

# 株価の共和分性に基づく 動的ペアトレードの数値実験

---

法政大学大学院

理工学研究科システム理工学

王 卓雅

指導教員 安田 和弘

# 目次

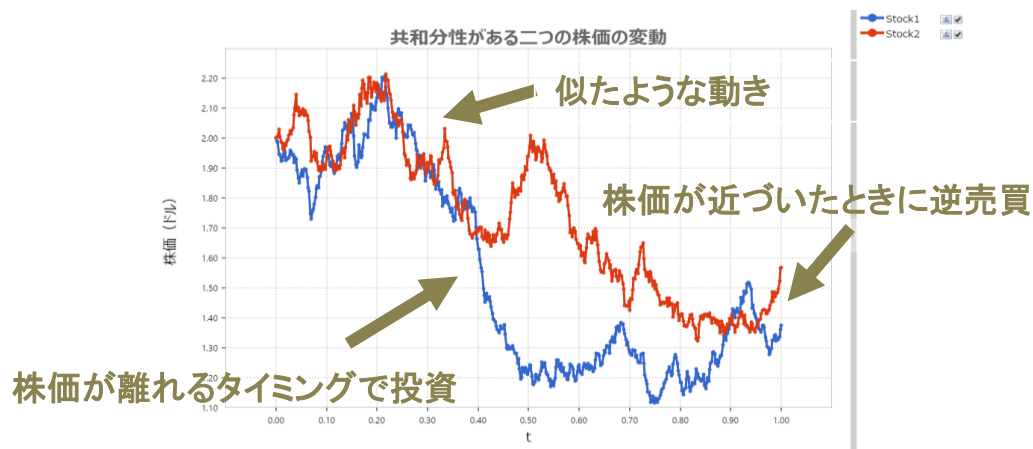
---

- 研究背景
- 研究目的
- [2]の設定および結果
- 実験手法
- 数値実験結果と考察
- まとめ
- 参考文献
- 付録

# 研究背景

## ペアトレードとは

- **ペアトレード**とは、相関関係の高い2つの金融商品の差額の変動を利用して収益をあげる取引方法のことである。 [1]



同じセクターの金融商品は比較的似た様な動きをすることが多い。しかし、似た値動きをする2つの商品でも、何らかのタイミングで株価が離れる場合がある。この時、再度株価が近づくことを期待して高い方の銘柄を空売り、低い方の銘柄を買い、株価が近づいたときに反対売買を行えば、相場全体が下落していても利益を上げることが期待できる。

# 本研究について

---

[2]では、共和分性がある株式市場において、平均・分散法に基づく動的最適ペアトレードを与えている。

[2]のモデルおよび最適戦略に対してシミュレーションを行う

比較的に理想的な状況で1回だけペアトレードした場合とで、リスクやリターンに対してどのような結果になるか考察する。

実データを用いて、[2]のパフォーマンスや実用性について考察する。

\*ここでは、取引コストは考慮しない。

## [2]の設定および結果 モデルの設定

対数価格をとるメリット

- 計算アルゴリズムが簡単
- 分散不均一構造に対する誤差が減少

- リスク資産の対数価格ベクトル (後の実験では $n=2$ とする)  $X(t)$  は次の確率微分方程式に従うとする.

$$dX(t) = [\theta(t) - AX(t)]dt + \sigma(t)dW_t, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

$W_t$  は  $n$ 次元のブラウン運動で  $W_t^i$  と  $W_t^j$  ( $i \neq j$ ) は互いに独立とする.

$A$  は共和分係数の定数行列で回帰度を表す.

$\theta(t)$  は  $X(t)$  の回帰レベルを表す.

$\sigma(t)\sigma(t)' = \Sigma(t)$  は共分散行列とする ( $'$  は転置を表す).

