日本の株式市場における
市場インパクト関数の形状に関する分析

法政大学大学院

理工学研究科システム理工学専攻

中村 俊介

指導教員 安田 和弘

目次

板情報および，市場インパクトについて

板情報とは

ある銘柄に対する指値注文を一目で見ることが分かるようにした情報.

市場インパクトとは

証券取引時において，成行注文約定時に発生する仲値，または約定価格の変動額のこと.
主に「一時的インパクト」と「恒久的インパクト」の2つに分割される.

一時的インパクトとは

約定価格を変動させるインパクト．約定時にのみ発生し，その後の仲値の変動には影響を与えないと考えられる．買い成行注文約定時には約定価格を上昇させ，売り成行注文約定時には約定価格を下落させる.

恒久的インパクトとは

仲値を変動させるインパクト．その後の仲値の変動に恒久的に影響を与えると考えられる.
一時的インパクトと同じように，買い成行注文の約定は仲値を上昇，売り成行注文の約定は仲値を下落させる影響を持つ.

一時的インパクトの例

以下の板情報下において，2,000株の買い成行注文を行う．その場合，1株あたりの約定価格は以下のようになり，仲値との乖離額が一時的インパクトとなる．

1株あたりの約定価格：$(1001 \times 200 + 1002 \times 800 + 1003 \times 1000) \div 2000 = 1002.4$

買い成行注文
2,000株

仲値
¥1,000

売り注文	件数	価格(円)	件数	買い注文
1200	(3)	¥1,003		
800	(3)	¥1,002		
200	(1)	¥1,001		
		¥1000		
		¥999	(1)	2000
		¥998	(4)	800
		¥997	(2)	600

図1　板情報

約定価格
¥1,002.4

一時的インパクト
¥2.4

→約定価格が上昇しているため，トレーダーにとって不利である．

恒久的インパクトの例

以下の取引情報において，仲値の変動率が恒久的インパクトを表しており，その説明変数は成行注文の売買差である．基本的には売り成行注文の約定が多いと仲値は下落し，買い成行注文の約定が多いと仲値は上昇する．今回はCartea,Jaimungal[2016]に習い，時間幅を5分としている．

開始		終了		仲値変動率	売り成行注文数	買い成行注文数	成行注文の売買差
時刻	仲値	時刻	仲値				
10:00	¥1,000	10:05	¥1,003	0.003	500	1300	800
10:05	¥1,003	10:10	¥998	-0.005	2400	900	-1500
10:10	¥998	10:15	¥999	0.001	1200	1400	200
10:15	¥999	10:20	¥1,005	0.006	200	2200	2000
10:20	¥1,005	10:25	¥1,005	0.0	1200	600	-600

図2 5分間の取引情報

赤枠で囲ったように，恒久的インパクトについては売買差があっても仲値が変動しない，もしくは逆の値動きをする場合もある．その場合，成行注文の約定によって空いた板の穴を新たな指値注文が埋めた，もしくは最良気配の注文が厚いため板に穴が空かなかった可能性が考えられる．

先行研究について

加藤[2014]

- 2010年5月1日から5月5日までの日本株市場の50銘柄の板情報を使用.
- 一時的インパクトと恒久的インパクトの分離はしていない.
- 回帰分析により市場インパクトを推定.
- ψ を執行枚数とした時，市場インパクト関数を $g(\psi) = \alpha\psi^{\gamma}$ $(\alpha > 0, \gamma > 0)$ と仮定.
- 市場インパクト関数の形状は凹性を帯びていると結論付けている.

Cartea, Jaimungal[2016]

- JASDAC市場の板情報を使用.
- 一時的インパクトと恒久的インパクトを分離して推定.
- どちらのインパクト関数も線形性を仮定し，回帰分析により推定.

