225	0	9.000
4	2.650	0	8.100
5	4.225	0	9.000
6	2.650	0	8.100
7	4.225	0	9.000
8	2.650	0	8.1000
9	4.225	0	9.000
10	2.875	0	0

初期設定が安い持ち家の場合

目的関数の値：0.338 (もとの効用関数に代入した値：-0.808)

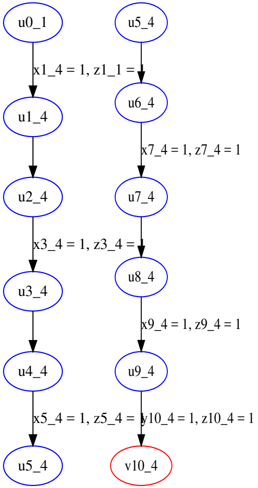


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	7.760	0	9.000
2	2.650	0	8.100
3	4.225	0	9.000
4	2.650	0	8.100
5	4.225	0	9.000
6	2.650	0	8.100
7	4.225	0	9.000
8	2.650	0	8.100
9	4.225	0	9.000
10	2.875	0	0

初期設定が高い持ち家の場合

目的関数の値：0.287 (もとの効用関数に代入した値：-0.771)

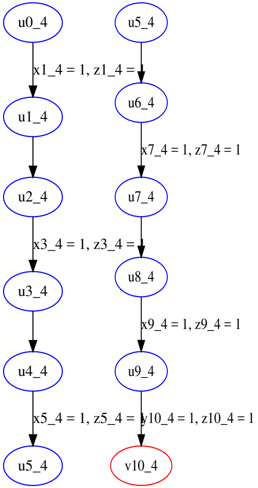


Figure: 消費, 貯金, ローン残額の推移

t	c_t	s_t	m_t
1	13.760	0	9.000
2	2.650	0	8.100
3	4.225	0	9.000
4	2.650	0	8.100
5	4.225	0	9.000
6	2.650	0	8.100
7	4.225	0	9.000
8	2.650	0	8.100
9	4.225	0	9.000
10	2.875	0	0

結果と問題点 3

- 結果
  - 借金をして大きな持ち家に住んで消費することが幸せである
  - 将来の消費が減ることよりも, 現在の消費が大切である
  - ローン残額が変わらない場合, ローンの利息だけを払っている
- 問題点
  - ローン残額を大きくしようとするため, そして収入が多いため, 頻繁に家を買う
  - ローンが住宅の価値だけ借りられる設定だが, このモデルでは, 家が古くなってその価値が下がっていくことを表しておらず, 常に高いローンが借りられる

まとめと結論

- Li,Yao の住宅選択問題を整数計画問題として定式化した
- 効用関数を線形関数と 2 次関数で近似した

- 計算実験を行い，どんな住宅規模の借家あるいは持ち家に住んでいると初期設定しても，$t = 1$ 期から $t = 9$ 期は高い持ち家に住み，最終期には高い借家に住むという結果が得られた
- これは，効用関数にとって，住宅規模のほうが消費の大きさよりも影響が大きいといえる
- 住宅価値が下がらないため，高い家を買って最後にローンをすべて返済するほうがよい
- ローンを返済するよりも，消費したほうが効用関数に良い

問題点と今後の課題

- 住宅が古くなっても, 住宅価値が下がらない
  (高いローン残高を残せる)
  → 住宅の価値を示す変数を加えてモデル化する
- 長い期間で実験を行う
  → 70 期間など