1つ以上の項が確率過程である微分方程式であって、その結果、解自身も確率過程となるものである。

## [2]の設定および結果 平均・分散法

---

- 資産*i*への投資額を $u_i(t)$ とする. 時刻*t*に投資家の富は

$$Y(t) = \sum_{i=0}^n u_i(t)$$

となる. ( $u_0(t)$ は安全資産とする)

- 平均・分散法を用いたポートフォリオ選択問題

$$P(MV): \min \text{Var}(Y(T)), \\ \text{s.t. } E[Y(T)] = \bar{Y} .$$

$\bar{Y}$ が満期での期待資産という条件の下で、分散を極力抑えるポートフォリオ問題

ただし,  $\bar{Y}$ を指定された最終期待資産とし,  $T$ を取引の満期とする.

## [2]の設定および結果 最適トレーディング戦略と効率的フロンティア

平均・分散ポートフォリオ問題P(MV)[2]では、この**動的最適トレーディング戦略**は以下のように与えられている。

$$u^*(t, X(t), T) = \frac{\bar{Y}e^{-\int_t^T r(s)ds} - Y_0}{\hat{H}(0, \alpha(0), T)} \left[ \left( \Sigma(t)^{-1} + A' \hat{K}(t, T) \right) \alpha(t) + A' \hat{N}(t, T) \right].$$

$\bar{Y}$ は目標額,  $Y_0$ は初期資産を表し,  $\hat{H}$ ,  $\hat{K}$ ,  $\hat{N}$ の定義式は長いため, アペンディクスを参照してください。

P(MV)の**効率的フロンティア**は以下のようになることが[2]で示されている。

$$\overline{Y}(T) = \frac{\hat{H}(0, \alpha(0), T)}{\sqrt{H(0, \alpha(0), T)}} \sigma_{Y^*(T)} + Y_0 e^{\int_0^T r(s)ds}.$$

マーコヴィッツの平均・分散法ではすべてのリスク回避的な投資家の最適ポートフォリオのリターンとリスクが効率的フロンティア上にある。

# 実験手法



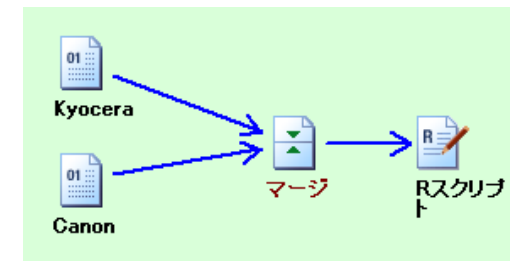
## •実験1

Visual R PlatformのRスクリプト機能で理想的なペアトレード戦略に対してオイラー・丸山近似を用いて、連続的な確率微分方程式(1)を、オイラー法のように離散化し、数値解を逐次的に求めていく。そのようなシミュレーションを10万回行い、この取引に対して、リスクと富の期待値の近似値を求める。