本研究の目的

　近年，情報技術の進歩と共に，売買の全てをコンピュータに任せる自動取引の技術が発展してきている．それと同時に大口取引に焦点を当てた最適執行の研究も活発に行われている．その戦略を策定する中で，市場インパクトは重要な要素の1つになっている．

　戦略策定において，市場インパクトは線形性を仮定することが多い．しかし，実際に市場インパクトが線形性の性質を保有しているかは疑問である．そこで，本研究では加藤[2014]を参考に，市場インパクト関数について，回帰分析を用いて推定を行い，関数の形状について考察する．ただし，加藤[2014]では一時的インパクトと恒久的インパクトを分けずに推定を行っている．その部分について本研究では，Cartea,Jaimungal[2016]のアイデアを参考に市場インパクトを分離して，それぞれの関数の形状について考察する．

使用データについて

データの詳細について

- 期間（一時的インパクト）　2016/04/03 ~ 2016/04/07
- 期間（恒久的インパクト）　2016/04/03 ~ 2016/06/30
- 時間　AM9:05 ~ AM10:55
- 時間幅（恒久的インパクト）　5分足

※恒久的インパクト推定に使用するデータについては，データ数を増やすため３ヶ月分のデータを使用.

銘柄について

当時の日経225銘柄の中から，1週間（2016/0403 ~ 2016/04/07）で5,500回以上の取引がある銘柄を条件とする.

（5(日) × 22(5分/日) × 50(取引回数) = 5,500）

今回は「味の素」「トヨタ自動車」「三菱UFJFG」「ソフトバンク」の4銘柄を，分析対象の代表として結果を表示する.

一時的インパクトの推定方法

Cartea, Jaimungal[2016]のアイデアを使用して説明変数，目的変数を準備し，以下の回帰式によって一時的インパクトを推定する.

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \epsilon_t \quad (1)$$

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \beta_2 (x_t)^2 + \epsilon_t \quad (2)$$

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \beta_2 (x_t)^2 + \beta_3 (x_t)^3 + \epsilon_t \quad (3)$$

- x_t ：取引執行株数
- y_t ：仲値と執行価格の差の変動率
- ϵ_t ：誤差

(1)式は単項式回帰式である．(2)式は2次の多項式回帰式， (3)式は3次の多項式回帰式である.

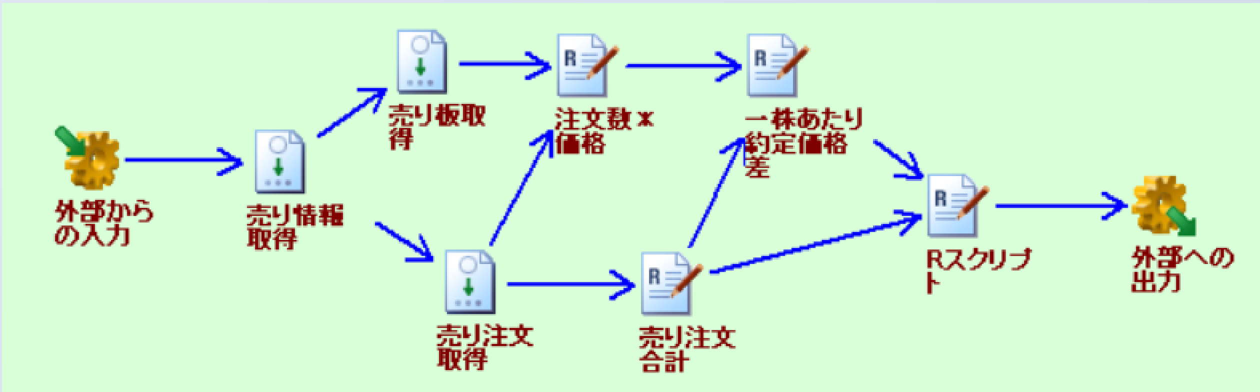
x_t, y_tのデータ作成方法については，次のスライドで説明する.

Visual R Platformによるデータ作成(1)

元のデータは以下のようになっている.

仲値	売り板1	売り注文1	買い板1	買い注文1	売り板2	売り注文2	売り板10	売り注文10	買い板2	買い注文2	買い板10	買い注文10
502	503	800	501	400	504	900	512	200	500	1200	492	800
502	503	300	501	400	504	900	512	300	500	1200	492	500
502.5	504	700	501	300	505	900	513	300	500	1000	492	600