## •実験2

実データ[3]に対して、Visual R Platform付属のアイコンでデータ処理を行い、外部パッケージをRスクリプトに実装して利用する。

パッケージ	操作
urca[4]	Engel-Granger共和分検定
yuima[5]	パラメータ推定

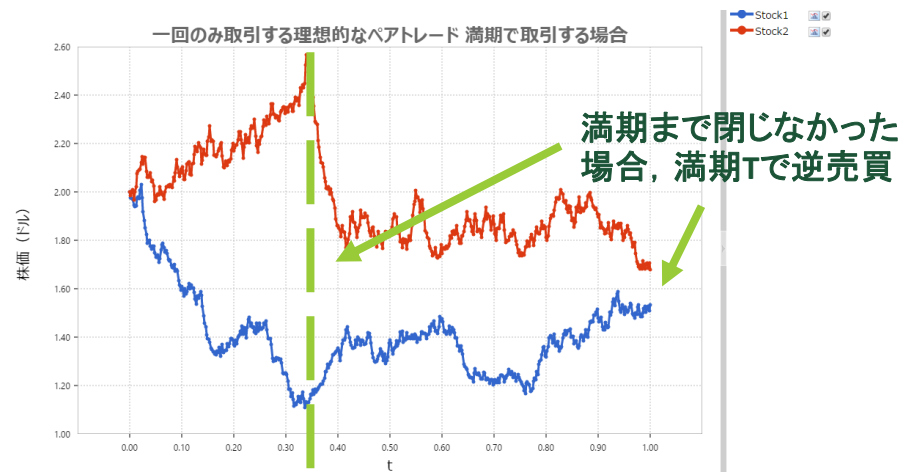
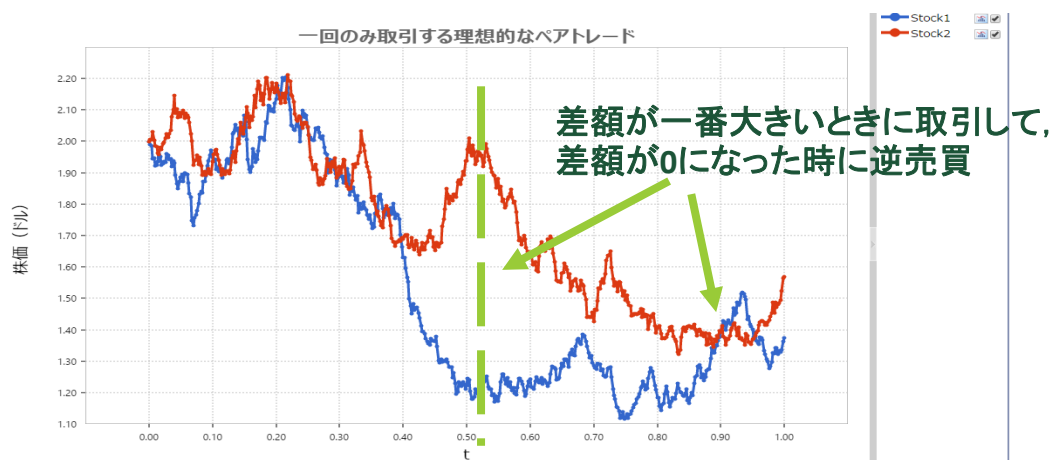




# 数値実験結果と考察1

## 一回のみ理想的なペアトレード戦略で取引する結果との比較

一回のみ理想的なペアトレード戦略で取引する結果との比較を行う。

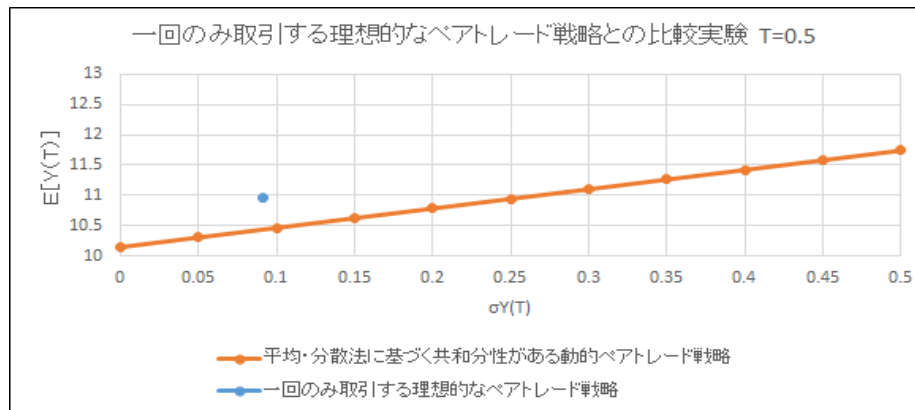


\*ただし、この研究で行う分析はかなり理想的なタイミングで取引しているので、現実の投資で実行することは難しい。

- 
- 満期Tの変化で[2]で与えられた戦略で得られる結果と、理想的なペアトレードによる結果との差がどのように変化するかについて考察を行う.
  - 理想的なペアトレードのリスクと富の期待値の点と効率的フロンティアの直線との距離を $d$ とし、効率的フロンティアより下に点があるときマイナスを付ける.  
( $d$ が正のとき、理想的なペアトレードの方がハイリターンもしくはローリスクになっていることを意味する.)

## リターンとリスクの関係(T=0.5)

短期投資では(ここでは T=0.5), 理想的なペイトレード戦略の方がローリスク  
またはハイリターンなパフォーマンスをするため, よりいいパフォーマンスをしていると言える.



### パラメータの設定

$$\theta = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} \ln 2 \\ \ln 2 \end{pmatrix}$$

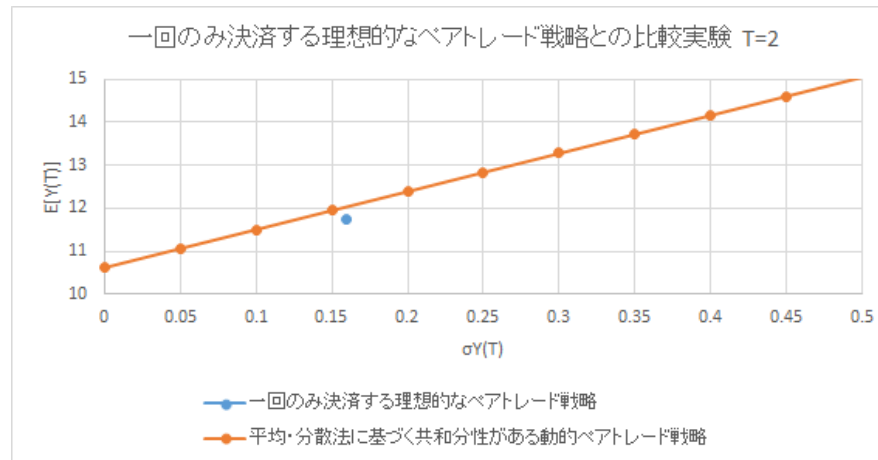
$$T = 1$$

$$Y_0 = 10$$

$$r = 0.03$$

## リターンとリスクの関係(T=2)

長期投資の(T=2)時, [2]の方がローリスクまたはハイリターンであるため, 理想的なペアトレード戦略よりいいパフォーマンスをしていると言える.



### パラメータの設定

$$\theta = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = \begin{pmatrix} \ln 2 \\ \ln 2 \end{pmatrix}$$

$$T = 1$$

$$Y_0 = 10$$

$$r = 0.03$$

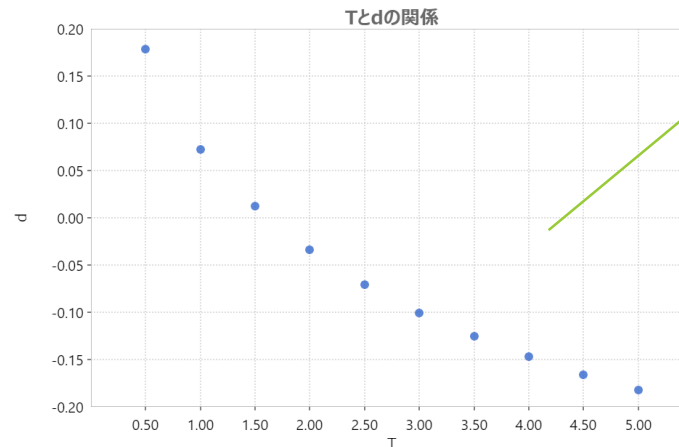
# 数値実験結果と考察1

## まとめ

- 短期間では、理想的なペアトレードの方が優れているが、満期の増大と共に差が小さくなる。
- 長期投資の場合、満期 $T$ が長ければ長いほど理想的なペアトレードのメリットがなくなり、[2]で得られている戦略のパフォーマンスが向上する。

表1 理想的なペアトレードのリスクと富の期待値の点と効率的フロンティアの直線との距離

$T$	$\bar{Y}(T)$ の傾き	$\bar{Y}(T)$ の切片	$d$
0.5	3.1813	10.1511	0.1786
1	5.0766	10.3046	0.0723
1.5	6.9422	10.4603	0.0121
2	8.8634	10.6184	-0.0339
2.5	10.8600	10.7788	-0.0704
3	12.9341	10.9417	-0.1005
3.5	15.0832	11.1071	-0.1257
4	17.3035	11.2750	-0.1472
4.5	19.5923	11.4454	-0.1658
5	21.9483	11.6183	-0.1819