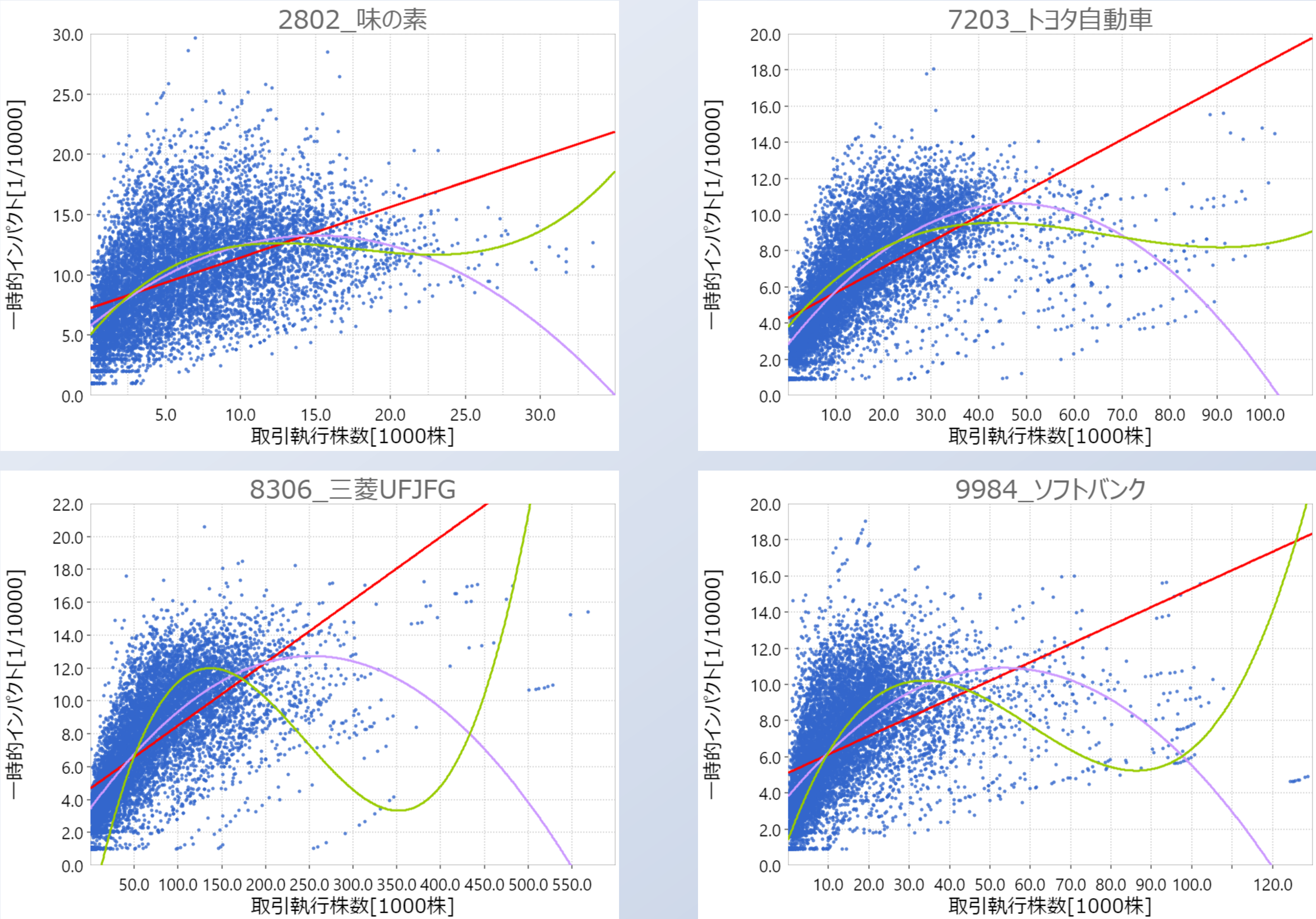
これを外部からの入力としてデータを生成する.



最後のRスクリプトでは，一株あたり約定価格差と売り注文合計が10列のデータフレームになっているので，それを1列ずつにして2列のデータフレームを作成する.

今回は1行の元データから10個のサンプルを作成している.

一時的インパクトの推定結果(1)



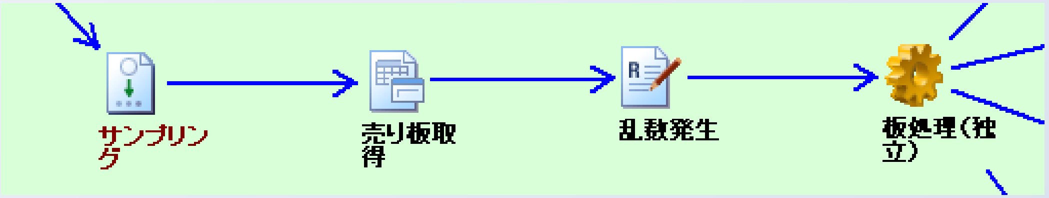
※ 赤線が式(1)（線形），紫線が式(2)（2次式），緑線が式(3)（3次式）となっている.

推定結果に対する考察(1)

- データの散布具合について
  - ✓ 1つ目の推定では1行から10個のサンプルをとっていることから，データが連なって外れ値のようになっている箇所がある.
- 回帰直線について
  - ✓ 2次回帰曲線については，いずれの銘柄も凹性を示している.
  - ✓ 3次回帰曲線については，取引執行株数が少ない部分は凹性，多くなってくると凸性を帯びているように見受けられる.

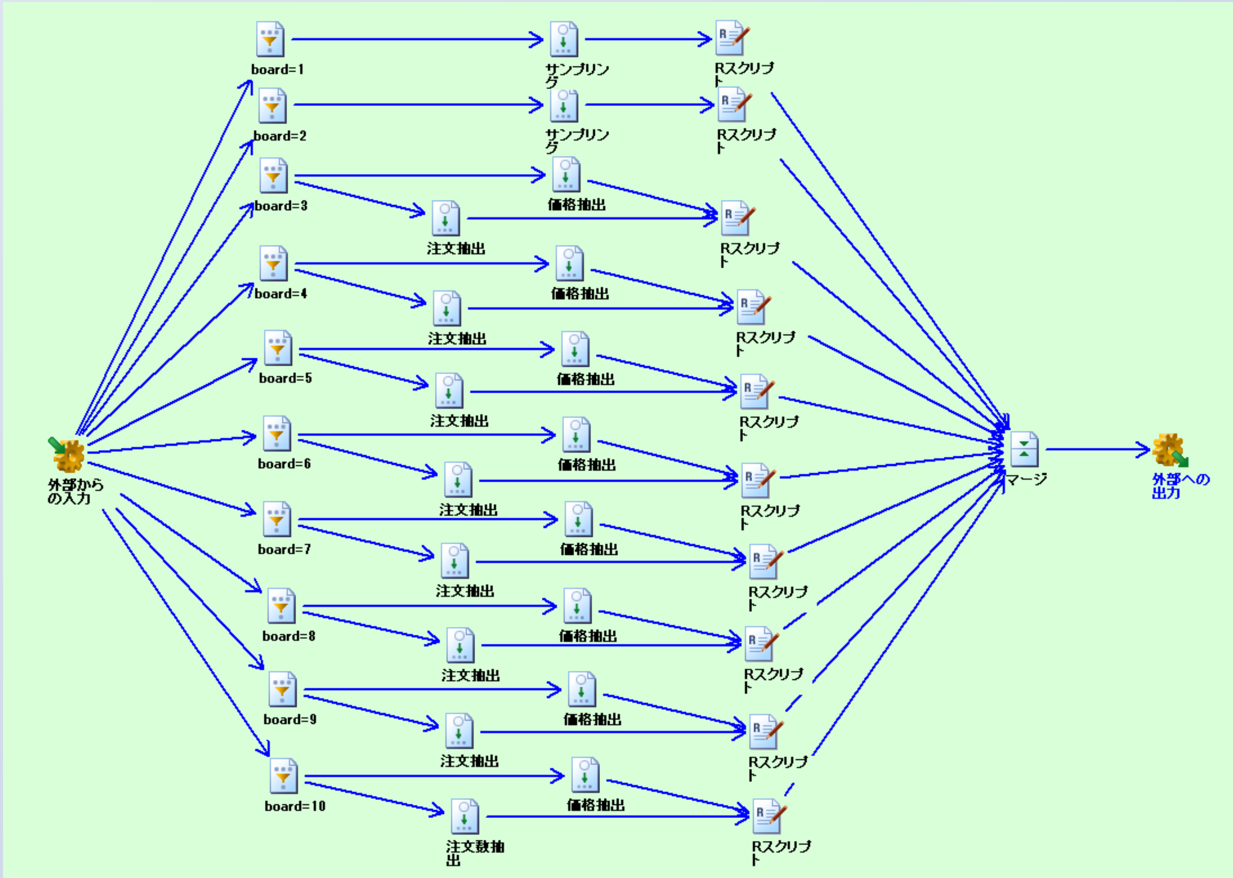
仲値に近い板の注文量で外れ値に近い値があると，データ作成の特性上，それ以後の板の注文量にまで影響を及ぼしてしまう．そのため，影響を最小限にするためにも，違うやり方でx_t を作成してみる.