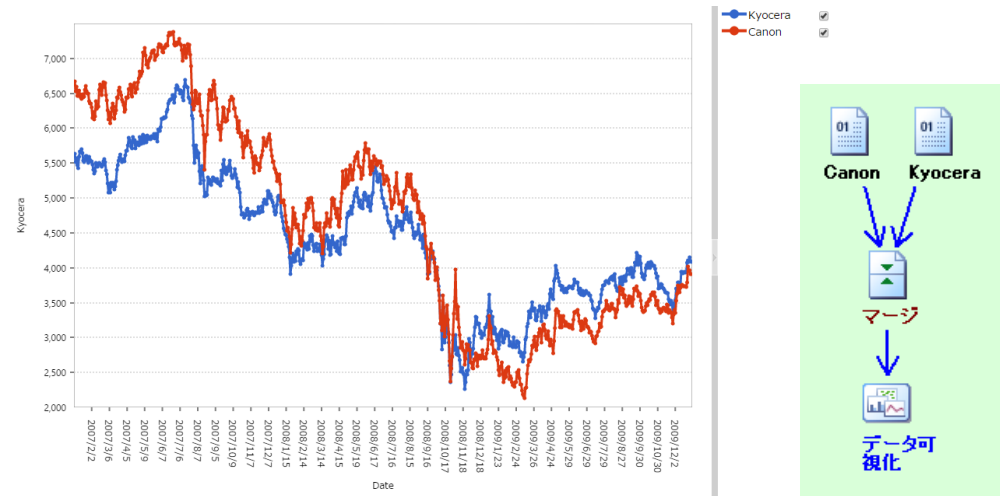
初期は急激に下がり、満期の増大とともに下落が緩やかになる。

## 数値実験結果と考察2 共和分検定

ペアを探すとき、共和分性があるペアが望ましい。  
共和分性がある両者の間には一種の均衡関係が  
成立するので、共和分の有無を調べることで両者  
の時系列同士の関係性を推測できる。

同じセクターの似たような動きがする銘柄ペアについてEngel-Granger共和分  
検定を行い、以下の共和分性があるペアを検定した。

Kyocera & Canon 2007-2009  
TOYOTA & DENSO 2007-2009  
Fanuc & Toshiba 2008-2010  
Tokyo Gas & Daigas 2011-2013  
Ajinomoto & Kokkiman 2011-2013  
Sony & TDK 2011-2013  
East JR & West JR 2011-2013  
Fanuc & Toshiba 2012-2014  
Kyocera & Canon 2012-2014  
Bitcoin & ETH 2006-2008



Ex.Kyocera&Canon 2007-2009

# 数値実験結果と考察2

## パラメータ推定

[2]での戦略を実装するため、投資期間まで3年分の株価データを用いて、Rスクリプトでyuimaパッケージを呼び出してパラメータ推定を行う。

$$dX(t)=[\theta(t)-AX(t)]dt+\sigma(t)dW_t, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

推定パラメータ (n=2, あるいは2次元の時)

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{21} \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

```
Coefficients:
      Estimate Std. Error
sigma11 0.02395566 0.032429104
sigma12 0.18210297 0.006420889
sigma21 0.16200917 0.022256495
sigma22 0.12335016 0.029352210
theta11 9.95963516 5.336670062
alpha11 2.75321746 3.866230767
alpha12 0.00010000 2.689068005
theta21 6.75469560 5.916330035
alpha21 0.00010000 4.286166559
alpha22 1.87296917 2.981144889

-2 log L: -9245.979
```

Ex.Kyocera&Canon 2007-2009でのパラメータ推定結果

# 数値実験結果と考察2 実データを用いた比較実験

推定したパラメータの値を[2]の戦略に代入し、得られた収益を月の頭に売買を始め、月末に決済を行う投資戦略での収益と比較する。ここで、満期を1monthとする。

Kyocera&Canon2010		
Estimated interval(2007-2009)		
month	monthly	dynamic
1	-0.871	0.031
2	0.807	0.210
3	0.031	0.140
4	-0.129	0.008
5	0.160	0.137
6	-0.333	0.055
7	0.676	0.462
8	-0.152	-0.057
9	0.388	0.465
10	-0.667	0.080
11	0.224	0.194
12	0.789	0.085
average	0.077	0.151
var	0.270	0.025
sharpe ratio(r=0)	0.148	0.958