Visual R Platformによるデータ作成(2)

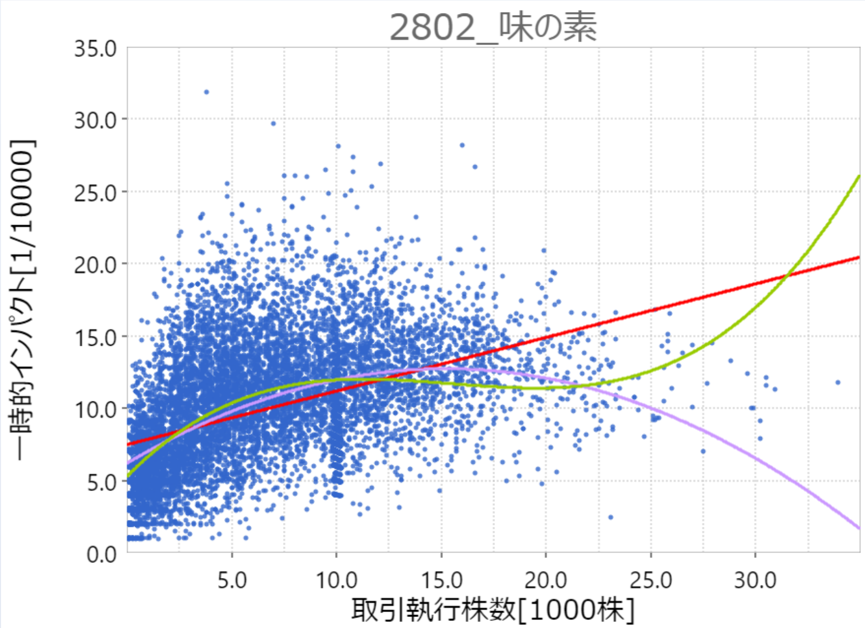


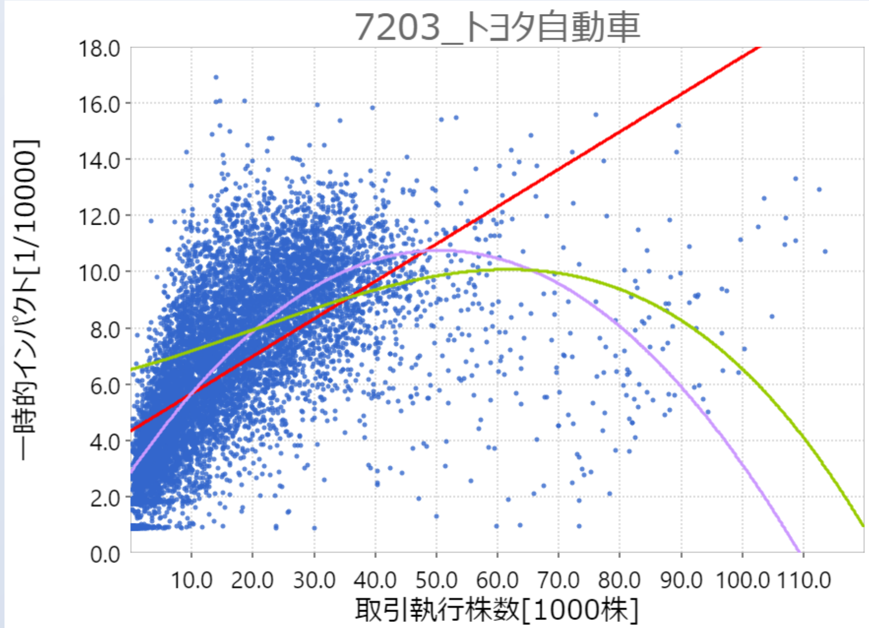
元データを受け取り，ランダムに必要な行数を抜き取る．その後，売り板の情報を取得し，何枚まで板を使うかを乱数を発生させて割り当てる．その後，板処理のモジュールにデータを引き渡す．

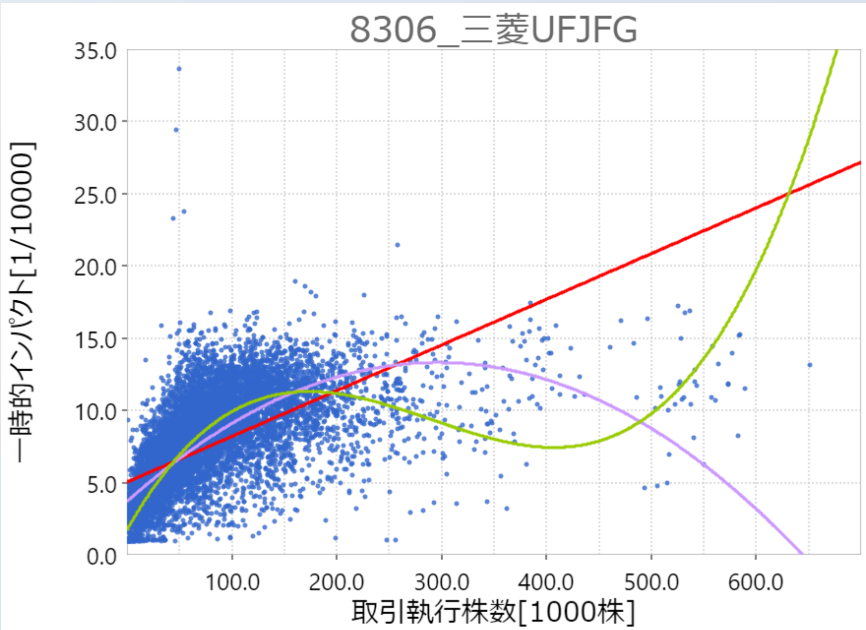
モジュールの中身は右のようになっている．乱数の割り当てごとに処理を分けている．乱数の数だけ板の注文数を合計する．また，一株あたりの執行価格を求め，Rスクリプトでデータフレームを作成する．その後，分けていた処理をマージしデータを出力する．

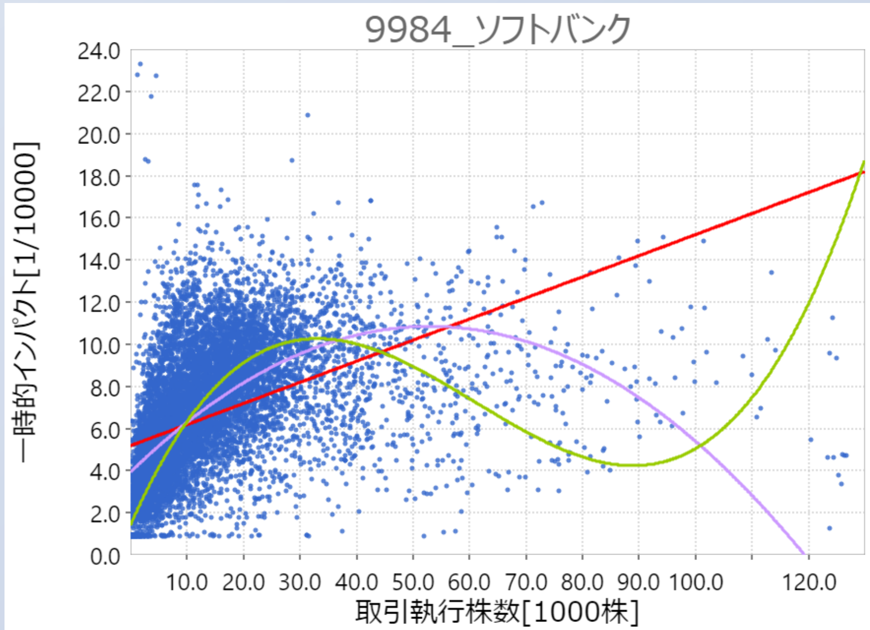


一時的インパクトの推定結果(2)









※ 赤線が式(1)（線形），紫線が式(2)（2次式），緑線が式(3)（3次式）となっている.

推定結果に対する考察(2)

- データの散布について
  - ✓ (1)の結果と比べて，連なって外れてる値が見られなくなった.
  - ✓ 一方で，使用する行数が増えたことから，(1)よりさらに外れた値も見られるようになった.
  - ✓ ただし，データの散らばり具合はそれほど変わっていないことから，データのもともとの特性として，分散が大きいと考えられる.

- 回帰直線について
  - ✓ 乱数を使って，使用するサンプルの行を選んでいるので，線の傾きに多少の違いはあるものの，(1)の推定結果と大差はない.