Fanuc&Toshiba2011		
Estimated interval(2008-2010)		
month	monthly	dynamic
1	-0.335	0.112
2	-0.073	0.014
3	-0.582	-0.101
4	0.312	0.019
5	0.012	0.704
6	-1.021	-0.421
7	0.014	-0.084
8	0.025	0.282
9	-1.115	-0.550
10	-1.144	-0.534
11	0.456	-0.149
12	-0.153	-0.208
average	-0.300	-0.076
var	0.275	0.114
sharpe ratio(r=0)	-0.573	-0.227

monthly:月の頭に売買を始め、  
月末に決済を行う投資戦略  
dynamic:[2]での投資戦略

Summary of results(10 pairs)		
	monthly	dynamic
higher profit (total: 120 times)	57	63
higher average (total: 10 pairs)	4	6
better sharpe ratio(r=0) (total: 10 pairs)	3	7

[2]の方が優れたパフォーマンスをしていることがわかる。

シャープレシオ:投資のリスクの大きさに比べてどれだけリターンを得られるか、運用効率の高さを示す。



## まとめ

Visual R Platformの充実した機能で、株価データを手軽にデータ処理、ビジュアル化することができた。また、Rスクリプトで外部パッケージを利用することができ、非常に利便性に優れている。

### 結論

- [2]によって与えられた動的戦略を検討することにより、長期的な投資であれば、一回のみ取引する理想的な投資戦略より優れたパフォーマンスを実現できることがわかった。
- 実データを用いて、戦略の実用性を検討した。[2]の投資戦略は、月の頭に売買を始め、月末に決済を行う投資戦略よりわずかに優れたパフォーマンスをしていることがわかった。

### 今後の研究

- 動的取引では取引コストにより、取引利益が減少するため、その影響を検討したい。

## 参考文献

---

[1] 野村証券「証券用語解説集」

<https://www.nomura.co.jp/terms/japan/he/A02607.html>

[2] M. C. Chiu, H. Y. Wong, Dynamic cointegrated pairs trading: Mean-variance time-consistent strategies, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.290, pp.516-534, 2015.

[3] investing.com, <https://jp.investing.com/>

[4] urca package, <https://cran.r-project.org/web/packages/urca/urca.pdf>

[5] The YUIMA Project, <https://yuimaproject.com/>

# 付録

## [2]最適戦略のパラメータ

---

$$\hat{H}(t, \alpha, T) = \frac{1}{2} \alpha' \hat{K}(t, T) \alpha + \hat{N}(t, T)' \alpha + \hat{M}(t, T)$$

$$D = D(\Sigma(t))$$

$$\hat{K}(t, T) = 2 \int_t^T \Sigma(s)^{-1} ds \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\hat{N}(t, T)' = \int_t^T \Theta(s)' \hat{K}(s) ds \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$\hat{M}(t, T)' = \int_t^T \hat{N}(s)' \Theta(s) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(s)' A' \hat{K}(s) A \sigma(s)) ds \in \mathbb{R}^n$$

$$\Theta(s) = \dot{\theta} + \frac{1}{2} (\dot{D} + AD) \mathbf{1} - (\dot{r} + Ar) \mathbf{1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$H(t, \alpha(t), T) = \frac{1}{2} \alpha(t)' K(t, T) \alpha(t) + N(t, T)' \alpha(t) + M(t, T)$$

$$K(t, T) = 2 \int_t^T e^{\frac{1}{2} A'(t-s)} \Sigma(s)^{-1} e^{\frac{1}{2} A(t-s)} ds$$

$$N(t, T)' = \int_t^T \Theta(s)' K(s, T) e^{A(t-s)} ds$$

$$M(t, T) = \int_t^T N(s, T)' \Theta(s) + \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma(s)' A' K(s, T) A \sigma(s)) ds$$