一時的インパクトは凹性の傾向を持っていると考えらえる．ただし，取引執行株数が増えた場合，凸性を帯びる可能性がある.

恒久的インパクトの推定方法

Cartea, Jaimungal[2016]のアイデアを使用して説明変数，目的変数を準備し，以下の回帰式によって一時的インパクトを推定する．

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \epsilon_t \quad (4)$$

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \beta_2 (x_t)^2 + \epsilon_t \quad (5)$$

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \beta_2 (x_t)^2 + \beta_3 (x_t)^3 + \epsilon_t \quad (6)$$

- x_t ：成行注文の約定売買差
- y_t ：仲値変動率
- ϵ_t ：誤差

(4)式は単項式回帰式，(5)式は2次の多項式回帰，(6)式は3次の多項式回帰である．

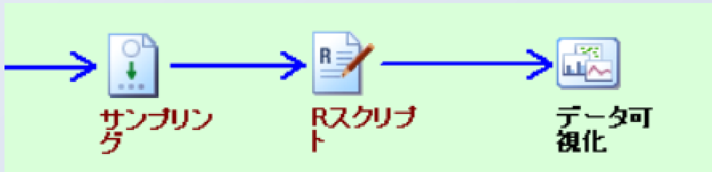
恒久的インパクトについては一時的インパクトと違い，変数に負の値が存在するため対数変換を施したうえでの回帰分析はできない．そこで(6)式で関数の凸性について簡易的に判断したい．

Visual R Platformによる推定

元のデータは以下のようになっている.

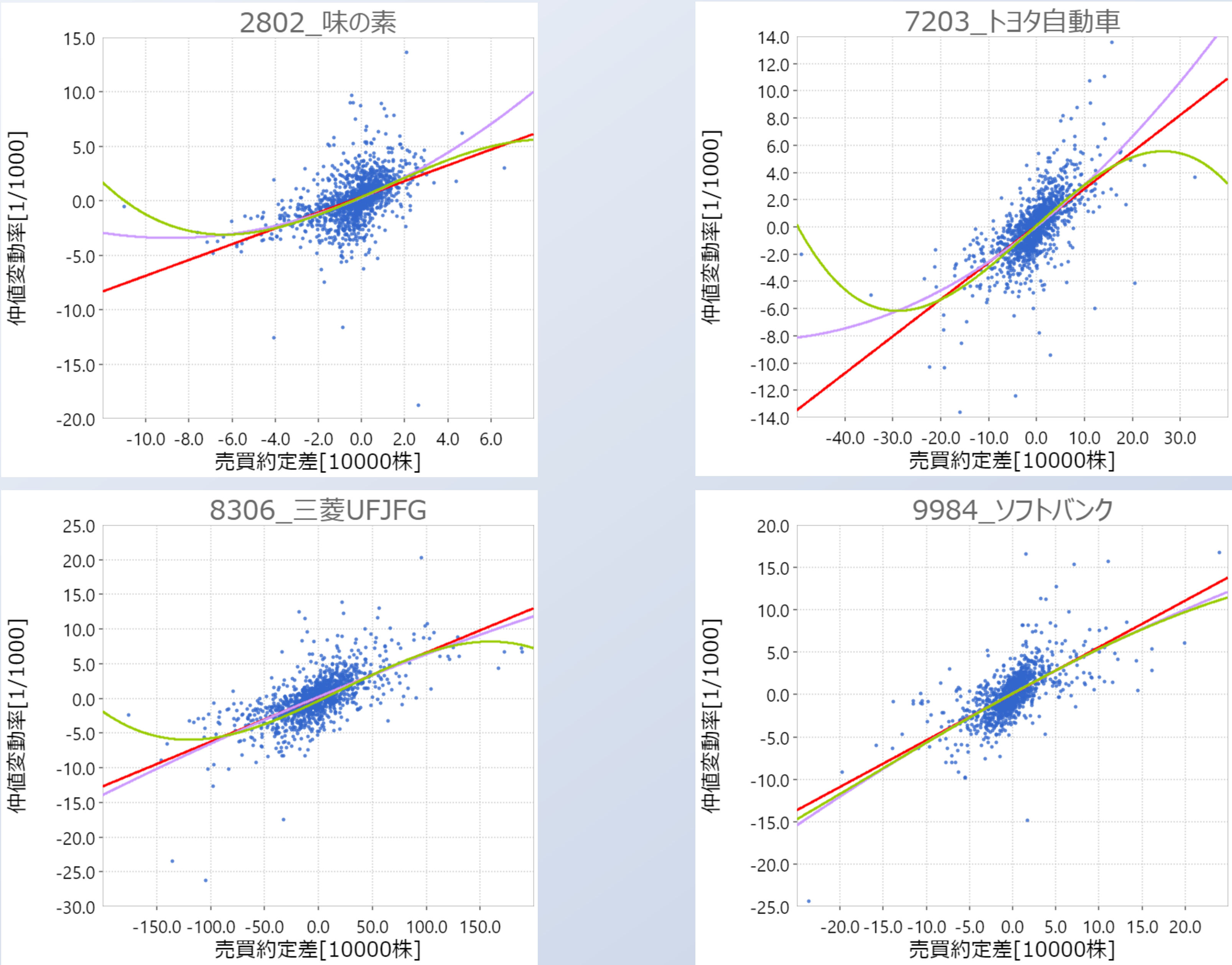
日時	開始時刻	終了時刻	買い成行約定数	売り成行約定数	約定差	仲値変動率
20160404	905	910	460500	332300	-128200	-0.00468
20160404	910	915	206500	133300	-73200	0.00301
20160404	915	920	79200	88500	9300	0.00366

これを入力として以下の処理を行う.



まずは，回帰分析に必要な約定差と仲値変動率の値をサンプリングを用いて抜き出す．しかし，現状の数字では回帰分析を行うと明らかにおかしい結果が返ってくるのでRスクリプトを使って約定差は$\frac{1}{10000}$倍，仲値変動率については1000倍する．そして，データ可視化で散布図と回帰直線の作成を行う.

恒久的インパクトの推定結果



※ 赤線が式(4)（線形），紫線が式(5)（2次式），緑線が式(6)（3次式）となっている.

推定結果に対する考察

- データの散布について
  - ✓ 中央に密集しており，特に特徴は見当たらない．
  - ✓ どの銘柄にも外れ値と思しきものが見当たる．特に取引量差が大きい部分に関しては外れ値なのか，正当な値なのか判断が難しい．

- 回帰直線について
  - ✓ 多項式回帰曲線については，線形回帰直線に近い振る舞いをしている．
  - ✓ 売買の取引量差が少なくデータサンプルが多い部分については線形性を保有しているように見える．また，売買の取引量差が大きい部分については，少なくとも凸性は保有して可能性は低く，線形性か凹性のいずれかを保有していると考えられる．

まとめ

- 一時的インパクトについて
  - ✓ 凹性を保有している可能性が高い.
  - ✓ 一方で取引執行株数が多くなると，凸性を帯びる可能性がある.

- 恒久的インパクトについて
  - ✓ 線形性と凹性のどちらの性質を保有しているかは判断が難しい．グラフ上は凹性を保有しているように見えなくはないが，外れている値に引っ張られているようにも見える.
  - ✓ 外れ値と思われるものが多いうえ，その判定が難しく，推定が難しい.

今後の課題

- 一時的インパクトについて
  - ✓ 取引執行株数が少ない場合は凹性を保有していると分かったので，取引執行株数が多い場合についてもさらに精度の良い推定を目指す．
  - ✓ 被説明変数，説明変数を対数変換して回帰分析を行い，一時的インパクトをべき型関数で仮定したときのべき乗の数値を推定する．
- 恒久的インパクトについて
  - ✓ 外れ値の処理を行い，より精度の良い回帰分析を目指す．また，外れ値の基準についても明確にする．
  - ✓ 3次よりも次元の高い多項式回帰分析も行い，どの次元が適切かAICなどを用いて求める．
  - ✓ 5分足以外の時間幅を試す．
- 全体について
  - ✓ 銘柄や業界，流動性などの様々な観点で分類し，特徴があるか考察する．

参考文献

[1] 加藤 恭: マーケットインパクト関数の非線形性について:凸性・凹性に関する実証・シミュレーション分析と最適執行モデル, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 24, No. 3, pp.203-237, 2014.

[2] Alvalo Cartea, and Sebastian Jaimungal: Incorporating order-flow into optimal execution, *Mathematics and Financial Economics*, 10, pp.339-364, 2016