# 付録

## 実データを用いた比較実験の結果

TOYOTA&DENSO2010		
Estimated interval(2007-2009)		
month	monthly	dynamic
1	0.382	0.056
2	-0.637	0.255
3	0.086	0.573
4	0.076	0.127
5	-0.031	-0.128
6	0.607	-0.363
7	0.222	-0.018
8	0.038	-0.292
9	0.405	0.316
10	0.508	-0.597
11	-0.323	1.038
12	0.391	-0.571
average	0.144	0.033
var	0.118	0.208
sharpe ratio(r=0)	0.418	0.073

Tokyo Gas&Daigas2014		
Estimated interval(2011-2013)		
month	monthly	dynamic
1	-0.512	-0.002
2	-0.855	-0.154
3	1.329	0.510
4	0.445	0.129
5	0.221	-0.187
6	-0.316	-0.203
7	0.830	0.389
8	-0.640	-0.676
9	-0.117	0.793
10	-0.098	0.243
11	-0.120	0.523
12	-0.353	0.011
average	-0.015	0.115
var	0.364	0.149
sharpe ratio(r=0)	-0.026	0.297

Ajinomoto&Kokkiman2014		
Estimated interval(2011-2013)		
month	monthly	dynamic
1	0.429	0.049
2	0.262	0.053
3	-0.180	0.175
4	0.012	-0.024
5	-0.315	-0.448
6	0.376	0.145
7	0.282	0.241
8	0.762	-0.235
9	-0.804	0.644
10	-0.061	-0.226
11	0.357	0.441
12	0.119	0.264
average	0.103	0.090
var	0.154	0.084
sharpe ratio(r=0)	0.263	0.311

Sony&TDK2014		
Estimated interval(2011-2013)		
month	monthly	dynamic
1	-0.405	0.277
2	0.834	0.078
3	0.118	0.117
4	0.087	-0.200
5	-0.529	0.226
6	0.582	-0.423
7	0.759	-0.428
8	-0.451	-0.037
9	0.527	-1.937
10	-0.750	0.403
11	0.468	-0.472
12	-0.761	-0.342
average	0.040	-0.228
var	0.325	0.348
sharpe ratio(r=0)	0.070	-0.387

EastJR&WestJR2014		
Estimated interval(2011-2013)		
month	monthly	dynamic
1	0.154	0.580
2	-0.482	0.376
3	0.448	0.196
4	0.089	0.171
5	-0.039	-0.082
6	0.085	-0.204
7	0.149	-0.688
8	0.699	-0.883
9	-0.186	0.085
10	0.250	-0.325
11	0.433	-1.061
12	-0.189	0.309
average	0.118	-0.127
variance	0.095	0.249
sharpe ratio(r=0)	0.382	-0.255

Fanuc&Toshiba2015		
Estimated interval(2012-2014)		
month	monthly	dynamic
1	0.670	0.909
2	0.157	0.362
3	-0.757	-0.176
4	-0.980	-0.120
5	0.835	0.652
6	1.159	0.009
7	-0.341	0.132
8	0.412	0.261
9	-0.328	-1.130
10	-0.057	0.828
11	0.528	-0.172
12	-0.195	0.093
average	0.092	0.137
var	0.388	0.274
sharpe ratio(r=0)	0.147	0.262

Kyocera&Canon2015		
Estimated interval(2012-2014)		
month	monthly	dynamic
1	0.458	0.212
2	-1.212	-0.414
3	-0.091	-0.768
4	0.533	-0.770
5	-0.624	-0.169
6	-0.133	0.598
7	-0.041	0.054
8	-0.109	0.532
9	0.127	0.383
10	0.347	-0.127
11	-0.155	-0.412
12	0.152	0.341
average	-0.062	-0.045
var	0.211	0.208
sharpe ratio(r=0)	-0.136	-0.099

Bitcoin&ETH2019		
Estimated interval(2016-2018)		
month	monthly	dynamic
1	-0.286	0.266
2	-1.402	1.208
3	0.814	1.387
4	-1.604	-0.383
5	-2.128	-0.742
6	-1.311	-0.545
7	2.112	0.765
8	-0.649	0.046
9	0.122	0.155
10	-1.175	-0.446
11	0.775	0.513
12	3.087	1.270
average	-0.137	0.291
var	2.309	0.510
sharpe ratio(r=0)	-0.090	0.408